УДК 621.39.037.372:621.373.121

К.В. Садовий

Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків

СТАТИСТИЧНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІЧНИХ МОДУЛЯЦІЙНИХ ХАРАКТЕРИСТИК З УРАХУВАННЯМ КІЛ КЕРУВАННЯ ЧАСТОТАМИ КВАРЦОВОГО ГЕНЕРАТОРА

Отримана статистична математична модель динамічних модуляційних характеристик кварцового генератора, в якій враховані параметри кіл керування частотами основного і ангармонічного коливань. В модель також закладена інформація про тип схеми кварцового генератора та про параметри флуктуацій кіл керування частотами. Модель подана у вигляді нелінійних функціональних перетворень вузькосмугового випадкового процесу. Отримані формули дозволяють проводити більш точні й повні розрахунки функцій амплітудно-частотних і фазочастотних динамічних модуляційних характеристик.

Ключові слова: *динамічна модуляційна характеристика, статистична математична модель, густина розподілу імовірності*

Вступ

Постановка проблеми та аналіз останніх досліджень і публікацій. Використання динамічних модуляційних характеристик (ДМХ) дозволяє стабілізувати частоту вихідних коливань кварцових генераторів [1]. При цьому параметри ДМХ необхідно розглядати як стаціонарні випадкові процеси, спектри яких знаходяться в області частот набагато нижче частоти власних коливань п'єзоелектричного резонатора.

Аналізуючи сучасні публікації в цьому напрямку [2 – 4], можна зробити висновок, що отримання статистичних параметрів ДМХ КАГ дозволить проводити більш точні й повні розрахунки функцій амплітудно-частотних і фазочастотних динамічних модуляційних характеристик, а також прогнозувати їх поведінку при впливі дестабілізуючих факторів.

Таким чином, необхідний подальший розвиток вивчення стабілізуючих властивостей функцій ДМХ в напрямку побудови їх статистичної математичної моделі з урахуванням впливу зовнішніх і внутрішніх шумів генератора і схем керування [5].

Метою статті є створення статистичної математичної моделі ДМХ кварцового генератора, яка враховує флуктуації кіл керування частотами основного і ангармонічного коливань.

Основна частина

При аналізі перетворення випадкових процесів лінійними або нелінійними системами постановка задачі полягає в наступному: передбачаючи відомими параметри системи і статистичні характеристики вхідного процесу, в даному випадку це ортогональні амплітуди $E_{ci}(t)$ і $E_{si}(t)$ процесу

$$S_{gi}(t) = E_{ci}(t)\cos\omega_i t + E_{si}(t)\sin\omega_i t,$$

де $E_{ci}(t)$, $E_{si}(t)$ – ортогональні амплітуди, обумовлені дією кола і-го резонансу моди h_{npq} ($p, q \equiv i$, n – номер механічної гармоніки),

Необхідно знайти статистичні характеристики процесу, який отримується на виході, в цьому випадку це функції ДМХ $m_{Ai}(t)$, φ_{Ai}, $m_{\omega i}(t)$ та $\varphi_{\omega i}$, отримані в [2].

Подамо ці функції ДМХ для однієї з мод h_{npq} у вигляді:

$$\begin{cases} m_{Ai}(t) = \left[X_{1i}^2(t) + X_{2i}^2(t)\right]^{0,5}; \\ \varphi_{Ai}(t) = \mathrm{arctg}\left[X_{1i}(t)/X_{2i}(t)\right]; \\ m_{\omega i}(t) = \left[Y_{1i}^2(t) + Y_{2i}^2(t)\right]^{0,5}; \\ \varphi_i(t) = \mathrm{arctg}\left[Y_{1i}(t)/Y_{2i}(t)\right], \end{cases} \quad (1)$$

де випадкові процеси

$$\begin{cases} X_{1i}(t) = \left[\overline{E}_{si} - A_{si}(t)\right]/U_o + m_{Ao}\sin\varphi_{Ao}; \\ X_{2i}(t) = \left[\overline{E}_{ci} + A_{ci}(t)\right]/U_o + m_{Ao}\cos\varphi_{Ao}; \\ Y_{1i}(t) = \left[\overline{E}_{si} - A_{si}(t)\right]/U_o - m_{\omega o}\sin\varphi_o; \\ Y_{2i}(t) = \left[\overline{E}_{ci} + A_{ci}(t)\right]/U_o - m_{\omega o}\cos\varphi_o, \end{cases} \quad (2)$$

отримані у вигляді лінійних перетворень квадратурних складових

$$\begin{cases} A_{ci}(t) = A_i(t)\cos\phi_i(t); \\ A_{si}(t) = A_i(t)\sin\phi_i(t) \end{cases} \quad (3)$$

комплексної амплітуди

$$\dot{V}_i(t) = A_i(t)\exp\left[j\phi(t)\right] = A_{ci}(t) + jA_{si}(t) \quad (4)$$

вузькосмугового випадкового процесу

$$\dot{\xi}(t) = A_i(t)\exp\left[j(\omega_i t + \phi_i)\right] = \xi(t) + j\eta(t). \quad (5)$$

Тут необхідно зробити важливе зауваження. На частотах ангармонік, які відстоять від основної частоти КАГ ω_o на сотні кілогерц, впливом флікер-шумів можна знехтувати і вважати шуми в області ангармонічних резонансів гаусовими білими [5]. При такому припу-

щенні виконується умова симетрії відносно частоти спектральної густини $S_{\xi i}(\omega)$ випадкового процесу $\xi(t)$, визначеного відповідно роботи [2] як квазігармонічний. Тобто, процес $\xi(t)$ будемо розглядати як вузькосмуговий гаусовий з нульовим середнім.

Так як перетворення Гілберта є лінійним, то для гаусового процесу $\xi(t)$ сполучений процес $\eta(t)$ буде також гаусовим. При цьому квадратурні компоненти $A_{ci}(t)$ та $A_{si}(t)$ з (2) отримуємо у вигляді:

$$\begin{cases} A_{ci}(t) = \xi(t)\cos\omega_i t + \eta(t)\sin\omega_i t; \\ A_{si}(t) = -\xi(t)\sin\omega_i t + \eta(t)\cos\omega_i t. \end{cases} \quad (6)$$

З (6) і (2) витікає, що для гаусового вузькосмугового стаціонарного процесу $\xi(t)$ випадкові процеси $X_{1i}(t)$, $X_{2i}(t)$, $Y_{1i}(t)$, $Y_{2i}(t)$ будуть також гаусовими з сумісною густиною розподілу імовірностей:

$$\begin{cases} W_2(X_1, X_2) = (1/2\pi D)\times \\ \times\exp\left\{-\left[\begin{array}{l}(X_1 - M\{X_1\})^2 + \\ +(X_2 - M\{X_2\})^2\end{array}\right]\right\}; \\ W_2(Y_1, Y_2) = (1/2\pi D)\times \\ \times\exp\left\{-\left[\begin{array}{l}(Y_1 - M\{Y_1\})^2 + \\ +(Y_2 - M\{Y_2\})^2\end{array}\right]\right\}, \end{cases} \quad (7)$$

де D – дисперсія флуктуацій ДМХ.

Середні значення випадкових процесів $X_1(t)$, $X_2(t)$, $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ для (7) отримуємо з урахуванням результатів роботи [2]:

$$\begin{cases} M\{X_1\} = \dfrac{U_в\left[(k_1 - 1)\sin\varphi_\Omega - k_2\cos\varphi_\Omega\right]}{U_o} - \\ -m_{Ao}\sin\varphi_{Ao}; \\ M\{X_2\} = \dfrac{U_в\left[(k_1 - 1)\cos\varphi_\Omega + k_2\sin\varphi_\Omega\right]}{U_o} + \\ +m_{Ao}\cos\varphi_{Ao}; \\ M\{Y_1\} = \dfrac{U_в\left[(k_1 - 1)\sin\varphi_\Omega - k_2\cos\varphi_\Omega\right]}{U_o} - \\ -m_{\varphi o}\sin\varphi_{\omega o}; \\ M\{Y_2\} = \dfrac{U_в\left[(k_1 - 1)\cos\varphi_\Omega + k_2\sin\varphi_\Omega\right]}{U_o} + \\ +m_{\varphi o}\cos\varphi_{\omega o}. \end{cases} \quad (8)$$

Дисперсія флуктуацій функцій ДМХ

$$D = \sigma^2 = D_\xi / U_o^2 \quad (9)$$

визначається через дисперсію D_ξ квадратурних складових A_{ci} та A_{si}, яка в свою чергу розраховується як [1]:

$$D_\xi(t) = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega)d\omega, \quad (10)$$

де $S_\xi(\omega)$ – спектральна густина шуму.

Здійснюючи перетворення сумісної густини розподілу ймовірностей (7) за відомою методикою [6] отримуємо вираз для одномірної густини імовірності функцій ДМХ (1) у формі узагальненого закону Райса:

$$W_1(m_{A,\varphi}) = (m_{A,\varphi}/D^{0,5})I_o(m_{A,\varphi}M_{A,\varphi})\times$$
$$\times\exp\left[-0,5(m_{A,\varphi}{}^2 + M_{A,\varphi}{}^2)/D\right]; \quad (11)$$
$$m_{A,\varphi} \ge 0;$$

$$W_1(\varphi_{A,\omega}) = (1/2\pi)\exp(-M_{A,\varphi}/2D)\times$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}1 + 2\pi(M_{A,\varphi}^{0,5}/D^{0,5})\cos(\varphi_{A,\omega} - \phi_{A,\omega})\times \\ \times\Phi\left[(M_{A,\varphi}/D^{0,5})\cos(\varphi_{A,\omega} - \phi_{A,\omega})\right]\times \\ \times\exp\left[0,5(M_{A,\varphi}/D)\cos^2(\varphi_{A,\omega} - \phi_{A,\omega})\right]\end{array}\right\}; \quad (12)$$
$$\pi \ge \varphi_{A,\omega} \ge -\pi,$$

де $M_{A,\varphi} = \left[M^2(X_1, Y_1) + M^2(X_2, Y_2)\right]^{0,5}$, $tg\phi_{A,\omega} = M(X_1, Y_1)/M(X_2, Y_2)$, $I_n(x)$ – модифікована функція Бесселя n-го порядку, $\Phi(x) = (2\pi)^{-0,5}\int_{-\infty}^{x}\exp(-0,5t^2)dt$ – інтеграл ймовірності.

Знайдені густини розподілу імовірності (ГРІ) (11) і (12) характеризують стаціонарні статистичні властивості функцій ДМХ прецизійного КАГ при різних співвідношеннях між амплітудою верхньої складової спектру ЧМ-АМ коливання й середньоквадратичним відхиленням шуму для різних розстройок відносно частоти ангармонічного контуру. Крім того, слід відмітити, що фазочастотні ДМХ зі зростанням $U_в$ прагнуть до своїх регулярних значень:

$$\bar{\varphi}_{A,\omega} = arctg\{M(X_1, Y_1)/M(X_2, Y_2)\}. \quad (13)$$

Відповідно функції амплітудних ДМХ прагнуть до математичних очікувань:

$$\bar{m}_{A,\varphi} = (\pi D/2)^{0,5}[(1 + 0,5M_{A,\varphi}{}^2/D)\times$$
$$\times I_o(M_{A,\varphi}/4D + (0,5M_{A,\varphi}{}^2/D)\times \quad (14)$$
$$\times I_1(M_{A,\varphi}{}^2/4D)]\exp(-M_{A,\varphi}{}^2/4D).$$

Використовуючи методологію роботи [7], визначаються дисперсії фазочастотних ДМХ, які відповідають ГРІ (12):

$$D_{\varphi_{A,\omega}} = \pi^2/3 + 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n C_{nA,n}/n^2,$$

де $C_{nA,n} = (M_{A,\varphi}/\sigma)^n\Gamma(1 + n/2)\cdot{}_1F_1(n/2;\ n+1;\ M_{A,\varphi}{}^2/2D)/\pi n!2^{n/2}$, а $\Gamma(x)$ і ${}_1F_1(\alpha,\beta,\gamma)$ – гамма- й вироджена гіпергеометрична функції.

Серед імовірнісних моделей для випадкової фази найбільшу відомість, окрім розподілу Райса, отримав розподіл Тихонова [5], який подамо як

$$W_1(\varphi_{A,\omega}; b_{A,\omega}; \phi_{A,\omega}) = [2\pi I_o(b_{A,\omega})]^{-1}\times$$
$$\times\exp[b_{A,\omega}\cos(\varphi_{A,\omega} - \phi_{A,\omega})]. \quad (15)$$

При належному узгодженні значень параметрів $M_{A,\varphi}/\sigma$ і $b_{A,\omega}$ ці густини практично співпадають [8], що дозволяє записати:

$$D_{\varphi_{A,\omega}} = \pi^2/3 + 4[I_o(b_{A,\omega})^{-1}]\sum_{n=1}^{\infty} I_n(b_{A,\omega}). \quad (16)$$

Можливість використання розподілу Тихонова для опису сигналів райсівського типу дає метод апроксимації розподілів на основі апарату характеристичних функцій [9], відповідно до яких коефіцієнти $b_{A,\omega}$ (16) для різних співвідношень $M_{A,\omega}/\sigma$ розраховуються як:

$$b_{A,\omega} = \begin{cases} (\pi / 2D)^{0,5} M_{A,\varphi} \text{ при } M_{A,\varphi} / D^{0,5} \le 0,6; \\ 1,71 \ln B_{A,\varphi} \text{ при } 0,6 < M_{A,\varphi} / D^{0,5} \le 1,5; \\ M_{A,\varphi} / D \text{ при } M_{A,\varphi} / D^{0,5} > 1,5, \end{cases}$$

де

$$B_{A,\varphi} = 1 / \{1 - (\pi / 8D)^{0,5} M_{A,\varphi} [I_o (M_{A,\varphi}{}^2 / 4D) + \\ + I_1 (M_{A,\varphi}{}^2 / 4D)] \exp(-M_{A,\varphi}{}^2 / 4D).$$

Дисперсія ж амплітудних ДМХ розраховується згідно формули:

$$D_{m_{A,\varphi}} = 2D(1 + M_{A,\varphi}^2 / 2D) - (\bar{m}_{A,\varphi})^2 .$$

При дисперсії АЧХ $D_{m_{A,\varphi}} \to 0$ та ФЧХ $D_{\varphi_{A,\omega}} \to 0$ ДМХ функції динамічних модуляційних характеристик описуються детермінованою математичною моделлю [2].

В подальшому аналіз поведінки функцій ДМХ необхідно проводитись тільки при співвідношенні сигнал/шум, який дорівнює 20, коли функції ДМХ набувають достатні стабілізуючі властивості.

Висновки

Таким чином, математична модель функцій ДМХ в смузі ангармонічного контуру, з урахуванням параметрів конкретної схеми прецизійних КАГ і їх флуктуацій, представлена у вигляді нелінійних функціональних перетворень вузькосмугового випадкового процесу, який діє з виходу ангармонічного контуру на вхід нелінійного пристрою.

Виведені формули розрахунку двомірної та одномірної густини розподілу імовірності ДМХ дозволяють отримувати статистичні параметри функцій ДМХ прецизійних КАГ.

Ангармонічний контур КАГ з розділеними схемами керування частотою без зовнішньої модуляції збуджений внутрішнім і зовнішнім джерелами шуму й має розподіл амплітуд і фаз, який відповідає узагальненому закону Райса.

Список літератури

1. *Шмалий Ю.С. Всплески динамических модуляционных характеристик в прецизионных кварцевых автогенераторах с ЧМ / Ю.С. Шмалий // Радиотехника. – 1991. – № 7. – С. 36-39.*
2. *Садовий К.В. Модель кварцового генератора зі схемою керування частотою для реалізації модуляційного методу стабілізації частоти / К.В. Садовий // Системи управління, навігації та зв'язку. – К.: ЦНДІ НУ, 2009. – Вип. 1(9). – С. 67-69.*
3. *IEEE Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control Society. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа к документу: http://www.ieee-uffc.org.*
4. *Precision Quartz Crystal Oscillators and Standards Frequency Stabilization. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа к документу: http://adsabs.harvard.edu.*
5. *Розробка та дослідження прецизійних кварцових генераторів на 5 та 10 МГц до кварцових мір частоти та іншої апаратури служб часу: Звіт про НДР / НВЦ «Сіхрон». Реєстр. №0193И039140, шифр «Чайка». – Х., 1993. – 129 с.*
6. *Тихонов В.И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.*
7. *Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая / Б.Р. Левин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Сов радио, 1974. – 552 с.*
8. *Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1977. – 343 с.*
9. *Атаянц Б.А. Вероятностные модели фазы радиосигнала / Б.А. Атаянц, А.Ф. Карпов // Радиоэлектроника. – 1983. – № 4. – С . 73-79 (Изв. высш. учебн. заведений).*

Надійшла до редколегії 23.04.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Ю.М. Седишев, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДУЛЯЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК С УЧЕТОМ ЦЕПЕЙ УПРАВЛЕНИЯ ЧАСТОТАМИ КВАРЦЕВОГО ГЕНЕРАТОРА

К.В. Садовый

Получена статистическая математическая модель динамических модуляционных характеристик кварцевого генератора, в которой учтены параметры цепей управления частотами основного и ангармонического колебаний. В модель также заложена информация о типе схемы кварцевого генератора и о параметрах флуктуаций цепей управления частотами. Модель представлена в виде нелинейных функциональных преобразований узкополосного случайного процесса. Полученные формулы позволяют проводить более точные и полные расчеты функций амплитудно-частотных и фазочастотных динамических модуляционных характеристик кварцевого автогенератора.

Ключевые слова: *динамическая модуляционная характеристика, статистическая математическая модель, плотность распределения вероятности.*

STATISTICAL MATHEMATICAL MODEL OF DYNAMIC MODULATION CHARACTERISTICS WITH CONSIDERATION OF QUARTZ OSCILLATOR FREQUENCY CONTROL CIRCUITS

K.V. Sadovy

Statistical mathematical model of the quartz oscillator dynamic modulation characteristics, which takes into account of frequency control circuit parameters of the basic and anharmonic channels has been obtained. The quartz oscillator circuit type and frequency control circuit fluctuation parameters are also considered in model. Obtained model is represented as the nonlinear functional transformations of the narrow-band stochastic process. Obtained formulae allows more accurate and complete calculation of amplitude-frequency and phase-frequency dynamic modulation characteristics of quartz oscillator.

Keywords: *dynamic modulation characteristic, statistical mathematical model, probability density.*