

УДК 515.2

І.А. Чуб<sup>1</sup>, М.В. Новожилова<sup>2</sup><sup>1</sup> Університет цивільного захисту України, Харків<sup>2</sup> Харківський державний технічний університет будівництва та архітектури, Харків

## ФОРМАЛІЗАЦІЯ УМОВ ВЗАЄМНОГО НЕПЕРЕТИНУ ОБ'ЄКТІВ ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ БАГАТОКУТНИКІВ В АНІЗОТРОПНІЙ ОБЛАСТІ В ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

*Наведені результати побудови аналітичного опису геометричних обмежень взаємного неперетину об'єктів задачі розміщення багатокутників в анізотропній області в полярній системі координат.*

**Ключові слова:** оптимальний розподіл, взаємний неперетин, багатокутник, анізотропна область.

### Вступ

**Постановка проблеми.** Велика кількість задач оптимального розподілу ресурсів, енергозбереження, що виникають у практичній діяльності, належать до класу оптимізаційних задач розміщення геометричних об'єктів в ізотропній та анізотропній областях. Серед них практичний інтерес викликає оптимізаційна задача розкрюю шкіри, кожна ділянка якої характеризується своїм напрямком найменшої тягучості, який є параметром анізотропії. Теорія та методи розв'язання оптимізаційних задач розміщення геометричних об'єктів в анізотропних областях не отримали достатнього розвитку, тому актуальним є математичне моделювання цих задач з урахуванням їх специфіки.

**Аналіз попередніх досліджень і публікацій.** Як свідчить аналіз літературних джерел, на цей час є багато робіт, спрямованих на побудову математичних моделей і методів розв'язання оптимізаційних задач розміщення двовимірних геометричних об'єктів в ізотропних областях [1 – 3]. Клас задач розміщення геометричних об'єктів в анізотропній області, незважаючи на значну практичну цінність, вивчений у меншому ступені, що обумовлено значною складністю таких задач у постановочному й обчислювальному планах. У роботах [4, 5] виділені властивості області припустимих рішень та конструктивні особливості аналітичного опису геометричних обмежень задачі розміщення багатокутних об'єктів в анізотропній області. В [6] побудовано аналітичний опис геометричних обмежень задачі розміщення багатокутних об'єктів в анізотропній області.

Метою статті є отримання аналітичного опису обмежень взаємного неперетину об'єктів задачі розміщення багатокутників в анізотропній області в полярній системі координат.

### Основний матеріал

**Постановка завдання.** Нехай є двовимірна замкнена неопукла багатокутна область  $R_0$ , задана в полярній системі координат  $\rho\Omega\varphi$  упорядкованим

набором координат вершин  $\{(\rho_0^k, \varphi_0^k)\}, k = \overline{1, K}$ . Область  $R_0$  є анізотропною внаслідок наявності в кожній точці області свого напрямку найменшої тягучості *sregion*. Законом розподілу анізотропії є еліпс напружень, а координати довільної точки області в декартовій системі координат визначаються (рис. 1):

$$x = at \cos \varphi, \quad y = bt \sin \varphi, \quad (1)$$

де  $t$  – коефіцієнт гомотетії;  $a, b$  – довжини півосей базового еліпса [6].

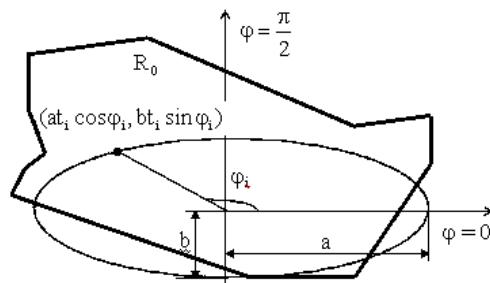


Рис. 1. Область розміщення  $R_0$

Нехай є також скінчений набір опуклих багатокутних об'єктів  $R = \{R_i\}, i = \overline{1, N}$  (рис. 2). У полярній системі координат об'єкт  $R_i$  задається набором  $\{(\rho_i^n, \varphi_i^n)\}, n = \overline{1, n_i}$  координат його вершин у власній полярній системі координат  $\rho_i O_i \varphi_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , де  $\rho_i^n$

– відстань  $i$ -ї вершини багатокутника  $R_i$  від полюса  $O_i$ ;  $\varphi_i^n$  – кут між полярною віссю й променем, що з'єднує полюс  $O_i$  полярної системи координат і  $i$ -ту вершину об'єкта  $R_i$ ,  $O_i \in \text{int } R_i$ .

Для об'єктів відомий набір  $\{(\rho_i^n, \alpha_i^n)\}, n = \overline{1, n_i}$  відстаней  $\rho_i^n$  і кутів  $\alpha_i^n$  між полярною віссю й нормальню до прямої  $\gamma_i^n$ , що містить  $n$ -у сторону бага-

Рис. 2. Об'єкт  $R_i$

токутника  $R_i$  відповідно. При цьому рівняння прямої  $\gamma_i^n$  у власній полярній системі координат  $\rho_i O_i \phi_i$  має вигляд

$$\zeta_i^n \cos(\eta_i^n - \alpha_i^n) = p_i^n, \quad (2)$$

де  $\zeta_i^n, \eta_i^n$  – радіус-вектор та кутовий параметр довільної точки прямої  $\gamma_i^n$  відповідно.

Розміщення об'єкта  $R_i$  визначається параметрами  $(t_i, \phi_i)$ , що задають положення центру власної полярної системи координат  $\rho_i O_i \phi_i$ , причому параметри  $(t_i, \phi_i)$  зв'язані з параметрами трансляції  $v_i = (x_i, y_i)$  полюса  $O_i$  співвідношеннями виду [6]:

$$x_i = at_i \cos \phi_i, \quad y_i = bt_i \sin \phi_i. \quad (3)$$

Властивість анізотропії області  $R_0$  означає, що залежно від координати  $\phi_i$  полюса  $O_i$  об'єкта  $R_i$  змінюється орієнтація власної системи координат  $\rho_i O_i \phi_i$  даного об'єкта.

Необхідно розмістити набір  $R_i, i = \overline{1, N}$  об'єктів без взаємних перетинів в області  $R_0$  так, щоб кількість  $N$  об'єктів розміщення була максимальною.

Геометричні обмеження даної задачі містять обмеження на розміщення об'єктів  $R_i$  в області розміщення  $R_0$ :

$$R_i \subset R_0, \quad i = \overline{1, N} \quad (4)$$

і умови взаємного неперетину об'єктів  $(R_i, R_j)$ :

$$\text{int } R_i \cap \text{int } R_j = \emptyset, \quad i, j = \overline{1, N}, i \neq j. \quad (5)$$

Аналітичний опис умов (3) у полярній системі координат побудовано в [6]. Розглянемо умову взаємного неперетину пари об'єктів (5).

**Формалізація умов взаємного неперетину об'єктів.** Умова взаємного неперетину пари об'єктів  $(R_i, R_j)$  геометрично представляє нелінійну поверхню  $\Gamma^4(\rho_i, \phi_i, \rho_j, \phi_j) \subset E^4$ . Побудуємо рівняння даної поверхні залежно від типу торкання об'єктів [6].

**Торкання I типу.** Розглянемо торкання типу: «вершина  $(\rho_j^n, \phi_j^n)$  об'єкта  $R_j$  – сторона  $\zeta_i^n \cos(\eta_i^n - \alpha_i^n) = p_i^n$  об'єкта  $R_i$ ».

**Твердження 1.** Умова торкання I типу має вигляд:

$$\rho_j \cos(\phi_j - \phi_i - \alpha_i^n) = \rho_i \cos \alpha_i^n + p_i^n + \rho_j^n \cos(\phi_j^n + \phi_j - \phi_i - \alpha_i^n), \quad (6)$$

де  $\alpha_i^n, p_i^n, \rho_j^n, \phi_j^n$  – константи.

**Доведення.** Розглянемо деяку точку  $(\rho_i, \phi_i, \rho_j, \phi_j) \in \Gamma^4$  (рис. 3), яка задає певне розміщення об'єктів  $R_i$  та  $R_j$ , за якого об'єкти торкаються.

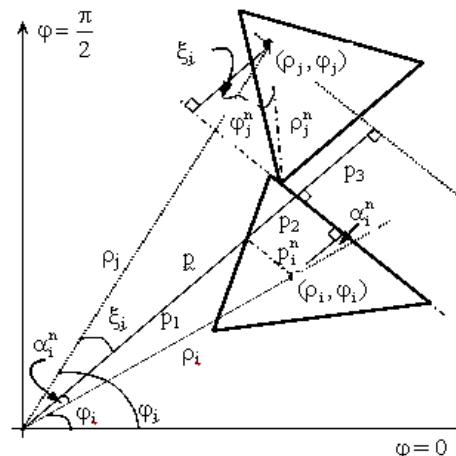


Рис. 3. Торкання I-го типу об'єктів  $R_i$  та  $R_j$

Припустимо, що параметри  $(\rho_i, \phi_i)$  об'єкта  $R_i$  є фіксованими. Тоді рівняння торкання I-го типу на основі Твердження 1 [6] (без урахування анізотропії області розміщення) має вигляд

$$\rho_j \cos(\phi_j - \alpha_i^n) = p, \quad (7)$$

де напрям  $p$  – нормаль до прямої  $\Gamma^2$ , яка є паралельною стороні  $\zeta_i^n \cos(\eta_i^n - \alpha_i^n) = p_i^n$  об'єкта  $R_i$ , і містить полюс об'єкта  $R_j$  за умови торкання – збігається з напрямом  $p_i^n$ .

Нормаль  $p$  є такою:

$$p = p_1 + p_2 + p_3,$$

$p_1 = \rho_i \cos \alpha_i^n$  – постійна величина;

$p_2 = \rho_j^n$  – постійна величина;

$p_3(\phi_j) = \rho_j^n \cos(\xi_j + \phi_j^n)$  – перемінна величина;

де  $\xi_j = \phi_j - \phi_i - \alpha_i^n$  – кут між нормальню  $p$  та радіус-вектором  $\rho_j$ .

Отже,  $p_3(\phi_j) = \rho_j^n \cos(\phi_j^n + \phi_j - \phi_i - \alpha_i^n)$ .

У загальному випадку параметри  $(\rho_i, \phi_i)$  об'єкта  $R_i$  є змінними, тому ліва та права частини рівняння (7) ускладнюються, стаючи також функціями кутового параметра  $\phi_i$ . При цьому складова  $p_1 = \rho_i \cos \alpha_i^n$  правої частини рівняння також стає змінною величиною завдяки параметру  $\rho_i$ .

У підсумку умова торкання першого типу має вигляд:

$$\rho_j \cos(\phi_j - \phi_i - \alpha_i^n) = \rho_i \cos \alpha_i^n + p_i^n + \rho_j^n \cos(\phi_j^n + \phi_j - \phi_i - \alpha_i^n).$$

**Торкання II типу.** Розглянемо торкання типу: «вершина  $(\rho_i^n, \phi_i^n)$  об'єкта  $R_i$  – сторона  $\zeta_j^n \cos(\eta_j^n - \alpha_j^n) = p_j^n$  об'єкта  $R_j$ » (рис. 4).

**Твердження 2.** Умова торкання II типу має вигляд:

$$\rho_j \cos(\alpha_j^n) = \rho_i \cos(\phi_i - \phi_j - \alpha_j^n) + p_i^n + \rho_i^n \cos(\phi_j - \phi_i + \phi_i^n + \alpha_i^n) + p_j^n. \quad (8)$$

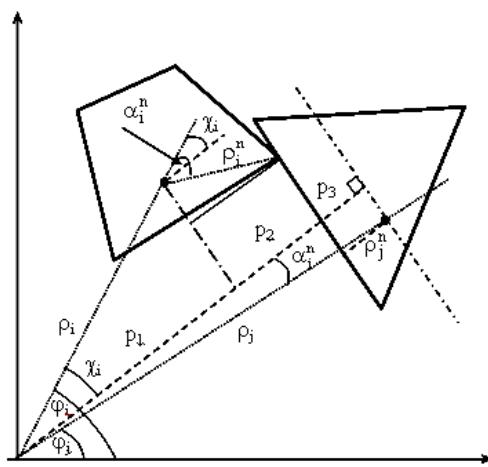


Рис. 4. Умова торкання II типу

**Доведення.** Аналогічно доведенню Твердження 1 припустимо, що параметри  $(\rho_i, \phi_i)$  об'єкта  $R_i$  є фіксованими.

При незмінній орієнтації системи  $\rho_j O_j \phi_j$  умова торкання має вигляд (рис. 4):

$$\rho_j \cos(\phi_j - \alpha_j^n) = p_j^n, \quad (9)$$

де напрям  $p$  ( $p$  – нормаль до прямої  $\Gamma^2$ , яка є паралельною стороні  $\zeta_j^n \cos(\eta_j^n - \alpha_j^n) = p_j^n$  об'єкта  $R_j$  і містить полюс об'єкта  $R_j$  за умови торкання) збігається з напрямом  $p_j^n$ .

Довжина нормалі  $p$  є сумою трьох доданків:

$$p = p_1 + p_2 + p_3,$$

$p_1 = \rho_i \cos \chi_i$ , де  $\chi_i = \phi_i - \phi_j - \alpha_j^n$  – кут між нормальню  $p$  та радіус-вектором  $\rho_i$ ;

$p_2 = \rho_i^n \cos(-\chi_i + \phi_i^n)$ , тобто, враховуючи  $\chi_i$ ,

$$p_2 = \rho_i^n \cos(\phi_i^n + \phi_j - \phi_i - \alpha_i^n);$$

$$p_3 = p_j^n – постійна величина.$$

Отже, нормаль  $p$  у загальному випадку є функцією параметрів розміщення пари об'єктів,  $R_i$  та  $R_j$ , що розглядаються.

Проведемо аналіз лівої частини рівняння (9), беручи до уваги властивість анізотропії області  $R_0$ . Параметри  $\rho_j, \phi_j$  задають положення полюса об'єкту  $R_j$ , причому кут  $\phi_j$  визначає орієнтацію власної системи координат об'єкта  $R_j$ , що спричиняє відповідне перевизначення кута  $\alpha_j^n$  як кута між полярною віссю загальної системи координат та напрямом  $p$ , який збігається з напрямом  $p_j^n$ . Отже, при кожному значенні куту повороту  $\phi_j$   $\alpha_j^n = \alpha_j^n + \phi_j$ . Таким чином, ліва частина рівняння (9) приймає вигляд  $\rho_j \cos(\alpha_j^n)$ .

Отже, умова торкання II типу має вигляд (6). Аналіз отриманих залежностей на множині діапазо-

нів можливих значень кутів (ця множина є скінченою) дозволив сформулювати таке

**Твердження 3.** Умови (5), (6), (7), (8) мають місце при всіх можливих значеннях кутів  $\alpha_i^n, \phi_i^n, \alpha_j^n, \phi_j^n$ .

**Приклад.** На закінчення побудуємо систему рівнянь, що описує точку  $(\rho_i, \phi_i, \rho_j, \phi_j) \in \Gamma^4$ , зображену на рис. 5.

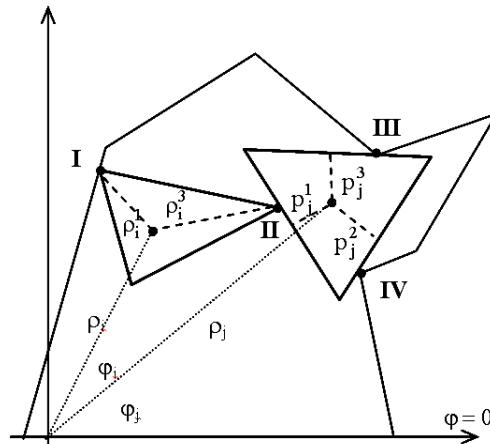


Рис. 5. Розміщення об'єктів

На рис. 5 римськими цифрами позначені торкання об'єктів області та між собою. Об'єкти  $R_i$  та  $R_j$  задаються такими параметрами (табл. 1):

Таблиця 1  
Параметри об'єктів

n	$R_i$				$R_j$			
	$\rho_i^n$	$\phi_i^n$	$p_i^n$	$\alpha_i^n$	$\rho_j^n$	$\phi_j^n$	$p_j^n$	$\alpha_j^n$
1	5	1,33	1,79	2,54	6,4	2,46	2,68	0,13
2	3,16	-2,76	2,1	-1,21	6	-1,57	2,68	-1,06
3	6,08	-0,71	2,84	0,37	6,4	0,67	4	0,97

Область  $R_0$  задається такими параметрами (вказані тільки необхідні) (табл. 2):

Таблиця 2  
Параметри області

	Опис елемента		
I	$\rho \cos(\phi - \alpha_0^1) = p_0^1$	2,68	0,89
III	$(\rho_0^4, \phi_0^4)$	27,02	0,68
IV	$(\rho_0^6, \phi_0^6)$	21,93	0,42

**I** – Торкання області I типу «Вершина  $(\rho_i^1, \phi_i^1)$  об'єкту  $R_i$  – сторона  $\rho \cos(\phi - \alpha_0^1) = p_0^1$  області  $R_0$ ». У нашому випадку  $(\rho_i^1, \phi_i^1) = (5; 1,34)$ ,

$$\rho \cos(\phi - \alpha_0^1) = p_0^1 \Leftrightarrow \rho \cos(\phi - 2,68) = 0,894.$$

Згідно Твердження 1 [6] аналогічний опис торкання області I типу має вигляд:

$$\rho_i \cos(\phi_i - \alpha_0^1) = p_0^1 - \rho_i^1 \cos(\phi_i^1 - \alpha_0^1 + \phi_i).$$

Тому  $\rho_i \cos(\varphi_i - 2,68) = 0,894 - 5 \cos(1,34 - 2,68 + \varphi_i)$   
або  $\rho_i \cos(\varphi_i - 2,68) = 0,894 - 5 \cos(-1,34 + \varphi_i)$ .

**ІІ – Умова взаємного неперетину об'єктів – торкання ІІ типу «Вершина ( $\rho_i^3, \alpha_i^3$ ) об'єкта  $R_i$  – сторона  $\zeta_j^1 \cos(\eta_j^1 - \alpha_j^1) = p_j^1$  об'єкта  $R_j$ », а точніше «вершина (6,08; -0,711) об'єкта  $R_i$  – сторона  $\zeta_j^1 \cos(\eta_j^1 - 0,13) = 2,68$  об'єкта  $R_j$ » згідно Твердження 2 поточної статті має вигляд:**

$$\begin{aligned} \rho_j \cos \alpha_j^1 &= \rho_i \cos(\varphi_i - \varphi_j - \alpha_j^1) + \\ &+ \rho_i^3 \cos(\varphi_j - \varphi_i + \varphi_i^3 + \alpha_j^1) + p_j^1. \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \rho_j \cos \alpha_j^1 &= \rho_i \cos(\varphi_i - \varphi_j - \alpha_j^1) + \\ &+ \rho_i^3 \cos(\varphi_j - \varphi_i + \varphi_i^3 + \alpha_j^1) + p_j^1. \end{aligned}$$

**ІІІ Торкання об'єкта  $R_j$  та області  $R_0$  ІІ типу:**  
«Вершина ( $\rho_0^4, \varphi_0^4$ ) області  $R_0$  – сторона  $\rho \cos(\varphi - \alpha_j^3) = p_j^3$  об'єкта  $R_j$ » згідно Твердження 2 [6] має вигляд:

$$\begin{aligned} \rho_0^4 \cos(\varphi_0^4 - \alpha_j^3 - \varphi_j) &= \rho_j \cos \alpha_j^4 + p_j^4 \leftrightarrow \\ 27,02 \cos(0,68 - 0,97 - \varphi_j) &= \rho_j \cos(0,97) + 4. \end{aligned}$$

**ІV Торкання об'єкта  $R_j$  та  $R_0$  області ІІ типу:**  
«Вершина ( $\rho_0^6, \varphi_0^6$ ) області  $R_0$  – сторона  $\rho \cos(\varphi - \alpha_j^2) = p_j^2$  об'єкта  $R_j$ » згідно Твердження 2 [6] має вигляд:

$$\begin{aligned} \rho_0^4 \cos(\varphi_0^4 - \alpha_j^2 - \varphi_j) &= \rho_j \cos \alpha_j^2 + p_j^2 \leftrightarrow \\ 21,93 \cos(1,48 - \varphi_i) &= 0,48 \rho_i + 2,68. \end{aligned}$$

Система рівнянь, яка визначає точку  $(\rho_i, \varphi_i, \rho_j, \varphi_j)$ , що розглядається, має вигляд:

$$\begin{cases} \rho_i \cos(\varphi_i - \alpha_0^1) = p_0^1 - \rho_i^1 \cos(\varphi_i^1 - \alpha_0^1 + \varphi_i); \\ \rho_j \cos \alpha_j^1 = \rho_i \cos(\varphi_i - \varphi_j - \alpha_j^1) + \\ + \rho_i^3 \cos(\alpha_i^3 - \varphi_j - \alpha_j^1 + \varphi_i) + p_j^1; \\ \rho_0^3 \cos(\varphi_0^3 - \alpha_j^3 - \varphi_j) = \rho_j \cos \alpha_j^3 + p_j^3; \\ \rho_0^4 \cos(\varphi_0^4 - \alpha_j^2 - \varphi_j) = \rho_j \cos \alpha_j^2 + p_j^2, \end{cases}$$

або

## ФОРМАЛИЗАЦИЯ УСЛОВИЙ ВЗАЙМОНОГУГОЛЬНИКОВ В АНІЗОТРОПНОЙ ОБЛАСТИ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

І.А. Чуб, М.В. Новожилова

Приведены результаты построения аналитического описания геометрических ограничений взаимного непересечения объектов задачи размещения многоугольников в анизотропной области в полярной системе координат.

**Ключевые слова:** оптимальное деление, взаимное непересечение, многоугольник, анизотропная область.

## THE FORMALIZATION OF THE CONDITIONS OF MUTUAL NONINTERSECTION FACILITIES LOCATION PROBLEM OF POLYGONS IN THE ANISOTROPIC FIELD IN THE POLAR COORDINATE SYSTEM

I.A. Chub, M.V. Novozhilova

The results of constructing an analytic description of geometric constraint mutual nonintersection facilities location problem of polygons in the anisotropic field in the polar coordinate system is offered.

**Keywords:** optimum division, mutual uncrossing, polygons, anisotropic area.

$$\begin{cases} \rho_i \cos(\varphi_i - 2,68) = 0,894 - 5 \cos(\varphi_i - 1,34); \\ 0,136 \rho_j = \rho_i \cos(\varphi_i - \varphi_j - 0,136) + \\ + 6,08 \cos(\varphi_i - \varphi_j + 0,247) + 2,68; \\ 27,02 \cos(-0,29 - \varphi_j) = 0,56 \rho_j + 4; \\ 21,93 \cos(1,48 - \varphi_j) = 0,48 \rho_j + 2,68. \end{cases}$$

Розв'язком побудованої системи є вектор  $(\rho_i, \varphi_i, \rho_j, \varphi_j) = (15,62; 0,8761; 23,02; 0,6001)$ .

## Висновки та напрями подальших досліджень

Розроблений аналітичний опис геометричних обмежень взаємного неперетину об'єктів задачі розміщення багатокутних об'єктів в анізотропній області в полярній системі координат є базою для розробки алгоритмічного й спеціалізованого програмного забезпечення розв'язання задач цього класу.

## Список літератури

1. Стоян Ю.Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев. – К.: Наук. думка, 1986. – 268 с.
2. Milenovic V. Placement and compaction of nonconvex polygons for clothing manufacture / V. Milenovic, K. Daniels, Z. Li // 4-th Canadian Conf. On CG, St. John's, 1992.
3. Stoyan Yu.G. Mathematical model and method of searching for a local extremum for the non-convex oriented polygons allocation problem / Yu.G. Stoyan, M.V. Novozhilova, A.V. Kartashov // European Journal of Operation Research. – 1996. – № 92. – Р. 193-210.
4. Новожилова М.В. Комп'ютерне моделювання умов неперетину в завданнях розміщення в анізотропній області / М.В. Новожилова, Є.А. Астахов // Системи обробки інформації. – 2003. – № 6. – Р. 138-143.
5. Чуб I.A. Конструктивні особливості задачі розміщення геометричних об'єктів в анізотропній області / I.A. Чуб // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2008. – Вип. 80. – С. 139-143.
6. Чуб I.A. Аналітичний опис геометричних обмежень задачі розміщення багатокутних об'єктів в анізотропній області в полярній системі координат / I.A. Чуб, М.В. Новожилова // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Х.: ХДУХТ, 2010. – Вип. 26. – С. 47-52.

Надійшла до редколегії 1.12.2009

**Рецензент:** д-р фіз.-мат. наук, проф. Н.Д. Сизова, Харківський технічний університет будівництва та архітектури, Харків.