

УДК 006.91

И.П. Захаров, Е.А. Климова

Харьковский национальный университет радиотехники, Харьков, Украина

## РАСЧЕТ ЗНАЧЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТА СТЬЮДЕНТА ДЛЯ ДРОБНОГО ЧИСЛА СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Рассматриваются результаты расчета значений коэффициента Стьюдента для дробного числа степеней свободы. Представлены значения коэффициента Стьюдента для вероятностей 0,6827; 0,95; 0,9545; 0,98; 0,99 0,9973 для числа степеней свободы от 1 до 7 с шагом 0,1. Показана возможность получения значений коэффициента Стьюдента для числа степеней свободы меньше единицы. Предложена формула, с высокой точностью аппроксимирующая зависимость коэффициента Стьюдента от числа степеней свободы.

**Ключевые слова:** расширенная неопределенность измерения, коэффициент охвата, коэффициент Стьюдента, эффективное число степеней свободы.

### Введение

В соответствии с базовым алгоритмом оценивания неопределенности измерений [1], расширенная неопределенность результата измерения определяется как произведение суммарной стандартной неопределенности на коэффициент охвата. При наличии повторных наблюдений этот коэффициент рассчитывается как коэффициент Стьюдента для вероятности 0,95 для так называемого эффективного числа степеней свободы  $\nu_{\text{eff}}$ . Последнее определяется по формуле Велча-Саттерсвейта и, в общем случае, представляет собой дробное число. В п. G.6.4 «Руководства по выражению неопределенности измерений» [1] рекомендуют «уменьшать полученное значение  $\nu_{\text{eff}}$  до ближайшего целого числа или интерполировать». В том случае, когда получаемое значение  $\nu_{\text{eff}}$  – мало, погрешность определения коэффициента Стьюдента при его округлении может составлять существенное значение. Например, для  $\nu_{\text{eff}}$ , лежащего в диапазоне от 1 до 2, что часто бывает при выполнении двух параллельных аналитических измерений, коэффициент охвата изменяется в 3 раза (от 12,7 до 4,3). В статье [2] приводится интерполирующая формула для коэффициента Стьюдента с числом степеней свободы больше 2, построенная по значениям целых чисел степеней свободы. Однако оценить погрешность ее применения для дробного числа степеней свободы  $\nu$  не представляется возможным.

**Целью статьи** является получение значений коэффициента Стьюдента для дробного числа степеней свободы и аппроксимация зависимости  $t_{0,95}(\nu)$  аналитическим выражением с приемлемой точностью.

### Алгоритм вычисления

В основе расчета лежит операция численного интегрирования.

Значение коэффициента Стьюдента  $t_p(\nu)$  находится из равенства:

$$\int_0^{t_p(\nu)} p(t, \nu) dt = \frac{p}{2}, \quad (1)$$

$$\text{где } p(t, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad (2)$$

распределение Стьюдента с числом степеней свободы  $\nu$ ;  $p$  – доверительная вероятность.

Простейший алгоритм расчета включает следующие операции:

1) вычисление значения  $p(0, \nu)$  по формуле (2) для начального значения переменной  $t = 0$  и заданного числа степеней свободы  $\nu$ ;

2) вычисление значения  $p(\Delta t, \nu)$ , где  $\Delta t$  – шаг интегрирования;

3) расчет значения интеграла  $\int_0^{\Delta t} p(t, \nu) dt$  по формуле численного интегрирования;

4) вычисление значения плотности вероятности  $p(2\Delta t, \nu)$  и интеграла  $\int_0^{2\Delta t} p(t) dt$ ;

5) продолжение цикла вычислений до достижения значения интеграла  $\int_0^{n\Delta t} p(t) dt$  значения  $\frac{p}{2}$ , где  $p$  – заданная доверительная вероятность; в этом случае коэффициент охвата  $t_p(\nu) = n\Delta t$ .

Очевидно, что для малых значений  $\nu$  (для больших значений коэффициента Стьюдента) и малых значений  $\Delta t$ , время вычисления по такому алгоритму будет очень большим. Для уменьшения времени вычисления был применен итерационный алгоритм.

В табл. 1 приведенные рассчитанные значения коэффициента Стьюдента для вероятностей 0,6827; 0,95; 0,9545; 0,98; 0,99 0,9973 для дробного числа степеней свободы от 1 до 7 с шагом 0,1.

Таблица 1

Рассчитанные значения коэффициента Стьюдента для дробных степеней свободы

ν	p					
	0,6827	0,95	0,9545	0,98	0,99	0,9973
<b>1,0</b>	<b>1,837409</b>	<b>12,70620</b>	<b>13,96781</b>	<b>31,82052</b>	<b>63,65674</b>	<b>235,8698</b>
1,1	1,724314	10,27690	11,20320	23,70698	44,54138	146,518200
1,2	1,634356	8,648912	9,363620	18,64018	32,241698	99,034480
1,3	1,568548	7,500548	8,073710	15,26986	26,059392	71,402950
1,4	1,512838	6,657068	7,130930	12,91299	21,22623	54,141040
1,5	1,466860	6,016736	6,418240	11,19748	17,821458	42,728140
1,6	1,428298	5,517236	5,864485	9,907410	15,331599	34,827400
1,7	1,395508	5,118824	5,424160	8,910206	13,453983	29,146060
1,8	1,367308	4,794932	5,067150	8,121790	12,001167	24,930010
1,9	1,342804	4,527092	4,772745	7,486028	10,851552	21,715930
<b>2,0</b>	<b>1,321315</b>	<b>4,302653</b>	<b>4,526551</b>	<b>6,964557</b>	<b>9,924843</b>	<b>19,209532</b>
2,1	1,302332	4,112182	4,318069	6,530974	9,166100	17,215377
2,2	1,285435	3,948744	4,139501	6,165466	8,535110	15,601632
2,3	1,270307	3,807179	3,985100	5,854012	8,004078	14,276083
2,4	1,256682	3,683531	3,850407	5,585964	7,552258	13,172894
2,5	1,244352	3,574672	3,732029	5,353204	7,163988	12,243560
2,6	1,233140	3,478210	3,627236	5,149506	6,827460	11,452765
2,7	1,222901	3,392167	3,533896	4,969920	6,533367	10,773477
2,8	1,213216	3,315002	3,450280	4,810596	6,274575	10,184986
2,9	1,204883	3,245450	3,374984	4,668388	6,045344	9,671378
<b>3,0</b>	<b>1,196913</b>	<b>3,182446</b>	<b>3,306830</b>	<b>4,540703</b>	<b>5,840909</b>	<b>9,219850</b>
3,1	1,189538	3,125168	3,244940	4,425720	5,658148	8,820430
3,2	1,182691	3,072848	3,188450	4,321490	5,493436	8,465110
3,3	1,176317	3,024896	3,136710	4,226680	5,344480	8,147275
3,4	1,170370	2,980796	3,089165	4,140110	5,209192	7,861605
3,5	1,164808	2,940104	3,045335	4,060770	5,085856	7,603690
3,6	1,159596	2,902460	3,004805	3,987830	4,973008	7,369855
3,7	1,154701	2,867540	2,967225	3,920570	4,869400	7,157055
3,8	1,150096	2,835056	2,932290	3,858350	4,773976	6,962665
3,9	1,145755	2,804756	2,899740	3,800650	4,685848	6,784515
<b>4,0</b>	<b>1,141655</b>	<b>2,776445</b>	<b>2,869315</b>	<b>3,746947</b>	<b>4,604095</b>	<b>6,620720</b>
4,1	1,137782	2,749960	2,840879	3,697005	4,528432	6,469696
4,2	1,134113	2,725088	2,814188	3,650310	4,457890	6,330064
4,3	1,130632	2,701712	2,789111	3,60660	4,392082	6,200640
4,4	1,127327	2,679696	2,765504	3,565610	4,330564	6,080352
4,5	1,124185	2,658928	2,743247	3,527100	4,272934	5,968336
4,6	1,121193	2,639304	2,722223	3,490850	4,218850	5,863792
4,7	1,118341	2,620736	2,702339	3,456675	4,168000	5,766000

$\nu$	$p$					
	0,6827	0,95	0,9545	0,98	0,99	0,9973
4,8	1,11562	2,603144	2,683505	3,424400	4,120102	5,674368
4,9	1,113021	2,586456	2,665640	3,393880	4,074928	5,588336
5,0	1,110533	2,570582	2,648654	3,364930	4,032143	5,507445
5,1	1,108156	2,555510	2,632535	3,337558	3,991855	5,431245
5,2	1,105878	2,541140	2,617171	3,311530	3,953590	5,359350
5,3	1,103692	2,527442	2,602527	3,286780	3,917287	5,291415
5,4	1,101594	2,514362	2,588554	3,263218	3,882802	5,227140
5,5	1,09958	2,501870	2,575206	3,240766	3,850003	5,166240
5,6	1,097644	2,489924	2,562444	3,219346	3,818770	5,108460
5,7	1,095782	2,478482	2,550229	3,198892	3,789001	5,053590
5,8	1,093988	2,467526	2,538528	3,179338	3,760591	5,001390
5,9	1,092262	2,457014	2,527310	3,160624	3,733456	4,951710
6,0	1,090595	2,446912	2,516528	3,142668	3,707428	4,904355
6,1	1,08899	2,437235	2,506205	3,125528	3,682680	4,859110
6,2	1,08744	2,427915	2,496268	3,109049	3,658896	4,816000
6,3	1,085942	2,418955	2,486710	3,093227	3,636093	4,774690
6,4	1,084496	2,410325	2,477511	3,078023	3,614213	4,735270
6,5	1,083096	2,402015	2,468649	3,063401	3,593201	4,697470
6,6	1,081742	2,394000	2,460108	3,049331	3,573011	4,661200
6,7	1,080432	2,386270	2,451870	3,035780	3,553589	4,626460
6,8	1,079162	2,378805	2,443920	3,022724	3,534903	4,593070
6,9	1,077932	2,371600	2,436242	3,010133	3,516901	4,561030
7,0	1,076739	2,364624	2,428809	2,997952	3,499483	4,530160

Приведенный алгоритм позволяет рассчитать значения коэффициента Стьюдента даже для числа степеней свободы меньше единицы. Результаты расчета для вероятности 0,95 представлены в табл. 2.

Таблица 2

Значения коэффициента Стьюдента для вероятности 0,95 и  $\nu \leq 1$

$\nu$	$t_{0,95}(\nu)$	$\nu$	$t_{0,95}(\nu)$
0,3	6627,7	0,7	36,612
0,4	642,85	0,8	23,329
0,5	164,56	0,9	16,580
0,6	67,847	1,0	12,7062

### Аппроксимация зависимости коэффициента Стьюдента от числа степеней свободы

Для вероятности охвата 0,95 получено аналитическое выражение, аппроксимирующее значение

коэффициента Стьюдента в диапазоне от 2,37 до 12,7 (что соответствует изменению числа степеней свободы от 7 до 1) (табл. 3):

$$t_{0,95}(\nu) = \frac{2,348551}{1 - 1,45153 \cdot \exp(-0,576295 \cdot \nu)} \quad (3)$$

Относительная погрешность аппроксимации этой зависимостью не превышает  $\pm 1\%$  в диапазоне  $\nu$  от 1 до 6.

Для сравнения в табл. 3 приведены значения коэффициента Стьюдента и относительной погрешности аппроксимации для линейной интерполяции между целочисленными значениями степеней свободы  $\hat{\nu}$  и  $\hat{\nu}+1$ , где  $\hat{\nu}$  – целая часть  $\nu$ , осуществляемой по формуле

$$t_{0,95}(\nu) = t_{0,95}(\hat{\nu}) + [t_{0,95}(\hat{\nu}) - t_{0,95}(\hat{\nu}+1)](\nu - \hat{\nu}) \quad (4)$$

Кроме того, в табл. 3. приведены значения коэффициента Стьюдента, рассчитанные по аппроксимирующей формуле, полученной в [2]:

$$t_{0,95}(\nu) = 1,96[1 + 1/(0,822 \cdot \nu + 0,87)] \quad (5)$$

и относительные погрешности аппроксимации.

Значения коэффициента Стьюдента  
для разных формул аппроксимации и их относительные погрешности

$\nu$	Значения $t_{0,95}(\nu)$				Относительные погрешности аппроксимации, %		
	Расчетные	Формула (3)	Формула (4)	Формула (5)	Формула (3)	Формула (4)	Формула (5)
<b>1,0</b>	<b>12,70620</b>	<b>12,74489</b>	<b>12,70620</b>	–	0,305	0,000	–
1,1	10,27690	10,213096	11,86585	–	-0,621	15,461	–
1,2	8,648912	8,600305	11,02549	–	-0,562	27,478	–
1,3	7,500548	7,484573	10,18514	–	-0,213	35,792	–
1,4	6,657068	6,667969	9,344781	–	0,164	40,374	–
1,5	6,016736	6,045331	8,504427	–	0,475	41,346	–
1,6	5,517236	5,555612	7,664072	–	0,696	38,911	–
1,7	5,118824	5,160948	6,823717	–	0,823	33,306	–
1,8	4,794932	4,836603	5,983362	–	0,869	24,785	–
1,9	4,527092	4,565733	5,143008	–	0,854	13,605	–
<b>2,0</b>	<b>4,302653</b>	<b>4,336472</b>	<b>4,302653</b>	<b>4,4923</b>	0,786	0,000	4,408
2,1	4,112182	4,140221	4,190632	4,249185	0,682	1,908	3,332
2,2	3,948744	3,97059	4,078612	4,048662	0,553	3,289	2,530
2,3	3,807179	3,822738	3,966591	3,880439	0,409	4,187	1,924
2,4	3,683531	3,692927	3,854570	3,737294	0,255	4,643	1,460
2,5	3,574672	3,578222	3,742550	3,614008	0,099	4,696	1,100
2,6	3,478210	3,476294	3,630529	3,506717	-0,055	4,379	0,820
2,7	3,392167	3,385262	3,518508	3,412497	-0,204	3,724	0,599
2,8	3,315002	3,303597	3,406487	3,329098	-0,344	2,760	0,425
2,9	3,245450	3,23004	3,294467	3,254755	-0,475	1,510	0,287
<b>3,0</b>	<b>3,182446</b>	<b>3,163546</b>	<b>3,182446</b>	<b>3,18807</b>	-0,594	0,000	0,177
3,1	3,125168	3,10324	3,141846	3,127918	-0,702	0,534	0,088
3,2	3,072848	3,048384	3,101246	3,073383	-0,796	0,924	0,017
3,3	3,024896	2,998349	3,060646	3,023714	-0,878	1,182	-0,039
3,4	2,980796	2,952601	3,020046	2,978288	-0,946	1,317	-0,084
3,5	2,940104	2,910678	2,979446	2,936582	-1,001	1,338	-0,120
3,6	2,902460	2,87218	2,938845	2,898158	-1,043	1,254	-0,148
3,7	2,867540	2,836761	2,898245	2,862643	-1,073	1,071	-0,171
3,8	2,835056	2,804117	2,857645	2,82972	-1,091	0,797	-0,188
3,9	2,804756	2,773984	2,817045	2,799113	-1,097	0,438	-0,201
<b>4,0</b>	<b>2,776445</b>	<b>2,746127</b>	<b>2,776445</b>	<b>2,770587</b>	-1,092	0,000	-0,211
4,1	2,749960	2,720338	2,755859	2,743937	-1,077	0,215	-0,219
4,2	2,725088	2,696433	2,735272	2,718984	-1,052	0,374	-0,224
4,3	2,701712	2,67425	2,714686	2,69557	-1,016	0,480	-0,227
4,4	2,679696	2,653641	2,694100	2,673558	-0,972	0,538	-0,229
4,5	2,658928	2,634476	2,673514	2,652824	-0,920	0,549	-0,230
4,6	2,639304	2,616637	2,652927	2,633262	-0,859	0,516	-0,229
4,7	2,620736	2,600016	2,632341	2,614774	-0,791	0,443	-0,227
4,8	2,603144	2,584519	2,611755	2,597274	-0,715	0,331	-0,225
4,9	2,586456	2,570059	2,591168	2,580685	-0,634	0,182	-0,223
<b>5,0</b>	<b>2,570582</b>	<b>2,556555</b>	<b>2,570582</b>	<b>2,564938</b>	-0,546	0,000	-0,220
5,1	2,555510	2,543938	2,558215	2,549971	-0,453	0,106	-0,217

$\nu$	Значения $t_{0,95}(\nu)$				Относительные погрешности аппроксимации, %		
	Расчетные	Формула (3)	Формула (4)	Формула (5)	Формула (3)	Формула (4)	Формула (5)
5,2	2,541140	2,532141	2,545848	2,535726	-0,354	0,185	-0,213
5,3	2,527442	2,521104	2,533481	2,522152	-0,251	0,239	-0,209
5,4	2,514362	2,510774	2,521114	2,509204	-0,143	0,269	-0,205
5,5	2,501870	2,501099	2,508747	2,496839	-0,031	0,275	-0,201
5,6	2,489924	2,492035	2,496380	2,485019	0,085	0,259	-0,197
5,7	2,478482	2,483538	2,484013	2,473708	0,204	0,223	-0,193
5,8	2,467526	2,475569	2,471646	2,462874	0,326	0,167	-0,189
5,9	2,457014	2,468094	2,459279	2,452487	0,451	0,092	-0,184
<b>6,0</b>	<b>2,446912</b>	<b>2,461079</b>	<b>2,446912</b>	<b>2,442521</b>	0,579	0,000	-0,179
6,1	2,437235	2,454493	2,438683	2,43295	0,708	0,059	-0,176
6,2	2,427915	2,448308	2,430454	2,423752	0,840	0,105	-0,171
6,3	2,418955	2,442498	2,422226	2,414904	0,973	0,135	-0,167
6,4	2,410325	2,437039	2,413997	2,406388	1,108	0,152	-0,163
6,5	2,402015	2,431908	2,405768	2,398185	1,244	0,156	-0,159
6,6	2,394000	2,427084	2,397539	2,390277	1,382	0,148	-0,155
6,7	2,386270	2,422547	2,389310	2,382651	1,520	0,127	-0,152
6,8	2,378805	2,41828	2,381082	2,375289	1,659	0,096	-0,148
6,9	2,371600	2,414266	2,372853	2,36818	1,799	0,053	-0,144
<b>7,0</b>	<b>2,364624</b>	<b>2,410489</b>	<b>2,364624</b>	<b>2,36131</b>	1,940	0,000	-0,140

## Выводы

1. Представленный в статье алгоритм позволяет рассчитать коэффициент Стьюдента для любого дробного числа степеней свободы, даже меньшего единицы.

2. Предложенная в статье формула (3) для аппроксимации зависимости коэффициента Стьюдента от числа степеней свободы обладает наибольшей точностью по сравнению с ранее существующими (4), (5). Относительная погрешность аппроксимации не превышает  $\pm 1\%$  в диапазоне изменения  $\nu$  от 1 до 6.

## Список литературы

1. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. – Geneva: ISO, First Edition. – 1995 – 101 p.
2. Захаров И.П. Композиция законов распределения Стьюдента / И.П. Захаров // Системи обробки інформації: зб. наук. пр. – X.: ХУПС, 2005. – Вип. 8(48). – С. 28-35.

Поступила в редколлегию 4.04.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Руженцев, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

## РОЗРАХУНОК ЗНАЧЕНЬ КОЕФІЦІЕНТУ СТЬЮДЕНТА ДЛЯ ДРІБНОГО ЧИСЛА СТЕПЕНІВ СВОБОДИ

І.П. Захаров, К.А. Клімова

Розглядаються результати розрахунку значень коефіцієнту Стьюдента для дрібного числа степенів свободи. Наведені значення коефіцієнту Стьюдента для ймовірностей 0,9; 0,95; 0,9545; 0,98; 0,99 0,9973 для числа степенів свободи від 1 до 7 з кроком 0,1. Показана можливість отримання значень коефіцієнту Стьюдента для числа степенів свободи менше одиниці. Запропонована формула, яка з високою точністю аппроксимує залежність коефіцієнту Стьюдента від числа степенів свободи.

**Ключові слова:** розширена невизначеність вимірювання, коефіцієнт покриття, коефіцієнт Стьюдента, ефективне число степенів свободи.

## CALCULATION OF VALUES OF T-FACTOR FOR FRACTIONAL DEGREES OF FREEDOM

I.P. Zakharov, K.A. Klimova

The summary: results of calculation of t-factor values for fractional degrees of freedom are considered. Values of t-factor for probabilities 0,9; 0,95; 0,9545; 0,98; 0,990,9973 are submitted for degrees of freedom from 1 up to 7 with step 0,1. The opportunity of reception of values of t-factor for degrees of freedom less then unity is shown. The formula, with high accuracy approximating relationship of t-factor on degrees of freedom is offered.

**Keywords:** the expanded uncertainty in measurement, coverage factor, t-factor, effective degrees of freedom.