УДК 519.6:621.391.26

И.Г. Кириллов, С.И. Бурковский

Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков

МИНИМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ СИСТЕМ С ОЦЕНОЧНЫМИ КОРРЕЛЯЦИОННЫМИ МАТРИЦАМИ НЕПОЛНОГО ЭФФЕКТИВНОГО РАНГА

Обсуждены особенности определения эффективного ранга оценочных корреляционных матриц (КМ) численными методами на основе обобщенной факторизации Левинсона. Обоснована возможность сокращения вычислений при решении систем с матрицами неполного эффективного ранга и повышения качества пространственно-временной обработки сигналов на фоне помех при малой «обучающей» выборке. Приведены результаты сравнительного анализа вычислительных затрат при решении систем с симметричными КМ неполного эффективного ранга методом треугольного разложения Холецкого и усовершенствованным алгоритмом на основе решетчатых фильтров.

Ключевые слова: *пространственно-временная обработка, эффективный ранг, собственное значение, система линейных уравнений, максимально правдоподобный, корреляционная матрица, амплитудно-фазовое распределение, обобщенная факторизация, решетчатый фильтр.*

Введение

Постановка проблемы и анализ литературы. Обзорные РЛС, входящие в состав подсистем управления воздушным движением общего и военного назначения, для обеспечения безопасности полетов должны обнаруживать и стойко сопровождать воздушные объекты в условиях любой помеховой обстановки и возможного отказа бортовых систем активного запроса / ответа. Предельные вероятности обнаружения таких объектов достижимы за счет использования оптимальных методов пространственно-временной обработки сигналов (ПВОС) на фоне помех [1].

Эти методы основываются на применении сложного (с точки зрения требуемого объема вычислений) для реализации в условиях временных ограничений математического аппарата матричной линейной алгебры, статистических решений и распознавания «образов». Поэтому по-прежнему актуальной является задача сокращения вычислительных затрат при реализации оптимальной (или близкой к ней по эффективности) обработки радиолокационной информации в АСУ специального назначения.

Как показано, в частности, в [2] процедуры оптимальной ПВОС на фоне гауссовых помех требуют отыскания различных функций, прежде всего квадратичных и билинейных форм, от матриц, обратных корреляционным матрицам (КМ) помех. Их поиск может быть сведен к решению систем линейных уравнений с оценочными M-мерными КМ $\hat{\mathbf{\Phi}}$. В качестве матриц $\hat{\mathbf{\Phi}}$ используются максимально правдоподобные (МП) оценки [3] для КМ общего вида –

$$\hat{\mathbf{\Phi}} = \mathrm{K}^{-1}\mathbf{A}\,,\quad \mathbf{A}=\mathbf{Y}\cdot\mathbf{Y}^{*}=\sum_{i=1}^{K}\mathbf{Y}_i\cdot\mathbf{Y}_i^{*} \qquad (1)$$

и для персимметричной КМ –

$$\hat{\mathbf{\Phi}}_{\Pi} = \mathrm{K}^{-1}\mathbf{A}_{\Pi}\,,\quad \mathbf{A}_{\Pi}=1/2\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{\Pi}\,\mathbf{A}^{\sim}\mathbf{\Pi}\,)\,, \qquad (2)$$

где $\mathbf{\Pi}$ – $M\times M$ ортогональная матрица перестановок с единицами на побочной диагонали; K – объем «обучающей» выборки; (*), (~) – символы эрмитового и комплексного сопряжения.

Ранг r оценочных матриц $\hat{\mathbf{\Phi}}$ независимо от истинного ранга априори неизвестных «точных» КМ $\mathbf{\Phi}$, который часто оказывается меньшим их размерности, равен M, что обусловлено, в частности, наличием шумов каналов приема и дискретизации аналоговых сигналов, ошибками измерений и вычислений на предыдущих этапах обработки.

Таким образом в ряде важных практических случаев матрицы $\hat{\mathbf{\Phi}}$ имеют неполный, так называемый, «эффективный» ранг $r_e < M$.

Знание эффективного ранга r_e матрицы системы имеет не только теоретическое, но и важное практическое значение. Оно используется при оценке числа независимых точечных источников внешних помех, числа гармонических составляющих в спектрах сигналов и, кроме того, позволяет избежать неоправданного роста ошибок вычислений при отыскании различных функций от оценочных КМ при организации ПВОС.

Статья посвящена обоснованию способа сокращения вычислительных затрат при реализации процедур оптимальной пространственно-временной обработки сигналов на фоне помех за счет учета неполного «эффективного» ранга оценочных КМ, позволяющего для выбранного показателя качества улучшить качество обработки в условиях обучающей выборки малого объема.

Основная часть

1. Способы определения эффективного ранга корреляционной матрицы. Под эффективным рангом r_e корреляционной матрицы полного ранга ($r = M$), как правило, понимается максимальный порядок «хорошо обусловленной» главной подматрицы КМ или ее оценки. Степень обусловленности такой подматрицы обычно определяется отношением ее максимального и минимального собственных значений (СЗ) и тем хуже, чем это отношение больше [1]. При этом ($M - r_e$) минимальных собственных значений считаются «шумовыми».

А. Определение эффективного ранга по спектру корреляционной матрицы. Оценка эффективного ранга КМ $\mathbf{\Phi}$ помех обычно сводится к отысканию спектра таких матриц с последующим отбрасыванием собственных значений, близких к нулю. В [4] предложен критерий, предполагающий сравнение с порогом γ, выбираемым обычно из интервала $\gamma = 0.01 \ldots 0.05$, параметра δ_i вида

$$\delta_i = \mathrm{sp}\,\mathbf{\Phi} - \sum_{j=1}^{i} \lambda_j \Big/ \mathrm{sp}\,\mathbf{\Phi}, \qquad (3)$$

где $\mathrm{sp}\,\mathbf{\Phi}$ – след матрицы $\mathbf{\Phi}$.

Эффективный ранг r_e КМ считается равным i ($i \in 1, M-1$), если $\delta_i \le \gamma$ (при этом $\delta_{i-1} > \gamma$), т.е. ($M - i$) минимальных собственных значений и соответствующие им собственные векторы признаются неинформативными (шумовыми). В противном случае эффективный ранг КМ помех считается равным M.

Однако известным процедурам отыскания полного набора собственных значений и соответствующих им собственных векторов свойственны большие объемы вычислений [5]. Кроме того, для вычисления различных достаточных статистик при оптимальной обработке сигналов такие процедуры не используются и требуются только для оценки эффективного ранга КМ.

Поэтому практический интерес представляют методы оценки эффективного ранга КМ, не связанные с вычислением собственных значений и соответствующих им собственных векторов.

Б. Определение эффективного ранга без вычисления спектра корреляционной матрицы. Идея определения эффективного ранга корреляционной матрицы без вычисления ее СЗ (предложена в [6]) базируется на том, что для КМ, ранг r которой меньше ее порядка M, детерминант любой из главных подматриц $\mathbf{\Phi}^{(r+1)}(1)$ ($r+1$)-го порядка равен нулю.

Достаточно легко контролировать величину детерминантов главных подматриц $\mathbf{\Phi}^{(r+1)}(1)$ позволяют численные методы решения задач линейной алгебры, в том числе и систем с КМ $\hat{\mathbf{\Phi}}$ (или $\mathbf{\Phi}$) на основе обобщенной факторизации Левинсона (ОФЛ) [7]. Привлекательность этих методов состоит еще и в простоте учета возможной специфики КМ (персимметрии, теплицевости и т.д.), которая часто встречается на практике. Они эффективны не только с точки зрения минимизации вычислительных затрат, но и простоты организации параллельных вычислений, особенно, когда требуется не формирование самих матриц Ψ, обратных КМ, а – отыскание различных функций от них. При этом оказывается возможным ограничиться нахождением некоторого числа параметров (коэффициентов нормирования $s_m(1)$ и частных коэффициентов корреляции $\alpha_m(1)_m$) слабо заполненных матриц-сомножителей факторизованного представления матрицы Ψ. Причем число этих параметров существенно уменьшается с «наращиванием» специфики исходных КМ, что показано в [2, 7].

ОФЛ основана на использовании специальной факторизации матрицы Ψ, которая задает верхне-нижнее и нижне-верхнее ее разложения вида [7]

$$\Psi = \mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^*, \qquad (4)$$

где $\mathbf{H} = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^{M}$, $\mathbf{N} = \{n_{ij}\}_{i,j=1}^{M}$ – нижние треугольные матрицы. Вычислительные структуры, реализующие такую факторизацию, в литературе называются решетчатыми фильтрами (РФ).

Решение задач линейной алгебры методами решетчатой фильтрации, в том числе и отыскание различных функций от матриц Ψ, $\mathbf{H}$, $\mathbf{N}$, осуществляется в два этапа [2]. На первом этапе формируются параметры $s_m(1)$ и $\alpha_m(1)$ решетчатого фильтра. Процедуры их вычисления (в случае оценочных матриц $\hat{\mathbf{\Phi}}$ – «оценивания») обычно называют «настройкой» РФ, а алгоритмы, лежащие в основе, – методами настройки. Результатом настройки РФ является задание факторизованного представления матрицы Ψ и ее треугольных сомножителей $\mathbf{H}$, $\mathbf{N}$ (4). Второй этап состоит собственно в решении требуемых задач линейной алгебры, в том числе и систем линейных уравнений.

Определение эффективного ранга КМ методами решетчатой фильтрации. Если $r < M$ – ранг КМ, то в условиях ОФЛ справедливо равенство $|\alpha_{r+1}(1)|^2 = 1$, так как $\det \mathbf{\Phi}^{(r+1)}(1) \equiv 1 - |\alpha_{r+1}(1)|^2$ [8]. Следовательно, если эффективный ранг r_e КМ меньше ее порядка M, то значения $|\alpha_{r_e+1}(1)|^2$ ($1 \in 1, M - r_e$) близки к единице. В этом случае оценка $\hat{r}_e$ эффективного ранга КМ определяется номером m ступени РФ, для которой выполняется условие

$$C_m \le \gamma_r\,,\quad C_m = \frac{\sum\limits_{l=1}^{M+1-m} C_m(l)}{M+1-m}\,, \qquad (5)$$

где γ_r – параметр, играющий роль порога и определяемый требуемыми вероятностями правильного и ошибочного распознавания эффективного ранга, оценка которого равна $\hat{r}_e = m-1$ при истинности (5), $C_m(l) = 1-|\alpha_m(l)|^2$ $(m \in 2, M\,;\ l \in 1, M-m+1)$.

Важно при этом отметить, что рассмотренный подход не требует не только отыскания СЗ КМ **Ф**, но и вообще каких-либо дополнительных вычислений, поскольку может быть осуществлен в процессе настройки РФ «контролем» величин частных коэффициентов корреляции $\alpha_m(l)$.

Такой способ при «точных» (известных) КМ **Ф** позволяет точно определить истинный ранг КМ. Для матриц полного ранга с эффективным рангом меньше их порядка значения $|\alpha_{r_e+1}(l)|^2$, как было уже отмечено, близки к единице. Степень близости таких значений к единице, а параметра C_{r_e+1} (5) к нулю, зависит от особенностей исходных матриц. В связи с этим установить однозначную аналитическую связь между уровнем порога γ_r и самим эффективным рангом r_e КМ весьма сложно, особенно в условиях ограниченности объема «обучающей» выборки.

Модель КМ при обосновании порога для определения эффективного ранга. В качестве модели КМ в [6] использовалась матрица вида [9]

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{I}_M\,,\quad \mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{F}\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{F}^*, \qquad (6)$$

где $\mathbf{F} = \{f_{il}\}_{i=1,l=1}^{M\ \ r}$ – $(M\times r)$-матрица, описывающая, в частности, КМ помех на выходах M пространственных каналов приема, создаваемых r точечными независимыми источниками помех (в этом случае l-й ($l \in 1, r$) столбец матрицы $\mathbf{F}$ описывает амплитудно-фазовое распределение (АФР), создаваемое l-м точечным источником помех на выходах M пространственных каналов приема) вида

$$f_{il} = \exp\left(j\cdot(i-1)\cdot\pi\cdot\sin Q_l\right);\ i \in 1, M\,;\ l \in 1, r\,, \qquad (7)$$

что соответствует случаю M – элементной эквидистантной антенной решетки (АР) при условии $d/\lambda = 0{,}5$, где d – расстояние между соседними элементами АР, λ – длина волны, Q_l – угловое положение l-го источника (в градусах) относительно нормали к АР (равномерно распределено на интервале $[-89°, 89°]$);

$\mathbf{G} = \{g_l\}_{l=1}^{r}$ – диагональная $(r\times r)$ матрица спектральных плотностей мощности r точечных независимых источников помех с элементами g_l вида

$$g_l = \eta\cdot\xi_l \Big/ \sum_{l=1}^{r}\xi_l\,, \qquad (8)$$

ξ_l – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[0, 1]$, а η – заданное отношение «помеха / шум» в суммарном канале;

$\mathbf{I}_M$ – $(M\times M)$- матрица спектральных плотностей мощности некоррелированных гауссовых шумов каналов приема единичной дисперсии.

При $r < M$ эффективный ранг КМ **Ф** вида (6) отождествляется с числом r линейно независимых столбцов матрицы $\mathbf{F}$. Линейная независимость столбцов последней обеспечивается различием угловых координат r источников, что определяет удобство ее использования в качестве модельной. Такая КМ **Ф** не вырождена (полного ранга – $\mathrm{rang}\mathbf{\Phi} = M$), а ее эффективный ранг при $g_l > 0$ и $r < M$ равен r. Очевидно, что при малых интенсивностях g_l выявление числа r затруднительно. Показателем качества способа можно считать уровень η интенсивности помех, начиная с которого эффективный ранг КМ определяется с вероятностью не ниже требуемой.

Эксперимент с заданной КМ **Ф** вида (6) определяет работоспособность способа, условия его применимости и показатели качества. Реально же элементы КМ априори неизвестны и обычно используются их оценки $\hat{\mathbf{\Phi}}$ вида (1) или (2), формируемые по обучающей выборке $\mathbf{Y}$ конечного объема K. Поэтому определение эффективного ранга таких оценок КМ представляет самостоятельный интерес особенно в условиях выборок конечного объема.

Обучающие векторы $\mathbf{Y}_i$ в (1), (2) моделировались по известной методике [10] и имели вид

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{T}\cdot\xi\,, \qquad (9)$$

где $\mathbf{T}$ – первый сомножитель (обычно треугольный) в разложении вида $\mathbf{\Phi} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^*$; ξ – M-мерный случайный вектор, состоящий из независимых (некоррелированных) нормальных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией.

В [6] показано, что способ (3), основанный на вычислении спектра КМ, для фиксации уровня «ложных тревог» требует использования различных порогов, например, $\eta \approx 10^{-2}$ для $r_e = 1$ и $\eta \approx 10^{-4}$ для $r_e = 3$ и т.д. Это вызывает существенные трудности в случае априори неизвестного эффективного ранга КМ.

Предложенный в [6] способ на основе РФ (5) лишен этого недостатка и для интенсивностей точечных источников помех $\eta \ge 30$ дБ в суммарном канале становится практически приемлем (при выборе порога $\eta \approx 10^{-2}$, обеспечивающего вероятность «ложной тревоги» $q \le 0{,}05$, вероятность правильного определения ЭР превышает $p \ge 0{,}7$). В то же время этот способ с точки зрения вычислительных затрат существенно проще. Так для настройки РФ по заданной КМ требуется всего $M^3/3$ операций комплексного умножения в главном члене вместо $7...10 \cdot M^3$ [5], необходимых для вычисления собственных значений и векторов, т.е. в 21…30 раз меньше.

Особенности настройки решетчатого фильтра по КМ неполного ранга. При вырожденной КМ помех, истинный ранг r которой меньше M, все главные миноры $\mathbf{\Phi}^{(m)}(l)$ ($l \in 1, M-m+1$) порядка $m \geq r+1$ равны нулю, поэтому при «точных» вычислениях, как было показано выше, справедливо равенство $|\alpha_m(l)|^2 = 1$ и дальнейшее продолжение рекурсии по m невозможно [7]. При реальных вычислениях рекурсии иногда могут быть продолжены, однако все последующие результаты порождаются ошибками вычислений.

Отсюда следует, что при использовании РФ (ОФЛ) в случае $r < M$ необходимо ограничиться вычислениями в $m \leq r$ ступенях обработки. «Продолжение» расчетов при $m > r$ в принципе возможно при наличии априорной информации о законе изменения параметров $\alpha_m(l)$ с ростом m. В типичных случаях отсутствия такой информации возможный вариант «продолжения» заключается в назначении $\alpha_m(l) = 0$, $s_m(l) = 1$ при $m > r$ (оценка параметров в ступенях $m > r$ не требуется, что экономит вычисления). Матрицы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{N}$ в этом случае аппроксимируются ленточными $\mathbf{H}_a$ и $\mathbf{N}_a$ с шириной ленты r [11], а определяемая ими матрица

$$\Psi_a = \mathbf{H}_a^* \cdot \mathbf{H}_a = \mathbf{N}_a \cdot \mathbf{N}_a^* - \qquad (10)$$

ленточной с шириной ленты ($2r-1$). Эта аппроксимация обеспечивает положительную определенность матрицы Ψ_a и соответствующей ей $\mathbf{\Phi}_a = \Psi_a^{-1}$. Такое «продолжение» моделирует процесс авторегрессии r-го порядка, что обеспечивает наиболее случайное доопределение КМ, являющееся наилучшим в случае отсутствия априорной информации для аппроксимации [12].

Рассмотренные выше особенности настройки РФ по КМ неполного ранга являются предпосылками для дополнительного сокращения объема вычислений при решении задач пространственно-временной обработки сигналов на фоне помех с использованием методов на основе ОФЛ. Обоснованию возможности такого сокращения посвящено дальнейшее рассмотрение.

2. Модифицированные алгоритмы пространственно-временной обработки сигналов на фоне помех с КМ неполного эффективного ранга на основе решетчатых фильтров.

А. Обоснование выбора числа «рабочих» ступеней решетчатого фильтра. Обсужденное в п.**1.Б** «продолжение» вычислений методами решетчатой фильтрации при решении задач ПВОС на фоне помех с КМ $\mathbf{\Phi}$ неполного ранга ($r < M$) в принципе возможно и для оценочных матриц $\hat{\mathbf{\Phi}}$ ($r = M$) неполного эффективного ранга ($r_e < M$). Обоснование такой возможности проведено методом математического моделирования.

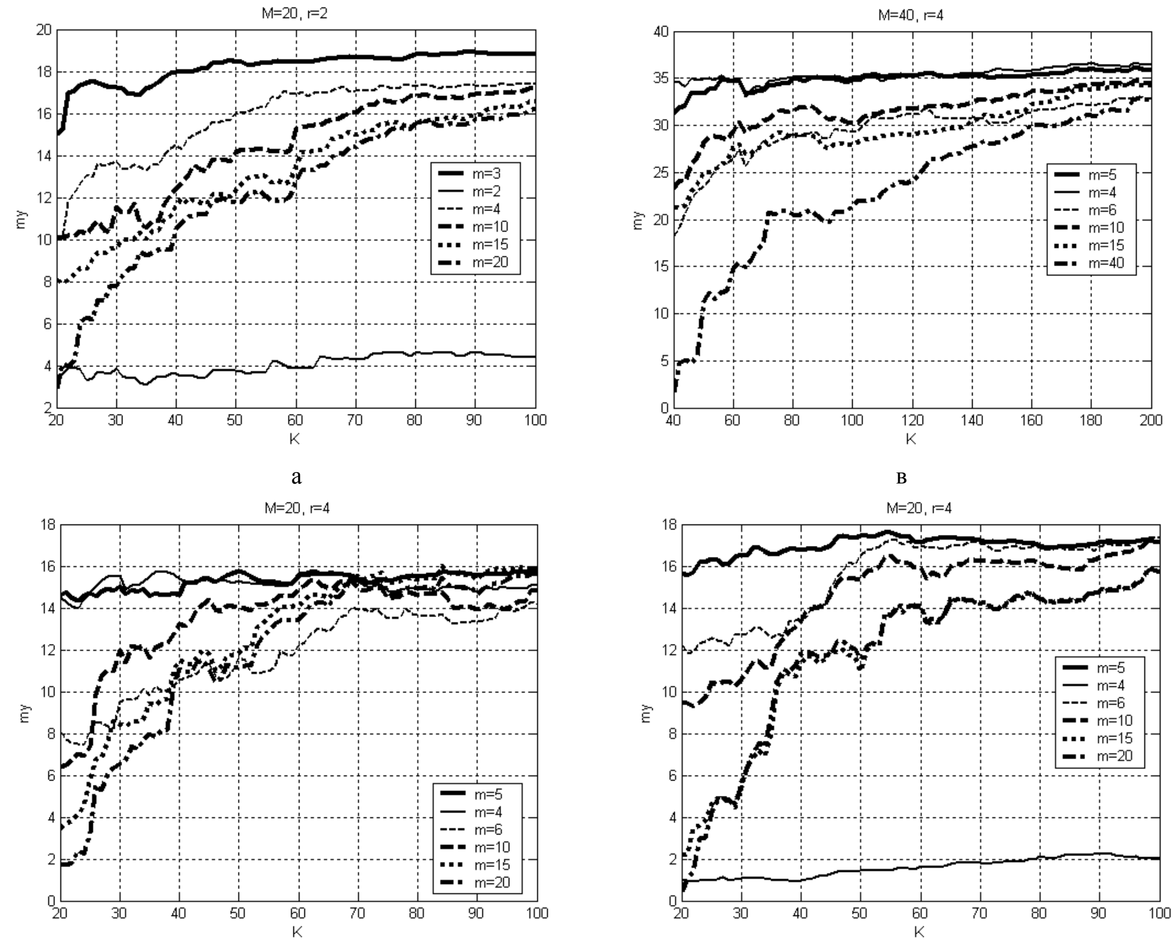
В качестве показателя качества, характеризующего эффективность пространственно-временной обработки, взята тестовая зависимость от объема K «обучающей» выборки выходного отношения «сигнал / помеха+шум» $\mu(K)$ вида [9]

$$\mu(K) = \frac{\left|\hat{\mathbf{R}}^*(K) \cdot \mathbf{X}\right|^2}{\hat{\mathbf{R}}^*(K) \cdot \mathbf{\Phi} \cdot \hat{\mathbf{R}}(K)}, \qquad (11)$$

где $\mathbf{\Phi}$ – $M \times M$ - мерная тестовая КМ собственных шумов и внешних излучений на выходах M каналов приема вида (6), которая описывается нормированной матрицей АФР $\mathbf{F}$, создаваемых r точечными независимыми источниками помех с относительными мощностями g_l (8), задающих фиксированное отношение «помеха / шум» $\eta = 30$ дБ в суммарном канале; $\hat{\mathbf{R}}(K) = \hat{\Psi}(K) \cdot \mathbf{X}$ – M - мерный весовой вектор; $\mathbf{X} = \{x_i\}_{i=1}^{M}$ – M - мерный вектор-столбец опорного (ожидаемого) сигнала, при $x_i = 1$ соответствующий случаю источника единичной мощности, действующего по направлению нормали к АР; $\hat{\Psi}(K) = \hat{\mathbf{\Phi}}^{-1}(K)$ – $M \times M$ - мерная матрица, обратная оценочной КМ $\hat{\mathbf{\Phi}}(K)$ (1) или (2), сформированной по «обучающей» выборке $\mathbf{Y} = \{\mathbf{Y}_i\}_{i=1}^{K}$, составленной из векторов $\mathbf{Y}_i$ (9) помехи объема K.

На рис. 1 приведены результаты моделирования для $M = 20$ (рис. 1а – $Q = \pm 45°$, рис. 1б – $Q = \pm 45°, \pm 60°$, рис. 1г – $Q = \pm 20°, \pm 60°$) и $M = 40$ (рис. 1в – $Q = \pm 45°, \pm 60°$) элементной эквидистантной АР в виде семейства кривых $\mu(K)$ с параметром m (номер последней «рабочей» ступени РФ) для различных значений эффективного ранга r_e (2 и 4). Из рисунка видно, что в условиях малого объема обучающей выборки ($K = M$) «отказ» от вычислений в ступенях с номерами $m > r_e + 1$ позволяет увеличить выходное отношение «сигнал / помеха+шум» от 7…14 раз для $M = 20$ до 30 раз для $M = 40$. При таком «отказе» потери, которые могут быть обусловлены малыми значениями K, близкими к M, практически отсутствуют, о чем свидетельствует незначительная зависимость «поведения» утолщенных сплошных кривых ($m = r_e + 1$) от объема выборки K.

Анализ рис. 1а и рис. 1б свидетельствует о необходимости обработки и в ступени $m = r_e + 1$ РФ, так как останов в ступени $m = r_e$ (тонкие сплошные кривые) приводит к существенным потерям при малых значениях r. Этот вывод подтверждается также сопоставлением рис. 1г и рис. 1б, которые наглядно иллюстрируют увеличение потерь, вызванных отказом от обработки в ступени с номером $m = r_e + 1$, при сближении направлений Q (от $\pm 45°$ до $\pm 20°$) действия точечных источников помех, ближайших с направлением на ожидаемый сигнал ($Q_c = 0°$) (см. различие тонких и утолщенных сплошных кривых). Такие потери в значении параметра $\mu(K)$ в рассмотренных условиях могут достигать 16 раз.



а в

б г

Рис. 1. Отношение «сигнал / помеха+шум» на выходе системы ПВОС

Проведенный анализ позволяет предположить, что при решении задач ПВОС в ряде важных практических случаев, например, при обучающей выборке малого объема (справедливо для случаев нестационарных помех или существенных ограничений на время обработки), оказывается предпочтительнее отказаться от учета корреляционных связей в ступенях с номерами m большими $r + 1$, чем пытаться их оценить.

Как показано выше, при использовании методов решетчатой фильтрации такой «отказ» состоит в «останове» процесса вычислений в ступенях РФ с номерами $m > r + 1$ как на этапе его «настройки», так и на этапе вычисления различных функций от матриц $\check{\Psi}$, обратных оценочным КМ. Это приводит к специфической аппроксимации матрицы $\check{\Psi}$ ленточной матрицей $\check{\Psi}_a$ с шириной ленты в данном случае ($2r + 1$), что кроме того позволяет существенно сократить объем вычислений.

Особенности модификации процедур оптимальной пространственно-временной обработки сигналов на фоне помех с использованием решетчатых фильтров (ОФЛ) рассмотрим более подробно на примере решения систем линейных уравнений с матрицей неполного эффективного ранга.

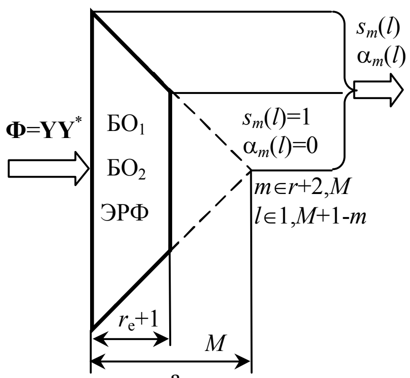
Б. Модифицированный алгоритм решения системы линейных уравнений с матрицей неполного эффективного ранга на основе решетчатых фильтров. В [2] показано, что наибольшую вычислительную сложность при реализации оптимальных алгоритмов ПВОС на фоне помех представляют матричные задачи линейной алгебры, которые в большинстве случаев могут быть сведены к отысканию решения системы линейных уравнений (СЛУ), например, вида

$$\overset{\smile}{\mathbf{\Phi}} \cdot \overset{\smile}{\mathbf{R}} = \mathbf{X}, \quad \overset{\smile}{\mathbf{\Phi}} = \{ \varphi_{ij} \}_{i,\, j=1}^{M}, \qquad (12)$$

являющееся весовым вектором $\overset{\smile}{\mathbf{R}}$ в (11), с оценочной КМ $\overset{\smile}{\mathbf{\Phi}}$.

Как было уже показано, матрицы системы в таких задачах являются эрмитовыми, а в ряде случаев – дополнительно персимметричными или теплицевыми, что обусловливает применимость методов на основе ОФЛ (методов «решетчатой фильтрации»).

На рис. 2 приведены структурные схемы, иллюстрирующие процесс реализации алгоритма решения системы линейных уравнений с оценочной КМ неполного эффективного ранга r_e, включающий в себя два этапа – этап «настройки» РФ (рис. 2, а) и этап собственно решения системы (рис. 2, б).



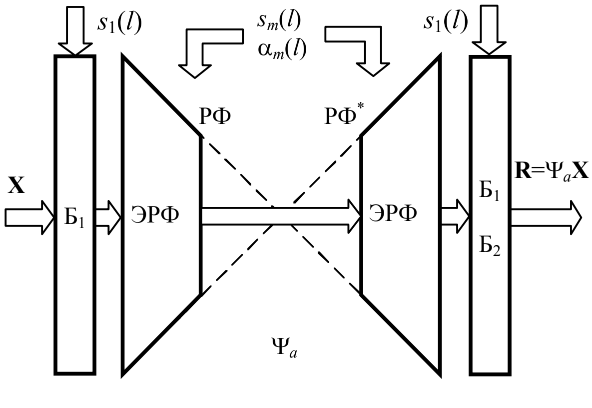


Рис. 2. Структурная схема алгоритма решения систем линейных уравнений с оценочной КМ неполного эффективного ранга r_e на основе РФ

«Настройка» РФ может быть осуществлена по одному из известных алгоритмов по явно сформированной МП оценке КМ $\overset{\smile}{\mathbf{\Phi}}$, например, вида (1), (2) [8] или по по «корню» $\mathbf{Y}$ из нее [11], т.е. собственно по K-мерному пакету обучающих векторов $\mathbf{Y}_i$ ($i \in 1, K$). Рис. 2, б иллюстрирует «прогон» вектора опорного сигнала $\mathbf{X}$ через настроенный РФ, представляющий собой «обращающий» фильтр с матричной импульсной характеристикой $\overset{\smile}{\Psi}_a$ (10).

Пунктирными линиями на рисунке показаны ступени РФ с номерами $m > r_e + 1$, в которых вычисления не производятся. Это позволяет существенно снизить вычислительные затраты при решении таких задач методами на основе РФ особенно при больших M, что будет проиллюстрировано ниже.

Аналогичным образом модифицируются и другие алгоритмы решения задач линейной алгебры методами на основе РФ [2] для КМ с $r_e < M$.

3. Сравнительный анализ вычислительной сложности методов решения системы линейных уравнений с матрицей неполного эффективного ранга.

В [2] приведены результаты сравнительного анализа решения систем линейных уравнений с универсальным методом Гаусса (Жордана – Гаусса) с эрмитовыми теплицевыми матрицами системы полного ранга. Показано, что применение численных методов на основе РФ в условиях отмеченной выше специфики матриц обработки, т.е. КМ, не только снижает вычислительные затраты, но и повышает численную устойчивость при ограниченной разрядной сетке (такие ограничения характерны для специализированной бортовой аппаратуры) и плохой обусловленности матриц системы. Это объясняется не только простым исключением в РФ «лишних» операций за счет учета специфики матрицы, но и существенно лучшей обусловленностью сомножителей ОФЛ, чем их произведения. Степень обусловленности матрицы обычно определяется отношением ее максимального и минимального собственных значений и тем хуже, чем это отношение больше [5].

Проведен сравнительный анализ вычислительных затрат, требуемых для решения систем с КМ неполного эффективного ранга, численными методами на основе РФ (ОФЛ) и «быстрым» алгоритмом на основе треугольного разложения Холецкого [13] для случая симметричных матриц.

В [2, 7] показано, что процесс решения любых задач линейной алгебри методами РФ структурно может быть представлен в виде совокупности вычислительных модулей, а именно блоков оценивания параметров РФ – БО$_1$, БО$_2$ и блоков элементарных РФ (ЭРФ), реализующих соответственно соотношения (13), (14) и (15) вида

$$s_1(i) = 1\big/\sqrt{\varphi_{ii}} \quad (i \in 1, M); \qquad (13)$$

$$\alpha_m(l) = -\frac{p_{m-1}(l+1)}{q_{m-1}(l)}; \; s_m(l) = \frac{1}{\sqrt{1 - |\alpha_m(l)|^2}}; \qquad (14)$$

$$\begin{aligned} p_m(l) &= s_m(l) \cdot \{ p_{m-1}(l+1) + \alpha_m(l) \cdot q_{m-1}(l) \}; \\ q_m(l) &= s_m(l) \cdot \{ q_{m-1}(l) + \alpha_m^*(l) \cdot p_{m-1}(l+1) \}, \end{aligned} \qquad (15)$$

где $m \in 2, r_e + 1$; $l \in 1, M+1-m$, и блоков нормировки ($Б_1$, реализует M операций умножения) и суммирования ($Б_2$, реализует M операций сложения).

Получены соотношения для расчета числа вычислительных модулей, требующихся на этапе «настройки» РФ для случаев симметричной и теплицевой КМ неполного эффективного ранга, а также на этапе «прогона» вектора правой части $\mathbf{X}$ через «обращающий» фильтр. Однако практический интерес представляет не число отдельно взятых различных операций алгоритма, а число тактов его, например, последовательной реализации на вычислительных средствах той или иной аппаратурной платформы. Для примера в качестве такой «платформы» выбраны сигнальные процессоры семейства ADSP (Analog Devices Signals Processing), для которых значения времени реализации элементарных арифметических операций приведены в табл. 1.

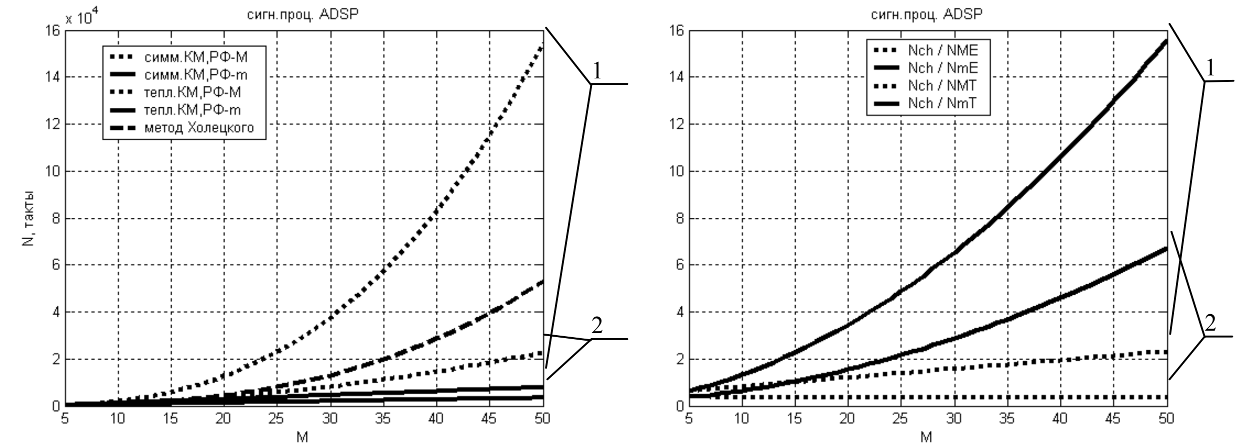
Таблица 1

Время выполнения операций для сигнальных процессоров семейства ADSP

Процессорная операция	Время выполнения (такты)
Сложение (вычитание)	1
Умножение	1
деление	9
Вычисление квадратного корня	6

Результаты сравнительного анализа приведены на рис. 3 в виде семейства кривых зависимости времени однократной последовательной реализации процедур решения СЛУ методами на основе ОФЛ (сплошные кривые для $m = r_e + 1$ «рабочих» ступеней и кривые, помеченные точками, для $m = M$ ступеней) и Холецкого (пунктирная кривая) (см. рис. 3а) и в виде отношения $N_{ch}/N_{рф}$ (рис. 3, б), иллюстрирующего относительное сокращение этого времени (значит и вычислительных затрат в целом) при использовании РФ. Здесь N_{ch} – число тактов работы процессора, требуемых для решения СЛУ методом треугольного разложения Холецкого, и $N_{рф}$ – методами РФ. Кривые 1 и 2 справедливы соответственно для симметричных КМ помех общего вида и симметричных теплицевых КМ. Последние наиболее характерны при организации первичной обработки в условиях эквидистантной АР (при пространственной обработке) или постоянного периода зондирования пространства (при временной обработке) соответственно.

Из рисунка видно, что использование предложенного модифицированного алгоритма решения СЛУ с КМ неполного эффективного ранга на основе РФ позволяет не только повысить эффективность обработки по критерию (11), но и снизить вычислительные затраты для симметричных матриц размерности $M = 25...50$ в 2…7 раз, а для теплицевых – в 5…15 раз по сравнению с «быстрой» процедурой треугольного разложения Холецкого.



а б

Рис. 3. Время однократной последовательной реализации процедур решения СЛУ

Выводы

1. Проведен сравнительный анализ способов оценки эффективного ранга КМ помех, под которым понимается максимальный порядок «хорошо обусловленной» ее главной подматрицы. Показано, что для способа, основанного на использовании дополнительных итерационных процедур вычисления собственных значений матрицы, характерна функциональная зависимость пороговых значений, обеспечивающих фиксированный уровень «ложной тревоги» (ошибочной оценки значения r_e), от величины r_e. В этих условиях возникают существенные трудности практического использования такого способа ввиду априори неизвестного значения r_e определяемого эффективного ранга.

2. Обсуждены особенности способа оценивания эффективного ранга КМ численными методами на основе решетчатых фильтров. Обоснована возмож-

ность сокращения вычислительных затрат при решении систем с КМ неполного эффективного ранга методами РФ. Она обусловлена не только отсутствием дополнительных вычислений для определения ранга, но и возможным «отказом» от обработки в ступенях РФ, больших чем $m = r_e + 1$. Кроме того показано, что к числу наиболее существенных преимуществ такого способа относится стабилизация порога, обеспечивающего одинаковую вероятность «ложной тревоги» для любого значения оцениваемого эффективного ранга.

3. Показано, что отказ от вычислений в ступенях с номерами $m > r_e + 1$ ($m \in 1, M$) сводится к простому обнулению в соответствующих ступенях РФ частных коэффициентов корреляции. В этом случае матрица, обратная КМ, или ее оценка аппроксимируется ленточной матрицей с шириной ленты ($2r_e + 1$). Такая аппроксимация гарантирует положительную определенность матрицы Ψ_a, соответствующей ей матрицы $\mathbf{\Phi}_a = \Psi_a^{-1}$ и является моделью процесса авторегрессии ($r_e + 1$)-го порядка.

4. Показано, что в условиях малого объема обучающей выборки ($K = M$) «отказ» от вычислений в ступенях с номерами $m > r_e + 1$ позволяет увеличить отношение «сигнал / помеха+шум» на выходе системы пространственно-временной обработки от 7…14 раз для $M = 20$ до 30 раз для $M = 40$. Сделано предположение, что потери при «продолжении вычислений» в этих условиях вызваны прежде всего ошибками оценивания параметров этих ступеней, которые обусловлены, в частности, наличием шумов каналов приема и дискретизации аналоговых сигналов, ошибками измерений и вычислений на предыдущих этапах обработки.

5. Обсуждены особенности модификации алгоритмов решения задач линейной алгебры численными методами РФ на примере решения систем линейных уравнений с матрицами неполного эффективного ранга, предложена структурная схема модифицированного алгоритма решения такой задачи.

6. Проведен сравнительный анализ вычислительных затрат решения систем с симметричными КМ неполного эффективного ранга различной размерности, характеризуемых числом тактов работы вычислительных модулей на примере сигнальных процессоров семейства ADSP, методами Холецкого и РФ. Показано, что методы РФ сокращают вычисления за счет «останова» в ступени с номером $m = r_e + 2$ примерно в 5…6 раз при симметричных КМ и 12…15 раз – при симметричных теплицевых КМ.

Список литературы

1. Радиоэлектронные системы: Основы построения и теория: справочник. / Я.Д. Ширман, С.Т. Багдасарян, А.С. Маляренко и др.; под ред. Я.Д. Ширмана. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Радиотехника, 2007. – 512 с.

2. Кириллов И.Г. Обоснование выбора численных методов решения задач линейной алгебры при обработке радиолокационной информации / И.Г. Кириллов, И.В. Семенюк // Системи управління, навігації та зв'язку: зб. наук. пр. – К.: ЦНДІ НУ, 2008. – Вип. 1 (5). – С. 50-58.

3. Сравнение эффективности адаптивной обработки в произвольных и центрально-симметричных ФАР / Д.И. Леховицкий, Д.В. Атаманский, И.Г. Кириллов, В.И. Зарицкий // Антенны. – М., 2000. – Вып. 1 (44). – С. 99-103.

4. Хессин А.Я. Автоматизация распознавания телевизионных изображений / А.Я. Хессин, Б.А. Янсон, М.Н. Либенсон. – М.: Энергия, 1975. – 160 с.

5. Парлетт В. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы: пер. с англ. / В. Парлетт. – М.: Мир, 1983. – 384 с.

6. Кириллов И.Г. Оценка эффективного ранга корреляционных матриц помех методами решетчатой фильтрации / И.Г. Кириллов // Сборник научных трудов академии. – Х.: ВИРТА ПВО, 1991. – Вып. 87. – С. 104-111.

7. Леховицкий Д.И. Обобщённый алгоритм Левинсона и универсальные решётчатые фильтры / Д.И. Леховицкий // Изд. вузов. Радиофизика. – 1992. – Т. 35, № 9–10. – С. 790-808.

8. Леховицкий Д.И. Универсальные решетчатые фильтры. Ч. 1. Адаптация при заданной оценке корреляционной матрицы помех / Д.И. Леховицкий, И.Г. Кириллов, С.Б. Милованов // Деп. рукопись в ВИНИТИ, рег. № 2127 – В92, 1992 (анн. – Изв. вузов. Радиофизика. – 1992. – Т.35, № 3-4).

9. Ширман Я.Д. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех / Я.Д. Ширман, В.Н. Манжос. – М.: Радио и связь, 1981. – 416 с.

10. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике / В.В. Быков. – М.: Сов. радио, 1971. – 328 с.

11. Универсальные адаптивные решетчатые фильтры. Ч.2. Адаптация при заданном корне из оценочной корреляционной матрицы / Д.И. Леховицкий, С.Б. Милованов, И.Д. Раков, Б.Г. Свердлов // Изв. вузов. Радиофизика. – 1992. – № 11-12. – С. 969-992.

12. Леховицкий Д.И. Моделирование пассивных помех импульсным РЛС на основе процессов авторегрессии произвольного порядка / Д.И. Леховицкий, И.Г. Кириллов // Системи обробки інформації: зб. наук. пр. – Х.: ХУ ПС, 2008. – Вип. 3 (70). – С. 90-101.

13. Амосов А.А. Вычислительные методы для инженеров: учеб. пособие / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова. – М.: Высш. школа, 1994. – 544 с.

Поступила в редколлегию 19.03.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.М. Бильчук, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

МІНІМІЗАЦІЯ ОБЧИСЛЕНЬ ПРИ ВИРІШЕННІ СИСТЕМ З ОЦІННИМИ КОРЕЛЯЦІЙНИМИ МАТРИЦЯМИ НЕПОВНОГО ЕФЕКТИВНОГО РАНГУ

І.Г. Кіріллов, С.І. Бурковський

Обговорені особливості визначення ефективного рангу оцінних кореляційних матриць (КМ) чисельними методами на основі узагальненої факторизації Льовінсона. Обґрунтована можливість скорочення обчислень при рішенні систем з матрицями неповного ефективного рангу і підвищення якості просторово-часової обробки сигналів на тлі перешкод при малій «повчальній» вибірці.

Приведені результати порівняльного аналізу обчислювальних витрат при рішенні систем з симетричними КМ. неповного ефективного рангу методом трикутного розкладання Холецького і вдосконаленим алгоритмом на основі гратчастих фільтрів.

Ключові слова: *просторово-часова обробка, ефективний ранг, власне значення, система лінійних рівнянь, максимально правдоподібний, кореляційна матриця, амплітудно-фазовий розподіл, узагальнена факторизація, гратчастий фільтр.*

THE SUBSTANTIATION OF CHOOSING THE NUMERICAL METHODS FOR SOLVING LINEAR ALGEBRA PROBLEMS DURING THE PROCESSING OF RADAR INFORMATION

I.G. Kirillov, S.I. Burkovsky

The features of determination of effective grade of matrices (GM) of correlations of evaluations are discussed by numeral methods on the basis of generalized factorization of Levinson. Possibility of reduction of calculations is grounded at the decision of the systems with the matrices of incomplete effective grade and upgrading spatio-temporal signal processing on a background hindrances at a small «teaching» selection. The results of comparative break-down of calculable expenses are resulted at the decision of the systems with symmetric GM of incomplete effective grade by the method of three-cornered decomposition of Kholetskiy and improved algorithm on the basis of the latticed filters.

Keywords: *spatio-temporal treatment, effective grade, own value, system of linear equalizations, maximally plausible, correlation matrix amplitude-phase distributing, generalized factorization, latticed filter.*