УДК 544:519.8:691.32/.34

В.Ю. Дубницкий[1], В.Л. Чернявский[2]

[1]Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ, Харьков
[2]Харьковский государственный технический университет строительства и архитектуры, Харьков

ОЦЕНКА СОСТОЯНИЯ СЛОЖНОЙ ОТКРЫТОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ДВУСТОРОННИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ОБЛАСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ ЕЁ СВОЙСТВ

Предложена мультипликативная производственная функция, позволяющая оценить работоспособность сложной технической или организационной системы. Для управления процессом поддержания её работоспособности определены функции эластичности и предельного замещения ресурсов.

Ключевые слова: *состояние системы, оценка состояния, работоспособность системы, производственная функция, эластичность.*

Введение

Постановка задачи. В настоящее время работоспособность сложных технических и организационных систем оценивается по результатам мониторинга контролируемых параметров (КП) и сравнения полученных значений с допустимыми. Предельные допустимые значения этих параметров установлены различного рода нормативными документами. Их численные значения выбраны так, чтобы обеспечить безопасную эксплуатацию рассматриваемой системы. Допустимая область значений этих параметров может быть ограничена снизу, сверху или иметь двустороннее ограничение [1].

Если допустимая область параметров ограничена снизу (схема "больше-лучше"), то строгое ограничение имеет вид:

$$K_u > K_{ub}. \quad (1)$$

В условии (1) принято, что K_u – текущее значение КП, K_{ub} – нижняя допустимая граница КП. Если допустимая область контролируемых параметров ограничена снизу, но ограничения имеют вид:

$$K_u \ge K_{ub}, \quad (2)$$

то говорят, что имеет место нестрогое ограничение снизу. Если в неравенствах (1) и (2) заменить знаки неравенств на противоположные, то получим область допустимых значений, ограниченную сверху и соответствующую схеме "меньше-лучше". Нередко в нормативных документах допустимая область значений КП представлена в виде:

$$K_1 < K < K_2 \quad (3)$$

или

$$K_1 \le K \le K_2. \quad (4)$$

Условие безопасной эксплуатации задают в виде мультипликативной производственной функции, которая отлична от нуля в том и только в том случае, когда конъюнктивная форма

$$\wedge_{u=1}^{p} A_u = 1. \quad (5)$$

В условии(5) принято, что A_u высказывание "значение u-го КП находится в области допустимых значений". Таким образом, возникает задача определения конкретного вида производственной функции и управляющих воздействий на неё с целью поддержания системы в работоспособном состоянии.

Анализ литературы. В работах [2, 3] авторами данной статьи был обоснован вид функции оценки состояния конкретной абиотической системы и способ расчёта управляющих воздействий на неё. В работе [3] аналогичная производственная функция была использована для описания организационной системы.

Цель работы. Формулировка и обоснование требований к виду и свойствам функции оценки состояния сложной системы при произвольном, ,но конечном числе КП и двусторонних ограничениях на область их значений.

Изложение результатов

Рассмотрим КП ограниченный снизу. Согласно работам [2, 3] представим его в виде

$$z_i = \frac{x_i - x_{iн}}{x_{iн}}, \qquad i = 1, 2...k, \quad (6)$$

где x_i – фактическое значение КП; $x_{iн}$ – его нижнее допустимое значение. В том случае, когда условие работоспособности системы имеет вид (1) ,то:

$$x_{iн} = x_{iнорм} - \Delta_i, \qquad i = 1, 2...k, \quad (7)$$

где Δ_i – малая величина, выбираемая в зависимости от требований к точности измерений.

Для того, чтобы сделать невозможными расчеты с величинами x_i, которые меньше нормативно ограниченных значений, будем определять величину x_i так:

$$x_i = \begin{cases} x_i, \text{ если } & x_i \ge x_{iнорм}; \\ x_{iн}, \text{ если } & x_i < x_{iнорм}. \end{cases} \quad (8)$$

Будем использовать для последующих расчетов для КП, ограниченных сверху величину:

$$z_j = \begin{cases} \dfrac{x_{jв} - x_j}{x_{jв}}, \end{cases} \qquad j = 1, 2...l\,. \qquad (9)$$

По аналоги с (7) введём величину

$$x_{jв} = x_{jнорм} + \Delta_j, \qquad j = 1, 2...l\,. \qquad (10)$$

Определим величину её так:

$$x_j = \begin{cases} x_j, \text{ если } & x_j \le x_{jнорм}; \\ x_{jв}, \text{ если } & x_j > x_{jв}. \end{cases} \qquad (11)$$

Допустим, что на все или на часть КП, определяющих состояние системы, наложены двусторонние ограничения вида (4).

То есть:

$$x_{uн} \le x_u \le x_{uв}, \qquad u = 1, 2...m \qquad (12)$$

Середину интервала возможных значений определяем как:

$$x_{uо} = \frac{x_{uн} - x_{uв}}{2}; \qquad u = 1, 2...m\,. \qquad (13)$$

Определим величину так Δ_u:

$$\Delta_u = \frac{x_{uв} - x_{uн}}{2}; \qquad u = 1, 2...m \qquad (14)$$

Тогда расчетную величину z_u определим в виде:

$$z_u = 1 - \left(\frac{x_u - x_{u0}}{\Delta_u} \right)^2; \qquad u = 1, 2...m\,. \qquad (15)$$

Для последующих расчетов примем, что

$$z_u = \begin{cases} z_u, \text{ если } \left(x_u - x_{u0}\right)/\Delta_u < |1|; \\ 0, \text{ если } \left(x_u - x_{u0}\right)/\Delta_u \ge |1|. \end{cases} \qquad (16)$$

Рассматривая величины z_i, z_j, z_u, выделим их общее свойство – они равны нулю, если их численное значение выходит за заданные ограничения.

Обратный переход от нормируемых величин z_i, z_j, z_u к исходным x_i, x_j, x_u будем выполнять для равенств (9), (14) согласно условиям:

$$x_i = x_{iн}\left(1 + z_i\right), \qquad i = 1, 2...k; \qquad (17)$$

$$x_j = x_{jв}\left(1 - z_j\right), \qquad j = 1, 2...l\,. \qquad (18)$$

Выражения для обратного перехода от нормированных значений КП к исходным получим, используя такие выражения:

$$x_{1u} = x_{u0} - \Delta_u \sqrt{1 - z_u}\,; \qquad (19)$$

$$x_{2u} = x_{u0} + \Delta\sqrt{1 - z_u}\,. \qquad (20)$$

В условиях (19) и (20) принято, что $u = 1, 2...m$.

Обобщенную оценку состояния системы по совокупности показателей, построенных по схеме «не меньше чем» будем определять так:

$$Z_1 = \left(\prod_{i=1}^{k} z_i \right)^{1/k}. \qquad (21)$$

Обобщенную оценку состояния системы по совокупности показателей, построенных по схеме «не более чем» будем определять так:

$$Z_2 = \left(\prod_{j=1}^{l} z_j \right)^{1/l}. \qquad (22)$$

Обобщенную оценку состояния системы по совокупности показателей, построенных по схеме двусторонних ограничений, будем определять так:

$$Z_3 = \left(\prod_{u=1}^{m} z_u \right)^{1/m}. \qquad (23)$$

Тогда объединённая оценка состояния системы может быть определена так:

$$Z_{об}^{(1)} = \left(Z_1 \times Z_2 \times Z_3\right)^{1/3}. \qquad (24)$$

Объединённая оценка состояния системы, которая соответствует требованию односторонних ограничений может быть определена так:

$$Z_{об}^{(2)} = \left(Z_1 \times Z_2\right)^{1/2}. \qquad (25)$$

Оценим возможность поддержки системы в работоспособном состоянии за сет её внутренних компенсаторных возможностей. Эта задача эквивалентна известной в математической экономике задаче о взаимозаменяемости факторов производства и определения эластичности [4]. Решение этой задачи будем выполнять пошагово.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$W = \left(\prod_{q=1}^{b} g_q \right)^{1/b}. \qquad (26)$$

Определим ее частные производные:

$$\frac{\partial w}{\partial g} = \frac{1}{b} g_q^{\frac{b-1}{b}} \left(\prod_{q=1}^{q-1} g_q \right)^{1/b} \left(\prod_{q=q+1}^{b} g_q \right)^{1/b}. \qquad (27)$$

После соответствующих преобразований получим, что:

$$\frac{\partial W}{\partial g_q} = \frac{W}{b g_q}. \qquad (28)$$

Для функции многих переменных $y = f\left(x_1, ...x_i, ..., x_u\right)$ эластичность функции y по переменной x_i определяют по условию:

$$E_{x_i}\left(y\right) = \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{y}. \qquad (29)$$

Следовательно для функции вида (26) эластичность примет вид:

$$E_{g_q}\left(w\right) = \frac{\partial E}{\partial g_q} \cdot \frac{g_q}{w} = \frac{1}{b}. \qquad (30)$$

Из условия (30) видно, что для функции вида (26) эластичность является постоянной величиной и равняется величине обратной количеству переменных, которые определяют оценку состояния системы. Физический смысл полученного условия в том, что неоправданное увеличение количества переменных, оценивающих состояние системы, снижает вклад каждой из них в возможность поддержания системы в работоспособном состоянии.

Рассмотрим определение эластичности для функций (21), (22) и (23) соответственно. Выполнив необходимые преобразования получим, что:

$$\frac{\partial Z_1}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(z_1,z_2,\ldots\frac{x_i-x_{i\text{н}}}{x_{i\text{н}}}\cdot z_{i+1}\ldots z_k\right)^{1/k};\quad(31)$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial x_i}=\left(\frac{z_1\cdot z_2\ldots\frac{x_i-x_{i\text{н}}}{x_{i\text{н}}}\cdot z_{i+1}\ldots z_k}{k\left(x_i-x_{i\text{н}}\right)}\right)^{1/k}=\frac{Z_l}{k\left(x_i-x_{i\text{н}}\right)}.\quad(32)$$

Следовательно:

$$E_{x_i}\left(Z_1\right)=\frac{x_i}{k\left(x_i-x_{i\text{н}}\right)}.\quad(33)$$

Выполняя аналогичные преобразования для функции (23) получим, что:

$$E_{x_j}\left(Z_2\right)=\frac{x_j}{l\left(x_\text{в}-x_j\right)}.\quad(34)$$

То есть будет отрицательной величиной. Этот означает, что увеличение переменной x_j будет вызывать ухудшение оценки состояния системы. Более сложный вид будет иметь эластичность для функции (23).

Функция Z_3 имеет вид:

$$Z_3=\left(z_1\cdot z_2\ldots z_{r-1}\cdot z_r\cdot z_{r+1}\ldots z_m\right)^{1/m}.\quad(35)$$

Представим выражение (35) в следующем виде:

$$Z_3=\left(\prod_{u=1}^{r-1}z_u\right)^{1/m}\left(\prod_{u=r+1}^{m}z_u\right)^{1/m}\left(1-\left(\frac{x_r-x_{r0}}{\Delta_r}\right)^2\right)^{1\backslash m}.\quad(36)$$

Для последующего упрощения выражения (36) примем, что:

$$A=\left(\prod_{u=1}^{r-1}z_u\cdot\prod_{u=r+1}^{m}\right)^{1/m};\quad(37)$$

$$b_r^2=\left(\frac{x_r-x_{r0}}{\Delta_r}\right)^2.\quad(38)$$

Частная производная функции Z_3 по переменной x_r примет вид:

$$\frac{\partial Z_3}{\partial x_r}=-\frac{2A\left[1-b_r^2\right]^{1/m}\cdot\left(x_r-x_{r0}\right)}{m\Delta_r^2\left[1-b_r^2\right]}.\quad(39)$$

Тогда эластичность примет вид:

$$E_{x_r}\left(Z_3\right)=-\frac{2x_r\left(x_r-x_{r0}\right)}{m\Delta_r^2\left(1-\left(\frac{x_r-x_{r0}}{\Delta_r}\right)^2\right)}.\quad(40)$$

Согласно работе [5] предельной нормой замещения ресурсом x_j ресурса x_i называют величину:

$$\gamma_{i/j}=\frac{\partial y/\partial x_i}{\partial y/\partial x_j}.\quad(41)$$

Естественно, что:

$$\gamma_{j/i}=\gamma_{i/j}^{-1}.\quad(42)$$

Тогда для подмножества нормативов, которые входят в состав подмножества Z_1, предельная норма замещения будет:

$$\gamma_{i/v}=\frac{x_v-x_{v\text{н}}}{x_i-x_{i\text{н}}};\quad i,v\in\left(1,2\ldots,k\right).\quad(43)$$

Для подмножества нормативов, которые входят в состав подмножества Z_2, предельная норма замещения:

$$\gamma_{j/w}=\frac{x_{w\text{в}}-x_w}{x_{j\text{в}}-x_j};\quad j,w\in\left(1,2\ldots,l\right).\quad(44)$$

Перекрестная норма взаимного предельного замещения:

$$\gamma_{i/j}=\frac{Z_1k\left(x_{j\text{в}}-x_j\right)}{Z_2l\left(x_j-x_{i\text{н}}\right)}.\quad(45)$$

В условии (36) принято, что $i=1,2\ldots k$; $j=1,2\ldots l$.

Аналогичные характеристики для подмножества Z_3, вследствие сложности получаемых выражений, целесообразно исследовать численными методами.

Выводы

1. Предложена мультипликативная производственная функция, позволяющая оценить работоспособность сложной технической или организационной системы.

2. Аргументами функции являются нормированные значения контролируемых параметров, значением функции – оценка её работоспособности.

3. Для управления процессом поддержания её работоспособности определены функции эластичности и предельного замещения ресурсов.

3. Все результаты получены в предположении, что допустимая область изменения контролируемых параметров может быть открытой или закрытой по всем параметрам или их части.

Список литературы

1. .Коваленко М.В. Формування вектора первинних значущих параметрів для оцінки технічного стану складних інформаційних систем / М.В. Коваленко, В.В Воротніков // Зб. наук. пр. ЖВІ НАУ. – 2008. – Вип. 1. – С. 63-69.

2. Дубницкий В.Ю. Определение параметрической чувствительности оценки состояния состава сложной физико-химической системы, взаимодействующей с внешней средой / В.Ю. Дубницкий, В.Л. Чернявский // Системи обробки інформації: зб. наук. пр. – Х.: ХУ ПС, 2005. – Вип. 3 (43). – С. 184-189.

3. Чернявский В.Л. Адаптация абиотических систем / В.Л. Чернявский. – Днепропетровск: Днепрпетровск. нац. ун-т железнодор. тр-та, 2008. – 412 с.

4. .Ротштейн А.П. Нечёткий многокритериальный выбор альтернатив. Метод наихудшего случая /А.П. Ротштейн // Известия РАН. Теория систем и системы управления. – 2009. – № 3. – С. 51-53.

5. Клейнер Г.Б. Производственные функции. Теория, методы, применение/ Г.Б. Клейнер. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 238 с.

Поступила в редколлегию 17.12.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Кононенко, Национальный технический университет «ХПИ, Харьков.

ОЦІНКА СТАНУ СКЛАДНОЇ ВІДКРИТОЇ СИСТЕМИ З ДВОСТОРОННІМИ ОБМЕЖЕННЯМИ НА ОБЛАСТЬ ЗМІНИ ЇЇ ВЛАСТИВОСТЕЙ

В.Ю. Дубницький, В.Л. Чернявський

Запропонована мультиплікативна виробнича функція, яка дає можливість оцінити працездатність складної технічної або організаційної системи. Для управління процесом її працездатності визначені функції еластичності та граничного заміщення ресурсів.

Ключові слова: *стан системи, оцінка стану, працездатність системи, виробнича функція, еластичність.*

EVALUATION OF THE STATE OF A COMPLEX OPEN SYSTEM UNDER BILATERAL LIMITATIONS TO THE AREA OF ITS PROPERTIES CHANGE

V.Yu. Dubnitsky, V.L. Chernyavsky

We propose a multiplicative production function that allows to evaluate functionality of a complex technical or organisational system. We have determined functions of elasticity and limiting substitution of resources for control of its functionality.

Keywords: *state of a system, state evaluation, functionality of the system, production function, elasticity/*