УДК 681.3.042

В.М. Рудницький, О.Б. Півень, І.М. Федотова-Півень

Черкаський державний технологічний університет, Черкаси

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПАРАЛЕЛЬНОГО ДОДАВАННЯ П'ЯТИ І МЕНШЕ ДОДАНКІВ В НАДЛИШКОВИХ СИСТЕМАХ ЧИСЛЕННЯ

В статті розглянуто доведення правил одночасного виконання кількох $k \subset (2;\ 3;\ 4;\ 5)$ операцій додавання в рекурентних системах числення для різних початкових значень і побудова кодів цифр в явному виді з використанням структурно-блокових кодів.

Ключові слова: *паралельне додавання, надлишковість, структурно-блокові коди, рекурентні системи числення.*

Вступ

Постановка проблеми. Збільшення швидкодії, надійності засобів обчислень і достовірності результатів обчислень є важливою задачею обчислювальної техніки в керуванні довготривалими процесами без втручання людини, а саме автоматизованими складними технологічними процесами, вимірювально-обчислювальними комплексами, космічними супутниками, системами медичного обслуговування і діагностики. Рішення цих задач передбачає використання структурної і інформаційної надлишковості, а також систем числення (СЧ), в яких з самого початку можлива надлишковість представлення кодів чисел.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Відомо [1], що можливо створення комбінаційного суматора для паралельного швидкого додавання багаторозрядних двійкових чисел за рахунок одночасного додавання трьох чисел, представлених в двійковій надлишковій мінімальній системі числення. В роботі [2] було визначено рекурентні системи числення, в яких можливе одночасне додавання до 4-х чисел включно і до 5-ти чисел включно, що дає можливість підвищення швидкодії арифметичних пристроїв. Але правила одночасного додавання в структурно-блокових кодах (СБК) для цих СЧ не доведено і коди цифр в явному виді не отримано.

Мета статті: довести правила одночасного виконання кількох $k \subset (2;\ 3;\ 4;\ 5)$ операцій додавання в системах числення, заданих рекурентною послідовністю $B_n = B_{n-1} + B_{n-3} + B_{n-4}$ з різними наборами початкових значень (ПЗ) і побудувати коди цифр в явному виді з використанням СБК для визначення оптимальних СЧ.

Виклад основного матеріалу

При проведенні дослідження обмежимося системами числення [2], утвореними рекурентною послідовністю

$$B_n = B_{n-1} + B_{n-3} + B_{n-4} \qquad (1)$$

і початковими значеннями (ПЗ) 1 1 1 2 3 5 8 (тобто $B_0 = 1$, $B_1 = 1$, $B_2 = 1$, $B_3 = 2$, $B_4 = 3$, $B_5 = 5$, $B_6 = 8$); 1 1 1 2 4 6 10, для яких виконуються наступні правила додавання:

$$\begin{cases} 0+0=0; \\ B_n + 0 = B_n; \\ 2B_n = B_{n+1} + B_{n-2}; \\ 3B_n = B_{n+2} + B_{n-2}; \\ 4B_n = B_{n+2} + B_n + B_{n-2}; \\ 5B_n = B_{n+2} + B_{n+1} + B_{n-1} + B_{n-4}. \end{cases} \qquad (2)$$

Правила (2) в цих СЧ дозволяють виконувати одночасне додавання кількох $k \subset (2;\ 3;\ 4;\ 5)$ чисел.

Побудуємо системи числення і коди цифр в явному виді та доведемо отримані правила додавання. Побудова кожної СЧ здійснюється за двома характеристиками: а) максимальна несиметрія нулів і одиниць в коді цифр; б) простота виконання правил додавання.

Визначимо для рекурентної системи числення (1) з ПЗ 1 1 1 2 3 5 8 кількість способів кодування чисел

$$K_n = \prod_{i=1}^{16} k_i\,, \qquad (3)$$

де k_i – число кодових варіантів кожного цілого числа від 0 до 16 ; n = 0,1,2,…,16. А саме: $K_n = 1_0\ 3_1\ 4_2\ 5_3\ 6_4\ 6_5\ 7_6\ 7_7\ 7_8\ 9_9\ 9_{10}\ 8_{11}\ 9_{12}\ 8_{13}\ 9_{14}\ 8_{15}\ 10_{16} = 24\ 887\ 878\ 041\ 600$.

Розглянемо два граничні варіанти кодування за кількістю розрядів: 1) з максимальною кількістю розрядів; 2) з мінімальною кількістю розрядів для системи числення (1) (табл. 1).

У табл. 1 наведено граничні варіанти кодування за кількістю розрядів перших 16-ти чисел в СЧ, утворених рекурентною послідовністю (1) з ПЗ: 1) 1 1 1 2 3 5 8 (max, min – максимальна і мінімальна кількість розрядів); 2) 1 1 1 2 4 6 10 (max1, min1 – максимальна і мінімальна кількість розрядів).

Проаналізуємо варіанти кодування перших 16-ти чисел в 2-х різних заданих системах числення:

Таблиця 1

Граничні варіанти кодування

число	max	min	max1	min1
0	1	1	1	1
1	3	1	3	1
2	4	2	4	2
3	5	3	4	3
4	5	4	5	4
5	6	4	5	4
6	6	5	6	5
7	6	5	6	5
8	7	5	6	5
9	7	6	6	5
10	7	6	7	6
11	7	6	7	6
12	7	6	7	6
13	8	6	7	6
14	8	7	7	6
15	8	7	7	6
16	8	7	8	7

Таблиця 2

Варіанти кодування перших 16-ти чисел

	СЧ B_n= =B_{n-1} +B_{n-3} + + B_{n-4}; ПЗ: 1 1 1 2 3 5 8	СЧ B_n= =B_{n-1} +B_{n-3} + + B_{n-4}; ПЗ: 1 1 1 2 4 6 10
число	код	код
0	00000	00000
1	00001	00001
2	01000	01000
3	10000	10001
4	10001	11000
5	100000	100000
6	100001	100001
7	101000	110000
8	1000000	1000000
9	1000001	1000001
10	1001000	1010000
11	1010000	10000000
12	1010001	10000001
13	10000000	10010000
14	10000001	100000000
15	10001000	100000001
16	10010000	100010000

СЧ, яка задається рекурентною послідовністю (1) з початковими значеннями 1 1 1 2 4 6 10 і правилами додавання (2) за розрахунками за формулою (3) має $K_n = 1_0\ 3_1\ 4_2\ 4_3\ 4_4\ 4_5\ 5_6\ 7_7\ 7_8\ 5_9\ 5_{10}\ 7_{11}\ 8_{12}\ 8_{13}\ 7_{14}\ 5_{15}\ 6_{16}$ = 442 552 320 000.

Отже, з аналізу наведених кількостей способів кодування, максимальної та мінімальної кількості розрядів перших 16-ти чисел, кодів цифр в явному виді в СЧ, утворених рекурентною послідовністю (1) з ПЗ: 1) 1 1 1 2 3 5 8; 2) 1 1 1 2 4 6 10 слідує, що меншу надлишковість має СЧ на основі рекурентної послідовності (1) з початковими значеннями 1 1 1 2 4 6 10 в порівнянні з СЧ на основі рекурентної послідовності (1) з початковими значеннями 1 1 1 2 3 5 8.

Для доведення правил (2) подамо отриману рекурентну послідовність третього порядку в загальному виді [3]

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-3} + u_{n-4} \qquad (4)$$

і доведемо наступні дві леми по аналогії з доведенням, наведеним в [4].

Лема 1. Якщо V є рішенням рівняння (4), а c – довільне число, то послідовність $c \cdot V$ (тобто послідовність $c \cdot v_1, c \cdot v_2, c \cdot v_3, \dots$) теж є рішенням рівняння (4).

Доведення: помножимо рекурентне співвідношення $v_n = v_{n-1} + v_{n-3} + v_{n-4}$ почленно на c і отримаємо

$$c \cdot v_n = c \cdot v_{n-1} + c \cdot v_{n-3} + c \cdot v_{n-4},$$

що і вимагалося довести.

Лема 2. Якщо V^* і V^{**} є рішеннями рівняння (4), то і їх сума $V^* + V^{**}$ (тобто послідовність $v_1^* + v_1^{**}, v_2^* + v_2^{**}, v_3^* + v_3^{**}, \dots$) теж є рішенням рівняння (4).

Доведення: з умови маємо

$$v_n^* = v_{n-1}^* + v_{n-3}^* + v_{n-4}^*;$$

$$v_n^{**} = v_{n-1}^{**} + v_{n-3}^{**} + v_{n-4}^{**}.$$

Почленне додавання цих двох рівностей дає

$$v_n^* + v_n^{**} = (v_{n-1}^* + v_{n-1}^{**}) + (v_{n-3}^* + v_{n-3}^{**}) + \\ +(v_{n-4}^* + v_{n-4}^{**}).$$

Цим лему доведено.

Доведемо правила (2) для СЧ, заданої рекурентною послідовністю (1) і початковими значеннями: 1 1 1 2 3 5 8. Перші два правила очевидні і доведення не потребують. Доведемо 3-е правило з (2):

$$2B_n = B_{n+1} + B_{n-2}. \qquad (5)$$

Доведення. Оскільки рекурентна послідовність (1) з початковими значеннями 1 1 1 2 3 5 8 породжує послідовність Фібоначчі [5] (починаючи з другої одиниці початкових значень), тобто кожне наступне значення послідовності є сумою двох попередніх найближчих сусідніх значень, то згідно [3] рекурентна послідовність (1) зводиться до рекурентної послідовності

$$B_n = B_{n-1} + B_{n-2}. \qquad (6)$$

З (6) випливає рівність $B_{n-2} = B_{n-3} + B_{n-4}$, яка при підстановці в (6) дає рекурентну послідовність (1). З (6) випливає також рівність $B_{n+1} = B_n + B_{n-1}$, з якої отримуємо

$$B_n = B_{n+1} - B_{n-1}. \qquad (7)$$

Сума рівнянь (6) і (7) після скорочення на B_{n-1} дає рівняння (5). За лемою 2 розв'язки рівнянь (6) і (7) є розв'язками рівняння (5), оскільки (6) і (7) є різними формами рівняння (5). Отже, третє правило з (2) доведено. Четверте правило з (2) отримуємо так: в (5) додаємо B_n до обох частин:

$$3B_n = B_{n+1} + B_n + B_{n-2}. \qquad (8)$$

З (6) слідує:

$$B_{n+2} = B_{n+1} + B_n . \quad (9)$$

Підстановка (9) в (8) дає $3B_n = B_{n+2} + B_{n-2}$, тобто четверте правило. П'яте правило $4B_n = B_{n+2} + B_n + B_{n-2}$ отримуємо з четвертого додаванням до обох частин рівності B_n.

Доведемо 6-е правило з (2):

$$5B_n = B_{n+2} + B_{n+1} + B_{n-1} + B_{n-4} . \quad (10)$$

Доведення. Додавання (5) і (8) дає

$$5B_n = B_{n+2} + B_{n+1} + 2B_{n-2} . \quad (11)$$

За лемою 2 розв'язки рівнянь (5) і (8) є розв'язками рівняння (11), оскільки (5) і (8) є різними формами рівняння (11). З (5) слідує

$$2B_{n-2} = B_{n-1} + B_{n-4} . \quad (12)$$

Підстановка (12) в (11) дає рівність (10). Цим систему правил додавання (2) для СЧ (1) з ПЗ 1 1 1 2 3 5 8 доведено.

СЧ (1) з ПЗ 1 1 1 2 4 6 10 породжує послідовність 1 1 1 2 4 6 10 16 26 42 …, яка починаючи з цифри 2 є послідовністю, кожне значення якої є збільшеним вдвічі відповідним значенням послідовності Фібоначчі. Тому за лемою 1 ($c = 2$) система правил додавання (2) справджується і для СЧ (1) з ПЗ 1 1 1 2 4 6 10, оскільки система правил додавання (2) вже доведена для послідовності Фібоначчі при розгляді СЧ (1) з ПЗ 1 1 1 2 3 5 8.

Оскільки ступінь надлишковості системи числення визначає число розрядів в коді числа, а число розрядів визначається апаратними можливостями арифметичного пристрою, вибір СЧ для практичного застосування необхідно проводити в залежності від апаратних можливостей [6] і вимог проектування при необхідності підвищення контролюючих можливостей коду.

Висновки

В результаті проведених досліджень було доведено правила додавання в СЧ, утворених з рекурентної послідовності (1) з початковими значеннями 1 1 1 2 3 5 8; 1 1 1 2 4 6 10, побудовано коди цифр в явному виді з використанням структурно-блокових кодів і визначено порівняльний рівень надлишковості цих СЧ.

Вибір конкретної СЧ для практичного застосування повинен проводитися в залежності від вимог проектування при необхідності підвищення контролюючих можливостей коду. Так, при обмеженнях на апаратні ресурси буде вибиратися СЧ з малою надлишковістю.

Список літератури

1. *Патент Российской Федерации. Комбинационный сумматор структурных кодов. № патента 2023288. Заявитель Ткаченко А.В., Харламов Д.В.. № заявки 5018600/24. Класс патента G06F7/49. Дата подачи заявки: 01.07.1991. Дата публикации 15.11.1994. Патентообладатель: Краснодарское высшее военное командно-инженерное училище ракетных войск. Редакция МПК: 5, основные коды МПК: G0F007/49.*
2. *Рудницький В.М Метод підвищення швидкодії арифметичних пристроїв за рахунок суміщеного виконання операцій в структурно-блокових кодах / В.М Рудницький, І.М.Федотова-Півень // Системи обробки інформації: зб. наук. пр. – Х.: ХУ ПС, 2009. – Вип. 4 (78). – С. 117-119.*
3. *Маркушевич А.И. Возвратные последовательности / А.И. Маркушевич. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. – 48 с.*
4. *Пантєлєєва Н.М. Теоретичні основи створення природно-надійних комп'ютерних систем. / Н.М. Пантєлєєва, В.М. Рудницький. – Черкаси: Брама-Україна, 2009. – 200 с.*
5. *Воробьёв Н.Н. Числа Фибоначчи / Н.Н. Воробьёв. – 4-е изд., дополн. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1978. – 144 с.*
6. *Брюхович Е.И. Экономическая стратегия разработки вычислительных систем: место и роль счислений / Е.И. Брюхович // Управляющие системы и машины. Научно-производственный журнал. – Институт кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР, февраль 1990. – № 2 (106). – С. 3-18.*

Надійшла до редколегії 21.12.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.М. Первунинский, Черкасский государственный технологический университет, Черкассы.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПАРАЛЛЕЛЬНОГО СЛОЖЕНИЯ ПЯТИ И МЕНЬШЕ СЛАГАЕМЫХ В ИЗБЫТОЧНЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

В.Н. Рудницкий, О.Б. Пивень, И.Н. Федотова-Пивень

В статье рассмотрено доказательство правил одновременного выполнения нескольких $k \subset (2; 3; 4;5)$ операций суммирования в рекуррентных системах счисления для разных начальных значений и построение кодов цифр в явном виде с использованием структурно-блочных кодов.

Ключевые слова: *параллельное сложение, избыточность, структурно-блочные коды, рекуррентные системы счисления.*

A DESIGN OF PROCESS OF PARALLEL ADDITION OF FIVE AND LESS SUMMANDS IS IN THE REDUNDANT NUMBER SYSTEMS

V.N. Rudnitsky, O.B. Piven, I.N. Fedotova-Piven

In the article proof of rules of simultaneous implementation is considered a few to $k \subset (2; 3; 4;5)$ operations of adding up in the recurrent number systems for different initial values and construction of codes of numbers in an obvious kind with the use of structurally-sectional codes.

Keywords: *parallel addition, redundancy, structural - sectional codes, recurrent number systems.*