

УДК 004.6

О.С. Петров, О.С. Зверева

*Східноукраїнський Національний університет ім. Володимира Даля, Луганськ***ЗАСТОСУВАННЯ АНАЛІЗУ ФУР'Є В ЦИФРОВОМУ ЗВ'ЯЗКУ**

*У статті розглянуто використання методів Фур'є для аналізу лінійних систем. Приділено увагу ідеальній періодичній послідовності прямокутних імпульсів.*

**Ключові слова:** система зв'язку, цифровий зв'язок, спектральний аналіз, синусоїдальний сигнал.

**Вступ**

**Актуальність.** Оскільки електричні сигнали зв'язку зазвичай описують в тимчасовій області, то спектральні поняття достатньо важливі при аналізі і проектуванні систем зв'язку; вони можуть описувати сигнал через його середню потужність або енергетичний зміст на різних частотах і показують, яку частину електромагнітного спектру займає сигнал. Часто потрібно, щоб теле- та радіостанції працювали на виділених їм частотах при край малих проміжках між смугами, зайнятими різними станціями. Отже наш інтерес до спектрів і аналізу Фур'є пояснюється реальними вимогами переміщення сигналу в точно задані межі.

**Постановка задачі.** При описанні спектру сигналу ми задаємо його амплітуду та фазу, як частотну функцію [1, 2]. Методи Фур'є використовуються для аналізу лінійних схем або систем: (1) для прогнозу реакції (відгуку) системи; (2) для визначення дина-

міки системи (передавальній функції) і (3) для оцінки або інтерпретації результатів тестів. Прогноз реакції системи (1) схематично показаний на рис. 1.

Нехай на вхід системи подається довільний періодичний сигнал з періодом  $T_0$  секунд. Методи аналізу Фур'є, як показано на рисунку, дозволяють описати подібний вхід як суму синусоїдальних сигналів. Найменша (або власна) частота цих сигналів –  $1/T_0$  Гц; решта частот, кратних їй ( $2/T_0, 3/T_0, \dots$ ), називаються гармоніками. Важливою особливістю лінійної системи є принцип суперпозиції – реакція на суму сигналів дорівнює сумі відгуків на кожен сигнал. Фактично ця властивість використовується як визначення лінійності. Математично система лінійна, мережі для всіх  $a, b, x_1(t)$  і  $x_2(t)$ :

$y_1(t)$  – реакція системи на  $x_1(t)$ ;

$y_2(t)$  – реакція системи на  $x_2(t)$ ;

$ay_1(t) + by_2(t)$  – реакція системи на  $ax_1(t) + bx_2(t)$ .

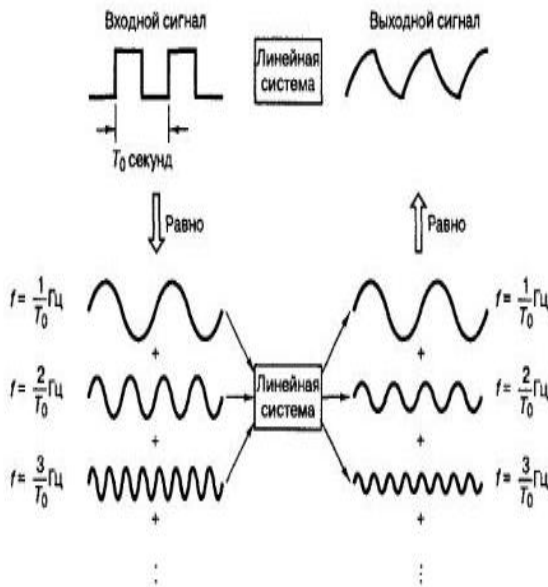


Рис. 1. Прогноз реакції системи

Дане визначення свідчить про те, що відгук лінійної системи з вхідними синусоїдальними сигналами повинен складатись з синусоїдальних сигналів з тими ж частотами; зазвичай подібна система задається частотною передаточною функцією, як показано на рис. 2. Передаточна функція являється робочою характеристикою системи, тобто маючи передаточну функцію, можна передбачити кожен вихідний компонент. У відповідності принципу суперпозиції ці відгуки підсумовуються, що дає реакцію системи на вхідний періодичний сигнал.

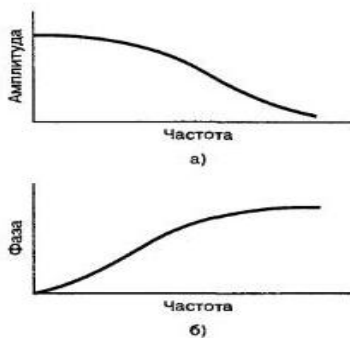


Рис. 2. Передавальна функція системи:  
а – амплітудна характеристика;  
б – фазова характеристика

Розвиток методів аналізу Фур'є вплинув на аналіз лінійних систем; це дозволило зв'язати перехідні процеси та методи роботи з гармонійними функціями, також спростило аналіз лінійних систем при збудженні їх довільним вхідним сигналом. Як логарифм дозволяє замінити операцію множення операцією складання, так і методи аналізу Фур'є

дозволяють замінити складні сигнали і їх аналіз гармонійними складовими і методами гармонійного аналізу.

Періодичні сигнали з кінцевою енергією, переданою за період, можна представити у вигляді ряду Фур'є. Довільний періодичний сигнал  $x(\lambda)$  виражається через нескінченне число гармонік із зростаючими частотами [4].

$$x(\lambda) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \lambda + a_2 \cos 2\lambda + a_3 \cos 3\lambda + \dots + b_1 \sin \lambda + b_2 \sin 2\lambda + b_3 \sin 3\lambda + \dots \quad (1)$$

де  $\cos \lambda$  і  $\sin \lambda$  називаються основними; функції  $\cos n\lambda$  і  $\sin n\lambda$  при  $n > 1$ , де  $n$  – ціле,  $a_n$  і  $b_n$  – коефіцієнти гармонік, а  $a_0/2$  – постійна складова.

Розглянемо, як обчислюються значення коефіцієнтів  $a_n$  і  $b_n$  у формулі (1). Наприклад, для обчислення коефіцієнта  $a_3$  обидві частини формули (1) можна помножити на  $\cos 3\lambda d\lambda$ , а потім проінтегрувати:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} x(\lambda) \cos 3\lambda d\lambda &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}a_0 \cos 3\lambda d\lambda + \int_{-\pi}^{\pi} a_1 \cos \lambda \cos 3\lambda d\lambda + \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} a_2 \cos 2\lambda \cos 3\lambda d\lambda + \int_{-\pi}^{\pi} a_3 (\cos 3\lambda)^2 d\lambda + \dots + \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} b_1 \sin \lambda \cos 3\lambda d\lambda + \int_{-\pi}^{\pi} b_2 \sin 2\lambda \cos 3\lambda d\lambda + \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} b_3 \sin 3\lambda \cos 3\lambda d\lambda + \dots + \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} x(\lambda) \cos 3\lambda d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} a_3 (\cos 3\lambda)^2 d\lambda = a_3 \pi; \\ a_3 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\lambda) \cos 3\lambda d\lambda. \end{aligned}$$

Отриманий результат можна узагальнити:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\lambda) \cos n\lambda d\lambda; \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\lambda) \sin n\lambda d\lambda. \quad (3)$$

Коефіцієнт  $a_0$  знаходиться з (2) при  $n = 0$ . В результаті отримуємо постійну складову

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\lambda) d\lambda \quad (4)$$

### Основні результати

Розглянемо ідеальну періодичну послідовність прямокутних імпульсів, яку показано на рис. 3. Для коефіцієнтів ряду Фур'є послідовності імпульсів  $x_p(t)$  з періодом  $T_0$  справедливий наступний вираз [3]:

$$c_n = \frac{AT \sin(\pi n T / T_0)}{\pi n T / T_0} = \frac{AT}{T_0} \operatorname{sinc} \frac{nT}{T_0} \quad (5)$$

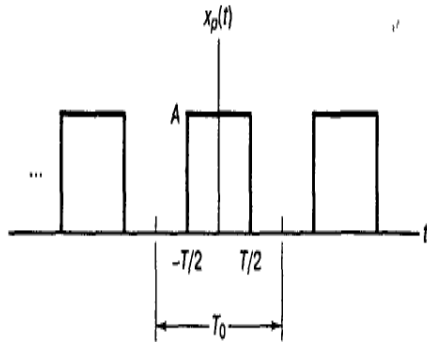


Рис. 3. Послідовність імпульсів

У даному виразі

$$\operatorname{sinc} y = \frac{\sin(\pi y)}{\pi y}$$

Функція  $\operatorname{sinc}$ , як показано на рис. 4, досягає свого максимуму при  $y = 0$  і наближається до нуля при  $y \in \pm\infty$ , осцилюючи з амплітудою, що поступово зменшується.

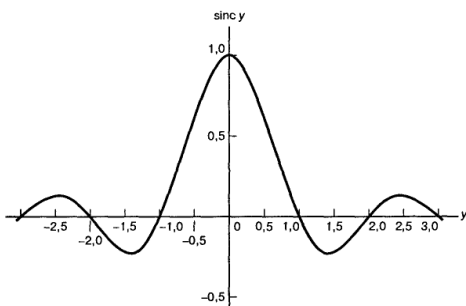


Рис. 4. Функція  $\operatorname{sinc}$

Зробимо підстановку коефіцієнтів з формули (5) у формулу  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n f_0 t}$  [2]. Отриманий ряд представляє початкову послідовність імпульсів  $x_p(t)$  синтезовану з складових елементів

$$x_p(t) = \frac{AT}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} \frac{nT}{T_0} e^{2\pi i n f_0 t} \quad (6)$$

### Висновки

Ідеальна періодична послідовність імпульсів включає всі гармоніки, кратні власній частоті. Тому в системах зв'язку часто передбачається, що значна частина потужності або енергії вузькосмугового сигналу доводиться на частоти від нуля до першого нуля амплітудного спектру. Таким чином, як міра ширини смуги послідовності імпульсів часто використовується величина  $1/T$  (де  $T$  – тривалість імпульсу). Відзначимо також, що ширина смуги назад пропорційна тривалості імпульсу; чим коротше імпульси, тим більше широка смуга з ними пов'язана.

### Список літератури

1. Papoulis A. *Signal Analysis*. McGraw-Hill Book Company / A. Papoulis. – New York, 1977.
2. Panter P.F. *Modulation, Noise, and Spectral Analysis* / P.F. Panter. – McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.
3. Скляр Б. *Цифровая связь* / Бернард Скляр. – М: Вильямс, 2003. – 1104 с.
4. Haykin S. *Communications Systems* / S. Haykin. – John Wiley & Sons, Inc., New York, 1983.
5. Schwartz M. *Information, Transmission, Modulation, and Noise* / M. Schwartz. – McGraw-Hill Book Company, New York, 1980.

Надійшла до редколегії 23.03.2010

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. В.А. Лужецький, Вінницький національний технічний університет, Вінниця.

### ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИЗА ФУРЬЕ В ЦИФРОВОЙ СВЯЗИ

А.С. Петров, О.С. Зверева

*В статье рассмотрено использование методов Фурье для анализа линейных систем. Уделено внимание идеальной периодической последовательности прямоугольных импульсов.*

**Ключевые слова:** система связи, цифровая связь, спектральный анализ, синусоидный сигнал.

### APPLICATION OF ANALYSIS OF FUR'E IS IN DIGICOM

A.S. Petrov, O.S. Zvereva

*In the article the use of methods is considered Fur'e for the analysis of the linear systems. Attention ideal periodic string of rectangular pulses is spared.*

**Keywords:** communication network, digicom, spectral analysis, sinusoid signal.