

УДК 519.859

Т.Е. Романова¹, С.Б. Шеховцов², А.В. Камак²¹ *Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков*² *Харьковский национальный университет внутренних дел, Харьков*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРАНСЛЯЦИОННОГО МНОГОУГОЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

Рассматривается оптимизационная задача трансляционного многоугольного включения с переменными метрическими характеристиками области включения. В качестве средств математического моделирования используется метод Ф-функций. Строится математическая модель, исследуются ее особенности. Предлагается метод и алгоритм решения. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: математическая модель, включение, многоугольная область, семейство прямоугольников, переменные метрические характеристики, Ф-функция.

Введение

Мотивация и приложения. Задачи упаковки (packing), раскроя (cutting) [1] и покрытия (covering) [2] относятся к классу задач геометрического проектирования.

Задачи упаковки и раскроя возникают во многих отраслях промышленности, в том числе машиностроении, металлургии, кораблестроении, текстильной, бумажной, легкой промышленности. Эти задачи направлены на поиск рационального расположения объектов на промышленном материале с целью максимизации коэффициента использования материала или минимизации отходов.

Задачи покрытия имеют приложения, например, в телекоммуникациях, в системах орошения, пожарной безопасности, в военных сценариях, системах воздушного и космического наблюдения, медицине и состоят в поиске покрытия заданной области множеством геометрических объектов.

Задачи геометрического проектирования относятся к классу NP-полных задач. Снижение сложности решения задач данного класса через создание конструктивных средств построения адекватных математических моделей в виде, позволяющем при-

менить к решению задачи известные методы локальной и глобальной оптимизации, является актуальной проблемой.

Целью данной статьи является построение математической модели и разработка метода решения задачи трансляционного многоугольного включения (translational polygonal containment [2]) с переменными метрическими характеристиками области включения.

Постановка задачи. В данной работе рассматривается задача в следующей постановке [3].

Пусть имеется конечное семейство $\Lambda = \{\tilde{P}_i, i \in I_n = \{1, 2, \dots, n\}\}$ ориентированных прямоугольников

$\tilde{P}_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -a_i \leq x \leq a_i, -b_i \leq y \leq b_i\}$ и компактное многосвязное φ -многоугольное множество

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ [2]. Кроме того, полагаем, что $\Omega = \bigcup_{\mu=1}^r \Omega_\mu$,

$\Omega_\mu = \text{conv}\{\omega_{\mu j} = (\tilde{x}_{\mu j}, \tilde{y}_{\mu j}) \in \mathbb{R}^2, j \in I_{m_\mu}\}$, где \mathbb{R}^2 – двумерное арифметическое евклидово пространство. Расположение Ω и \tilde{P}_i в пространстве \mathbb{R}^2 одно-

значно определяется векторами трансляции $v=(x, y)$ и $u_i=(x_i, y_i)$, $i \in I_n$ соответственно. Прямоугольник \tilde{P}_i , транслированный на вектор u_i , обозначим $\tilde{P}_i(u_i)$, а семейство транслированных прямоугольников $\tilde{P}_i(u_i)$, $i \in I_n$, обозначим $\Lambda(u)$, где $u=(u_1, u_2, \dots, u_n) \in R^{2n}$.

Пусть $P(w) = \bigcup_{i=1}^n \tilde{P}_i(u_i^0 + w) \subset R^2$, где $w \in R^2$ – вектор трансляции. Не теряя общности, полагаем, что параметры размещения объекта $P(w)$ совпадают с параметрами размещения одного из прямоугольников $\tilde{P}_i(u_i)$, $i \in I_n$.

Задача трансляционного многоугольного включения возникает, когда параметры размещения области $\Omega(v)$ являются переменными, а параметры размещения u_i , $i \in I_n$, объектов $\tilde{P}_i(u_i)$, $i \in I_n$, фиксированы, то есть $v \in R^2$, $u^0 = \text{const}$.

Задача трансляционного многоугольного включения, в дальнейшем, задача 1.

Необходимо определить, существует ли вектор $v^* \in R^2$, такой, что

$$\Omega(v^*) \subset P(u^0) \text{ или } \Omega(v^*) \cap \text{int } h(w) = \emptyset \quad (1)$$

где $h(w) = R^2 \setminus \text{int}(P(w)) = \text{cl}(R^2 \setminus \bigcup_{i=1}^n \tilde{P}_i(u_i^0 + w))$,

$P(u^0) = \bigcup_{i=1}^n \tilde{P}_i(u_i^0)$, $\text{int } T$ ($\text{cl } T$) – внутренность (замыкание) множества T [4].

Задача трансляционного многоугольного включения области с переменными метрическими характеристиками. В дальнейшем, задача 2.

Необходимо определить максимальное значение α и вектор $v^* \in R^2$, при котором

$$\alpha \Omega(v^*) \subset P(u^0). \quad (2)$$

Математическая модель

Для построения математических моделей задач 1 и 2, прежде всего, необходимо проверить выполнение условий (1) и (2). Как известно [5], наиболее эффективным средством математического моделирования задач упаковки, раскроя и покрытия является метод Φ -функций [6, 7].

В терминах Φ -функций условие (1) можно описать соотношением

$$\Phi(v, w) \geq 0, \quad (3)$$

где $\Phi(v, w)$ – Φ -функция для объектов $\Omega(v)$ и

$$h(w), \quad h(w) = R^2 \setminus \text{int } P(w), \quad P(w) = \bigcup_{i=1}^n \tilde{P}_i(u_i^0 + w),$$

$w \in R^2$ – вектор трансляции.

Представим объект $P(w)$ в следующем виде:

$$P(w) = \bigcup_{s=1}^{\tau} P_s(w) \subset R^2,$$

где $P_s(w) = \bigcup_{i=1}^{n_s} \tilde{P}_{si}(u_{si}^0 + w)$, $n_s \leq n$, τ – число компонент связности множества $P(w)$.

$$\text{Тогда } h(w) = \bigcap_{s=1}^{\tau} h_s(w), \quad h_s(w) = R^2 \setminus \text{int } P_s(w),$$

т.е.

$$h(w) = \text{cl} \bigcap_{s=1}^{\tau} (R^2 \setminus P_s(w)) = \text{cl} \bigcap_{s=1}^{\tau} h_s(w). \quad (4)$$

Множество $h_s(w)$ из (4) задается так:

$$h_s(w) = \bigcup_{j=1}^{\lambda_s} C_{sj}(w + w_{sj}), \quad (5)$$

где $C_{sj}(w + w_{sj})$ – базовые объекты [1].

В качестве базовых объектов C_{sj} в (5) рассматриваются ϕ -многоугольники, которые описываются

системами не более чем четырех неравенств вида

$$f_{1i}^1(u) \geq 0, \quad 1 \in I_4, \quad i \in I_n, \quad \text{где } f_{1i}(x, y) = -x - a_i,$$

$$f_{2i}(x, y) = y - b_i, \quad f_{3i}(x, y) = x - a_i,$$

$$f_{4i}(x, y) = -y - b_i, \quad \text{поскольку для любого } \tilde{P}_i(0, 0)$$

множество $h_i(0, 0) = R^2 \setminus \text{int } \tilde{P}_i(0, 0)$ имеет вид

$$h_i(0, 0) = \{(x, y) \in R^2 : \max\{f_{1i}(x, y), f_{2i}(x, y), f_{3i}(x, y), f_{4i}(x, y)\} \geq 0\}, i \in I_n.$$

Математическую модель задачи 1 можно представить в следующем виде:

$$\Phi(v^*) = \max \Phi(v). \quad (6)$$

Для решения задачи (1) достаточно выполнения условия $\Phi(v^0) \geq 0$, т.е. $\Phi(v^0) \leq \Phi(v^*)$. Если же $\max \Phi(v) < 0$, то решение задачи 1 не существует.

Перечислим свойства математической модели (6):

- 1) функция цели – кусочно-линейная;
- 2) задачу (6) можно свести к модели

$$\chi^* = \max_{(v, \chi) \in D \subset R^3} \chi, \quad (8)$$

где $D = \{(v, \chi) \in R^3 \mid \Phi(v) \geq \chi\}$;

3) D – несвязное множество с многосвязными компонентами связности;

$$4) D = \bigcup_{i=1}^{\alpha} D_i, \quad \text{где множество } D_i \subset R^3 \text{ описывается системой линейных неравенств, } \alpha = \prod_{\mu=1}^{\gamma} \alpha_{\mu},$$

$$\alpha_\mu = \prod_{s=1}^{\tau} \xi_{\mu s};$$

5) задача (8) сводится к задаче

$$\chi^* = \max\{\chi_i^*, i \in I_\alpha\}, \text{ где } \chi_i^* = \max_{(v, \chi_i) \in D_i \subset \mathbb{R}^3} \chi_i, i \in I_\alpha,$$

$$D_i = \{(v, \chi_i) \in \mathbb{R}^3 \mid A_i v + B_i \geq \chi_i\};$$

6) решение существует в точке v^* , если $\chi_i^* \geq 0$;

7) задача (8) – многоэкстремальная, NP-полная и NP-сложная.

Ф-функцию для области $\Omega(v)$ и множества $h(w)$ в общем виде можно записать следующим образом:

$$\Phi(v) = \min\{f(v), \Lambda_\varphi \cdot \varphi(v), \Lambda_\phi \cdot \phi(v), \Lambda_\tau \cdot \tau(v)\},$$

где $f(v) = \min\{f_1(v), f_2(v), \dots, f_{n_1}(v)\},$

$$\varphi(v) = \min_{i=1, \dots, n_2} \varphi_i(v), \varphi_i(v) = \max\{\varphi_{i1}, \varphi_{i2}\},$$

$$\phi(v) = \min_{j=1, \dots, n_3} \phi_j(v), \phi_j(v) = \max\{\phi_{j1}, \phi_{j2}, \phi_{j3}\},$$

$$\tau(v) = \min_{k=1, \dots, n_4} \tau_k(v), \tau_k(v) = \max\{\tau_{k1}, \tau_{k2}, \tau_{k3}, \tau_{k4}\},$$

$$\Lambda_\varphi = \begin{cases} 1, & \text{если } n_2 \neq 0 \\ N, & \text{если } n_2 = 0, N \rightarrow +\infty; \end{cases}$$

$$\Lambda_\phi = \begin{cases} 1, & \text{если } n_3 \neq 0 \\ N, & \text{если } n_3 = 0, N \rightarrow +\infty; \end{cases}$$

$$\Lambda_\tau = \begin{cases} 1, & \text{если } n_4 \neq 0 \\ N, & \text{если } n_4 = 0, N \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Тогда

$$\Phi(v) \geq \chi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle f_1(v) \geq \chi, \dots, \langle f_{n_1}(v) \geq \chi, \langle \varphi_{11}(v) \geq \chi, \varphi_{12}(v) \geq \chi, \\ \dots \\ \langle \varphi_{n_2 1}(v) \geq \chi, \varphi_{n_2 2}(v) \geq \chi, \langle \phi_{11}(v) \geq \chi, \phi_{12}(v) \geq \chi, \\ \langle \phi_{13}(v) \geq \chi, \\ \dots \\ \langle \phi_{n_3 1}(v) \geq \chi, \phi_{n_3 2}(v) \geq \chi, \langle \tau_{11}(v) \geq \chi, \tau_{12}(v) \geq \chi, \\ \langle \phi_{n_3 3}(v) \geq \chi, \langle \tau_{13}(v) \geq \chi, \tau_{14}(v) \geq \chi, \\ \dots \\ \langle \tau_{n_4 1}(v) \geq \chi, \tau_{n_4 2}(v) \geq \chi, \\ \langle \tau_{n_4 3}(v) \geq \chi, \tau_{n_4 4}(v) \geq \chi. \end{cases}$$

Математическая модель задачи 2 имеет следующий вид:

$$\alpha^* = \max_{(v, \alpha) \in D \subset \mathbb{R}^3} \alpha, \tag{9}$$

где $D = \{(v, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi(v, \alpha) \geq 0, \alpha - 1 \geq 0\}.$

Перечислим особенности модели (9):

1) функция цели α – линейная;
 2) неравенство $\Phi(v, \alpha) \geq 0$ всегда может быть описано системой S из $|I| \times |J|$ наборов μ_{ij} линейных неравенств $\langle f_{ijq}(v, \alpha) \geq 0, q = 1, 2, \dots, |Q_{ij}|$, здесь и дальше $|A|$ – мощность множества A ;

3) $\sum_{i,j} |Q_{ij}|$ – количество неравенств, формирующих систему S ;

4) система S генерирует конечный набор Λ систем неравенств

$$\tau_{ij} = \{f_{ijq}(u_0, \alpha) \geq 0, q \in \{1, 2, \dots, |Q_{ij}|\}, i = 1, 2, \dots, |I|, j = 1, 2, \dots, |J|;$$

5) $|\Lambda| = \prod_{i,j} |Q_{ij}|$ – количество систем неравенств;

6) каждая система неравенств τ_{ij} содержит не менее, чем $N = |I| \times |J|$ неравенств;

7) критерий (1) выполняется, если хотя бы одна система $\tau_{ij} \in \Lambda$ совместная и $\alpha = 1$;

8) набор Λ всегда может быть построен посредством дерева решений $S(\alpha)$, конечным вершинам которого соответствуют системы $\tau_{ij}, i = 1, 2, \dots, |I|, j = 1, 2, \dots, |J|.$

Метод решения

Метод решения задач (6) и (9) основан на применении методов локальной (модифицированный симплекс-метод) и глобальной (модификация метода ветвей и границ) оптимизации.

Основываясь на свойствах математической модели (6), (8), стратегия решения задачи трансляционного включения сводится к следующим этапам.

1. Полагаем, что $\alpha = 1.$

2. Построение дерева решений $S(\alpha) = S(1).$

Построение дерева решений подробно рассмотрено в работе [3].

3. Применение правила отсечения: отсекаются вершины (и соответствующие ветви) дерева решений $S(1)$, которым соответствуют несовместные системы. Правило отсечения позволяет значительно уменьшить количество рассматриваемых вершин дерева решений.

4. Выбор совместных системы последнего уровня дерева решений

$$S(1) A_i(v_0) + B_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, \lambda \leq |\Lambda|.$$

5. Решение задачи линейного программирования

$$\chi^* = \max_{(v_0, \chi) \in W \subset \mathbb{R}^3} \chi,$$

где $W = \{(v_0, \chi) \in \mathbb{R}^3 \mid A_i(v_0) + B_i \geq \chi, i \in I_\lambda\}$.

6. Выбор точек $v_0^{*i} = (x_0^{*i}, y_0^{*i}) \in \mathbb{R}^2, i \in I_\lambda$, в качестве стартовых точек для соответствующих задач линейного программирования

$$\alpha_i^* = \max_{(v_0, \alpha_i) \in V \subset \mathbb{R}^3} \alpha_i, \quad \text{где}$$

$$V = \{(v_0, \alpha_i) \in \mathbb{R}^3 \mid C_i Z + D_i \geq 0, Z = (v_0, \alpha_i) \in \mathbb{R}^3, i \in I_\lambda\}.$$

7. Вычисление $\alpha^* = \max\{\alpha_i^*, i \in I_\lambda\}$ и соответствующей точки v_0^* .

Пусть Ω – связное множество. Тогда решение задач трансляционного многоугольного включения состоит в реализации следующих шагов.

1. Вычисление коэффициента $k = S_P / S_\Omega$,

$$S_P = \sum_{i=1}^n S_{\tilde{P}_i}, \quad S_{\tilde{P}_i} - \text{площадь } \tilde{P}_i(u_i), \quad i \in I_n, \quad S_\Omega -$$

площадь области Ω . Если $k < 1$ – решение не существует, в противном случае переходим к следующему этапу.

2. Декомпозиция области $\Omega = \bigcup_{\mu=1}^Y \Omega_\mu$ на выпуклые многоугольники Ω_μ .

3. Формирование начальной точки $v_0 \in P(w)$.

4. Построение множества

$$h(w) = \mathbb{R}^2 \setminus \text{int} \bigcup_{i=1}^n \tilde{P}_i(u_i^0).$$

5. Проверка условия (3). Если соотношение (3) не выполняется, то переходим к шагу 6.

6. Построение дерева решений $S(\alpha) = S(1)$.

7. Решение задачи $\chi^* = \max_{(v_0, \chi) \in W \subset \mathbb{R}^3} \chi$, где

$W = \{(v_0, \chi) \in \mathbb{R}^3 \mid A_i(v_0) + B_i \geq \chi, i \in I_\lambda\}$, v^* – вектор, соответствующий решению задачи.

8. Проверка условия $\chi^* \geq 0$. Если условие выполняется, то решение найдено и переходим к шагу 13, в противном случае переходим к шагу 9.

9. Решение задачи $\chi^* = \max\{\chi_i^*, i \in I_\alpha\}$, где

$$\chi_i^* = \max_{(v, \chi_i) \in D_i \subset \mathbb{R}^3} \chi_i, \quad i \in I_\alpha, \quad D_i = \{(v, \chi_i) \in \mathbb{R}^3 \mid A_i v + B_i \geq \chi_i\},$$

для $i \in I_\alpha$, где α – количество концевых вершин дерева решений $S(\alpha) = S(1)$.

10. Проверка условия $i \geq \alpha$. Если условие выполняется, то решение не существует, в противном случае переходим к шагу 11.

11. $i = i + 1$, переходим к шагу 12.

12. Проверка критерия останова (допустимое

время счета). Если критерий выполняется, то процесс решения задачи заканчивается, в противном случае переходим к шагу 7.

13. Решение задачи $\alpha_i^* = \max_{(v_0, \alpha_i) \in V \subset \mathbb{R}^3} \alpha_i$, где

$$V = \{(v_0, \alpha_i) \in \mathbb{R}^3 \mid C_i Z + D_i \geq 0, Z = (v_0, \alpha_i) \in \mathbb{R}^3, i \in I_\lambda\}.$$

14. Вычисление $\alpha^* = \max\{\alpha_i^*, i \in I_\lambda\}$ и соответствующей точки v_0^* .

Результаты численного эксперимента

Рассмотрим пример. Пусть Ω – выпуклый многоугольник. Полагаем, что Ω задается последовательностью вершин $\{v_j, j \in I_m\}$ против часовой стрелки: $\{v_j, j \in I_3\} = \{(3, 3), (-2, 1), (4, -5)\}$. Пусть имеется семейство $\Lambda = \{\tilde{P}_i, i \in I_9\}$. Информация о метрических характеристиках прямоугольников $\tilde{P}_i, i \in I_9$, приведена в табл. 1.

Точка u^0 , соответствующая размещению прямоугольников $\tilde{P}_i(u_i^0), i \in I_9: u^0 = ((0, 1), (0, 7), (15, 1), (11.7, 7), (7, -5), (7, 1), (-5, -5), (-9, 4), (19, 0))$.

Таблица 1

Метрические характеристики
прямоугольников $\tilde{P}_i, i \in I_9$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_i	3.9	5.9	4.3	5.5	5.7	3.9	7.7	2.7	2.5
b_i	3.1	3.1	3.0	3.2	3.3	3.5	3.7	4.0	6.7

На рис. 1 приведены положение области Ω и $\alpha_k^* \Omega$ в точках $v_k^*, k \in I_6$, соответствующих локальным экстремумам задачи 2 вида (9) и удовлетворяющих условию (3):

$$\alpha_k^* \Omega(v_k^*) \subset \Lambda(u^0), \quad k \in I_6:$$

$$v_1^* = (2.95, 3.2625), \quad v_2^* = (-10, 6.64),$$

$$v_3^* = (15.4, 1.525), \quad v_4^* = (11.26, 4.977),$$

$$v_5^* = (-9.733, -2.533), \quad v_6^* = (6.1, 5.625).$$

Таким образом, максимальное значение коэффициента гомотетии α определяется так:

$$\alpha^* = \max\{\alpha_k, k \in I_6\} =$$

$$\max\{2.3125, 1, 1.525, 1.741, 1.1333, 1.525\} = 2, 313.$$

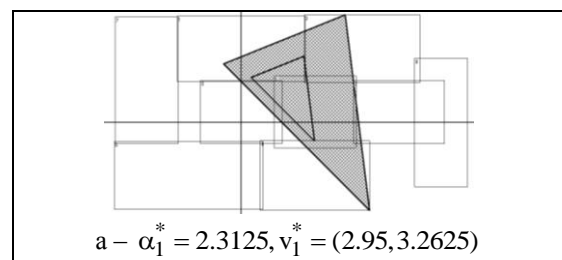


Рис. 1. Локальная оптимизация

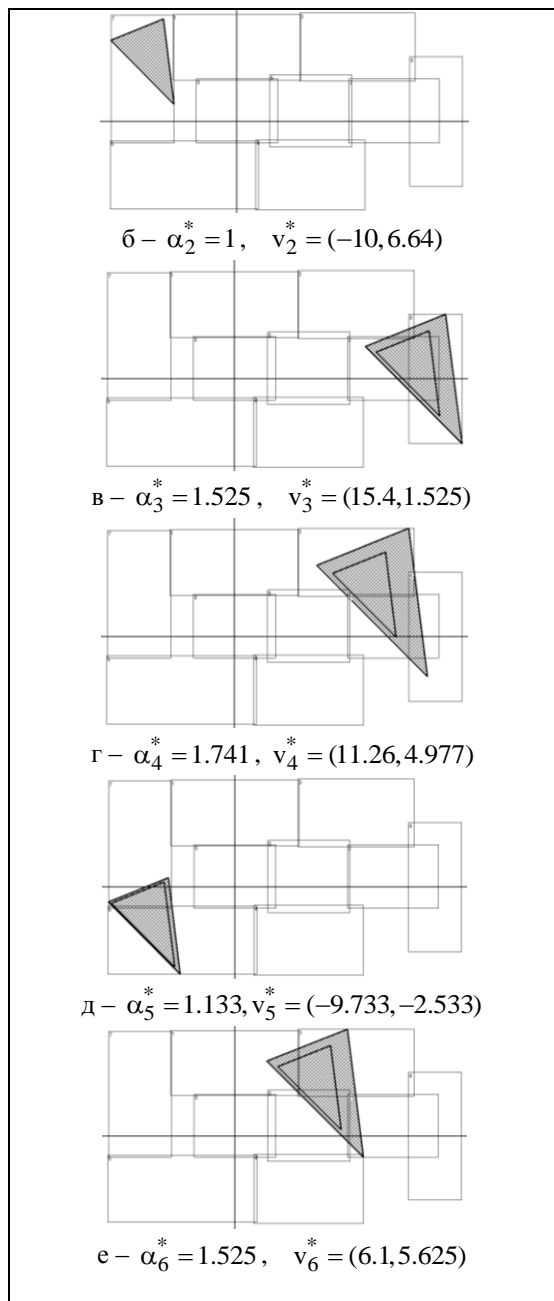


Рис. 1. Локальна оптимізація (окончання)

Выводы

В данном исследовании приведена математическая модель и метод решения задачи трансляционного включения произвольной многоугольной области с переменными метрическими характеристиками. Исследованы особенности математической модели и предложен метод решения. Данный подход можно распространить на случай неориентированной области включения. Предложенные средства математического и компьютерного моделирования являются эффективными при решении научных и прикладных задач геометрического проектирования.

Список литературы

1. Dyckhoff H. Cutting and packing / H. Dyckhoff, G. Scheithauer, J. Terno // in: M. Dell'Amico, F. Maffioli and S. Martello Eds. Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization, John Wiley & Sons, Chichester. – 1997. – P. 393-412.
2. Daniels K. An Incremental Algorithm for Translational Polygon Covering / K. Daniels, R. Inkulu // University of Massachusetts at Lowell Computer Science Technical Report. – 2001. – № 1. – P. 1-31.
3. Stoyan Yu. Translational polygonal containment in packing and covering problems / Yu. Stoyan, T. Romanova, A. Krivulya, G. Scheithauer // Проблемы машиностроения. – 2007. – Т.10, №3. – С. 67-75.
4. Александрян Г.А. Общая топология / Г.А. Александрян, Э.А. Мирзаханян. – М.: Высш. шк., 1979. – 336 с.
5. Bennell J. Tools of mathematical modelling of arbitrary object packing problems / J. Bennell, G. Scheithauer, Yu. Stoyan, T. Romanova // J. Annals of Operations Research, Publisher Springer Netherlands, ISSN 0254-5330 (Print) 1572-9338 (Online), 2008.
6. Stoyan Y. Φ -function for complex 2D objects / Y. Stoyan, G. Scheithauer, M. Gil, T. Romanova // 4OR Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies. – 2004. – Volume 2, Number 1. - P. 69-84.
7. Stoyan Y. Φ -function for 2D primary objects / Y. Stoyan, J. Terno, G. Scheithauer, N. Gil, T. Romanova // Studia Informatica, Paris, University. - 2002. - Vol. 2, № 1. - P. 1-32.

Поступила в редколлегию 14.12.09

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.Л. Ерохин, Харьковский национальный университет внутренних дел, Харьков.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ТРАНСЛЯЦІЙНОГО БАГАТОКУТНОГО ВКЛЮЧЕННЯ

Т.Є. Романова, С.Б. Шеховцов, Г.В. Камак

В статті будується математична модель задачі трансляційного багатокутного включення зі змінними метричними характеристиками області розміщення. Досліджуються особливості моделі. Пропонується метод розв'язання задачі, заснований на комбінації методів локальної і глобальної оптимізації.

Ключові слова: математична модель, включення, багатокутна область, сімейство прямокутників, змінні метричні характеристики, Φ -функція.

MATHEMATICAL MODEL AND SOLUTION METHOD FOR TRANSLATIONAL POLYGONAL CONTAINMENT PROBLEM

T.E. Romanova, S.B. Shehovcov, A.V. Kamak

The article considers a mathematical model of a translational polygonal containment problem provided variable metrical characteristics. Characteristics of the models are investigated. Solution method based on the state-of-the-art local and global optimization methods is provided.

Keywords: mathematical model, including, polygonal area, family of rectangles, variable metrical descriptions, Φ -function.