

УДК 621.391

Д.В. Агеев

Харьковский национальный университет радиотехники, Харьков

## ПРОЕКТИРОВАНИЕ СЕТИ ДОСТУПА МУЛЬТИСЕРВИСНОЙ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОГОСЛОЙНОГО ГРАФА

*Решается задача синтеза топологии сети доступа телекоммуникационной системы согласно критерия максимум прибыли оператора сети, при отсутствии и наличии дополнительных требований к связности. Решение задачи базируется на применении математической модели многослойного графа.*

**Ключевые слова:** многослойный граф, мультисервисная телекоммуникационная система.

### Введение

На данный момент в мире наблюдается бурное развитие информационных технологий с широким внедрением их во все сферы деятельности человека. Одной из важных составляющих современных информационных систем является телекоммуникационная подсистема, к которой предъявляются требования по обеспечению возможности передачи любого вида информации, из любой точки мира, в любое время. Последнее приводит к необходимости развертывания новых и модернизации существующих телекоммуникационных систем, удовлетворяющих современным требованиям к качеству передачи информации. Современные телекоммуникационные системы строятся согласно концепции NGN, одним из уровней которой является сеть доступа, которая обеспечивает подключение узлов доступа в магистральный сегмент сети NGN.

Наличие большого количества операторов связи функционирующих в условиях конкуренции на одной и той же территории, а также быстрое моральное устаревание современных телекоммуникационных систем приводит к изменению критериев оптимальности используемых при проектировании. В качестве критерия оптимальности принятого проектного решения автором предлагается использовать критерий максимуму прибыли оператора связи.

### 1. Математическая постановка задачи

Фрагмент сети, синтез топологии, которой рассматривается в данной задаче, обеспечивает доступ абонентов сети к транспортной сети (рис. 1). Проектируемая сеть обеспечивает предоставление абонентам телекоммуникационных посредством узлов предоставления услуг, которые подключены к транспортной сети и не входят в состав сети доступа. В рамках данной задачи считается, что заданная услуга предоставляется абоненту, если имеется возможность передачи информационных потоков между абонентом сети и пограничным коммутатором.

Введем следующие обозначения.

$A = \{a_i\}$  – множество абонентов сети – потребителей инфотелекоммуникационных услуг;

$Z^{AN} = \{z_i^{AN}\}$  – множество мест, где возможна установка оборудования узла доступа;

$Z^{SN} = \{z_i^{SN}\}$  – множество мест, где возможно размещение узла агрегации;

$Z^{EN} = \{z_i^{EN}\}$  – множество пограничных коммутаторов, посредством которых возможен доступ в магистральный сегмент;

$Z = Z^{SN} \cup Z^{AN} \cup Z^{EN}$  – множество узлов-кандидатов синтезируемого фрагмента сети;

$A_i^{AN} \subset A$  – множество абонентов обслуживаемых узлом доступа  $z_i^{AN}$ ;

$D^Z = \|d_{ij}^Z\|$  – матрица приведенных затрат на строительство линии связи между узлами сети  $Z$ . Если строительство линии связи  $(i, j)$  невозможно или не целесообразно, то  $d_{ij}^Z = \infty$ ;

$\bar{D}^{AN} = (d_i^{AN})$  – затраты на организацию узла доступа  $z_i^{AN}$ ;

$\bar{D}^{SN} = (d_i^{SN})$  – затраты на организацию узла агрегации  $z_i^{SN}$ ;

$S = \{s_k\}$  – множество инфотелекоммуникационных услуг, предоставляемых в проектируемой сети;

$\bar{q}^i = (q_k^i)$  – вектор объемов услуг заказываемых абонентом  $a_i$ ;

$\Omega(s_k)$  – доход, получаемый оператором связи при предоставлении абоненту услуги  $s_k$  в единичном объеме.

#### **Необходимо найти:**

– топологию проектируемого сегмента сети (множество каналов связи  $B = \{b_{ij}\}$ ,  $b_{ij} = (z_i, z_j)$ );

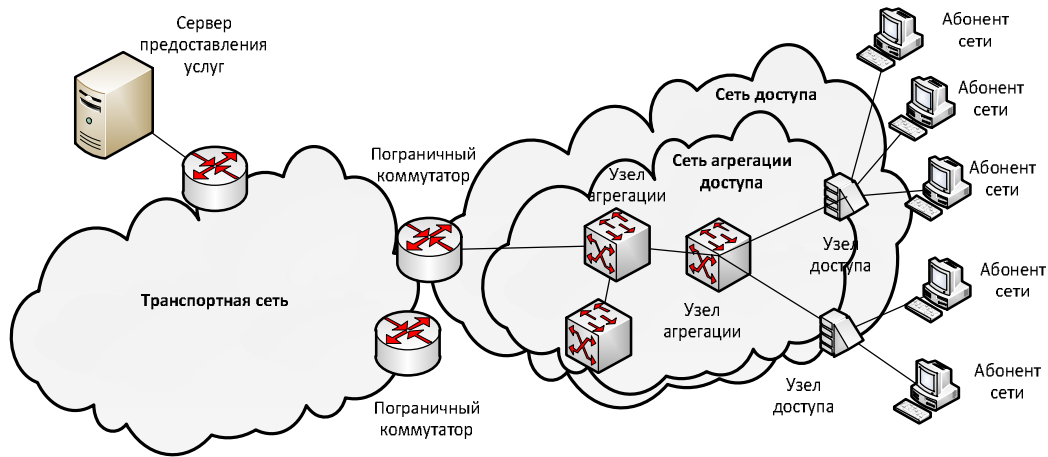


Рис. 1. Схема проектируемой телекоммуникационной системы

- определить места установки оборудования узлов доступа (подмножество  $Z'^{AN} \subseteq Z^{AN}$ );
- места организации узлов агрегирования (подмножество  $Z'^{SN} \subseteq Z^{SN}$ );
- пограничный коммутатор  $Z^{EN} \in Z^{EN}$ , посредством которого обеспечивается доступ в магистральный сегмент сети.

**Критерий оптимальности:** Максимум прибыли оператора связи, определяемой как разность дохода от предоставления услуг и приведенных затрат на организацию сети.

## 2. Решение задачи с использованием многослойного графа

Построим математическую модель решения задачи с использованием многослойных графов.

Согласно общей методике решения задачи синтеза телекоммуникационных систем [1] с использованием многослойных графов, мы должны:

- выделить в синтезируемой сети отдельные наложенные слои;
- каждый слой описать графом, описывающим связи на каждом из слоев;
- задать ребра, образующие связи между слоями.

Из анализа предметной области можно выделить следующие слои. Нижним слоем многослойного графа является слой, описывающий физическую топологию сети. Слои располагающиеся выше представляют собой услуги предоставляемые абонентам сети.

Граф нижнего слоя  $\Gamma^1 = (V^1, E^1)$  представляет собой избыточный граф, содержащий вершины и ребра – кандидаты на использования их в составе синтезируемой сети доступа.

В качестве вершин графа примем множество узлов-кандидатов  $Z: V^1 = Z$ , обозначим:  $V^{AN}$  – множество «терминальных» узлов,  $V^{AN} = Z^{AN}$ ;  $V^{SN}$  – множество «точек Штейнера»,  $V^{SN} = Z^{SN}$ ;  $V^{EN}$  – множество пограничных узлов,  $V^{EN} = Z^{EN}$ .

Ребрами графа являются линии связи, строительство которых возможно между узлами сети:

$$e_{ij}^1 = (v_i^1, v_j^1), e_{ij}^1 \in E^1, d_{ij}^Z \neq \infty.$$

Припишем каждому ребру вес, равный затратам на строительство линии связи

$$\alpha: E^1 \rightarrow \mathfrak{R}^{\geq 0}, \alpha(e_{ij}^1) = d_{ij}^Z.$$

Каждой вершине графа припишем вес, равный затратам на организацию в нем узла агрегации или узла доступа:

$$\beta: V^1 \rightarrow \mathfrak{R}^{\geq 0}, \beta(v_i^1) = d_i^{AN}, v_i^1 \in V^{AN},$$

$$\beta(v_i^1) = d_i^{SN}, v_i^1 \in V^{SN}.$$

Вышележащие слои МСГ, описывающие услуги, предоставляемые в мультисервисной сети. Графы  $\Gamma^l = (V^l, E^l)$ ,  $l = 2, \dots, |S| + 1$  имеют радиальную топологию, где центральной вершиной является вершина  $v_0^l$  – источник (центр) предоставляемой услуги  $s_{l-1}$ . Остальные вершины графа представляют абонентов сети, которым предоставляется данная услуга. Ребрам  $e_i^l = (v_0^l, v_i^l)$  графа  $\Gamma^l$  приписывается отрицательный вес  $-\omega(e_i^l)$ , равный доходу, получаемому оператором сети при предоставлении услуги  $s_{l-1}$  абоненту  $a_i$ :

$$\omega: E^l \rightarrow \mathfrak{R}^{\geq 0}, \omega(e_i^l) = \Omega(s_{l-1})q_{i-1}^l, e_i^l \in E^l.$$

Графы, описывающие различные слои МСГ, имеют связи, образуемые ребрами  $e_{ij} \in E$ . Графы  $\Gamma^l$  слоев  $l, l = 2, \dots, |S| + 1$  связываются с графом  $\Gamma^1$  слоя  $l = 1$  ребрами  $e_{10j} = (v_0^1, v_j^1)$ , которые соединяют вершины  $v_0^1 \in V^1$  с вершинами  $v_j^1 \in V^{EN}$ , а также ребра  $e_{1ki} = (v_k^1, v_i^1)$ , связывающие  $v_k^1 \in V^1$  с верши-

нами  $v_i^1 \in V^{AN}$ . Таким образом, решение задачи сводится к нахождению МСГ, имеющего связанные графы на уровнях  $l, l = 2, \dots, |S|+1$ , который является подграфом исходного многослойного графа и имеет минимальный вес.

Приведем математическую формулировку задачи.

**Задано:**  $MLG = (\Gamma, E)$  – исходный избыточный взвешенный МСГ, полученный согласно описанной выше методики.

**Необходимо найти:** МСГ  $MLG'$ , являющийся подграфом исходного избыточного МСГ  $MLG$ , имеющий связанные графы на уровнях  $l, l = 2, \dots, |S|+1$  такой, что вес результирующего МСГ, определяемый как сумма весов ребер и вершин входящих в его состав, был минимальным.

$$\sum_{l=2}^{|S|+1} \sum_{v_i^l \in V^l} [-\omega(e_i^l)] + \sum_{e_{ij}^l \in E^l} \alpha(e_{ij}^l) + \sum_{v_i^l \in V^l} \beta(v_i^l) \rightarrow \min ; (1)$$

$$MLG' = (\Gamma', E'), \quad \Gamma' = \{\Gamma^1, \Gamma^2\},$$

$$\Gamma^l = (V^l, E^l), \quad l = 1, 2,$$

$$\Gamma^l \subset \Gamma^1, \quad E^l \subset E^1, \quad E' \subset E. \quad (2)$$

$$\exists(e_i^1, e_j^1), \quad e_i^1, e_j^1 \in E^1, \quad \forall i, j, \quad v_i^1, v_j^1 \in V^1, \quad \forall l = 2, \dots, |S|+1. (3)$$

Выражение (1) определяет суммарный вес искомого МСГ. Условие того, что искомым МСГ  $MLG'$  является подграфом  $MLG$ , формулируется в виде выражения (2). Выражение (3) формулирует условие связанности всех графов слоев выше слоя  $l = 1$ .

### 3. Решение задачи проектирования топологии сети агрегации доступа

Метод решения задачи (1) – (3) заключается в последовательном выполнении процедур преобразования исходного МСГ и решения частных задач на нем. Данный метод содержит следующие этапы:

M1.1. Уменьшение размерности решаемой задачи посредством преобразования графа  $\Gamma^1 = (V^1, E^1, \alpha, \beta, \omega)$  к сокращенному виду  $\Gamma_0^1 = (V_0^1, E_0^1, \alpha_0, \beta_0, \omega_0)$ .

M1.2. Преобразование неориентированного графа  $\Gamma_0^1 = (V_0^1, E_0^1, \alpha_0, \beta_0, \omega_0)$  к ориентированному реберно-взвешенному  $\Gamma_D = (V_D, E_D, \alpha^D)$  с искусственно введенной корневой вершиной.

M1.3. Формулировка задачи поиска дерева минимального веса в графе  $\Gamma_D = (V_D, E_D, \alpha^D)$ , как задачи целочисленного линейного программирования.

M1.4. Преобразование полученного решения задачи M1.3 в решение задачи (1) – (3).

Для уменьшения размерности решаемой задачи применяется подготовительный этап [2]. Суть данного этапа заключается в удалении вершин и ребер исходного графа, которые гарантировано не входят в состав результирующего графа, а также выделении в составе графа заранее известных оптимальных конструкций и замена их на эквивалентные ребра и вершины с последующим обратным преобразованием в полученном решении модифицированной задачи. В результате выполнения мы получаем сокращенный граф  $\Gamma_0^1$ .

Неориентированный реберно- и вершино-взвешенный граф  $\Gamma_0^1$  преобразуем в реберно-взвешенный граф, с целью использования ранее известных методов решения задачи поиска дерева Штейнера, адаптированных для данной задачи. В основу положен эффективный алгоритм решения задачи PCST (Prize Collection Steiner Tree Problem) [3] с использованием метода ветвей и сечений (branch-and-cut) для ориентированного графа с корневой вершиной.

Преобразуем граф  $\Gamma_0^1(V_0^1, E_0^1, \alpha_0, \beta_0, \omega_0)$  в ориентированный реберно-взвешенный граф  $\Gamma_D(V_D, E_D, \alpha^D)$  с использованием приведенных ниже операций.

A.1. Включим в состав ориентированного графа  $\Gamma_D(V_D, E_D, \alpha^D)$   $V_D = \{v_i^D\}$ ,  $E^D = \{e_{ij}^D\}$ ,  $e = (v_i^D, v_j^D)$  все вершины графа  $\Gamma_0^1$  и искусственную корневую вершину  $v_r$ :

$$V_D = \left[ \bigcup_{i, v_i^1 \in V_0^1} v_i^D \right] \cup v_r.$$

A.2. В состав множества дуг  $E_D$  графа  $\Gamma_D$  для каждого ребра  $(v_i^1, v_j^1)$  неориентированного графа  $\Gamma_0^1$ , которое связывает вершины, не являющиеся вершинами, соответствующими пограничным коммутаторам, введем пару дуг  $(v_i^D, v_j^D)$  и  $(v_j^D, v_i^D)$ :

$$E^D = \bigcup_{i, j, (v_i^1, v_j^1) \in E_0^1, v_i^1, v_j^1 \in V^{EN}} \left[ (v_i^D, v_j^D) \cup (v_j^D, v_i^D) \right].$$

A.3. Для каждого ребра, соединяющего вершину, соответствующую пограничному коммутатору, с другими вершинами графа  $\Gamma_0^1$ , введем в состав множества дуг  $E_D$  графа  $\Gamma_D$  направленную дугу  $(v_i^D, v_j^D)$ :

$$E^D = E^D \cup \left[ \bigcup_{i, j, (v_i^1, v_j^1) \in E_0^1, v_i^1 \in V^{EN}, v_j^1 \in V_0^1 \setminus V^{EN}} (v_i^D, v_j^D) \right].$$

A.4. Введем в состав множества  $E_D$  направленные дуги, соединяющие корневую вершину  $v_r$  с вершинами соответствующими пограничным ком-

мутаторам:  $E^D = E^D \cup \left[ \bigcup_{j, v_j^D \in V^{EN}} (v_r, v_j^D) \right]$ .

$$= \begin{cases} \alpha_0(e_{ij}^0) + \beta(v_j^0) - \omega(v_j^0) & \forall (v_i^D, v_j^D) \in E^D, v_i^D \neq v_r; \\ 0 & \forall (v_r, v_j^D) \in E^D. \end{cases}$$

А.5. Назначим дугам графа  $\Gamma_D$  веса:  $\alpha^D(e_{ij}^D) =$

Пример преобразования графа приведен на рис. 2.

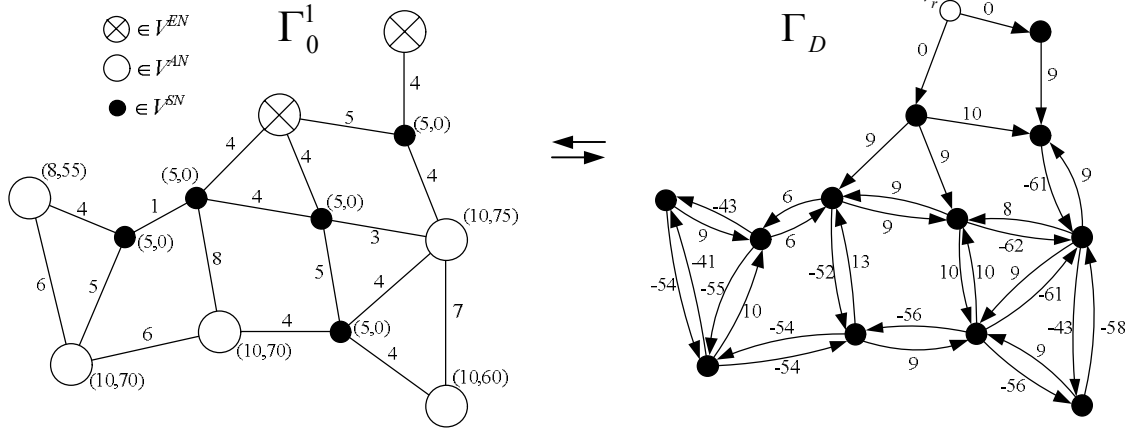


Рис. 2. Пример преобразования графа  $\Gamma_0^1$  в  $\Gamma_D$

Для того чтоб найти решение задачи (1) – (3), необходимо найти подграф  $ST_D$  графа  $\Gamma_D$ , являющийся деревом с корнем в вершине  $v_r$ , при этом степень вершины  $v_r$  должна быть равна единице  $\chi(v_r) = 1, v_r \in ST_D$  (проектируемая сеть агрегации доступа должна подключаться в транспортную сеть посредством единого пограничного коммутатора).

Сформулируем задачу поиска дерева Штейнера  $ST_D$  минимального веса в ориентированном графе  $\Gamma_D$  как задачу целочисленного линейного программирования (ЗЦЛП).

Введем вектор  $x \in \{0, 1\}^{|E_D|}$  и  $y \in \{0, 1\}^{|V_D|-1}$  следующим образом:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & (v_i^D, v_j^D) \in ST_D, \forall (v_i^D, v_j^D) \in E_D, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & v_i^D \in ST_D, \forall v_i^D \in V_D, v_i^D \neq v_r. \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Для того, чтобы результирующее дерево Штейнера  $ST_D$  было связанным, необходимо в постановку ЗЦЛП ввести ограничение. Для этого введем понятие сечения, отделяющего заданную вершину от корневой. В этом случае необходимым условием связности графа  $ST_D$  является условие существования дуги в графе  $ST_D$ , пересекающей данное сечение.

Обозначим множество  $V'_D$  вершин графа  $\Gamma_D$ ,  $V'_D \subset V_D$  и комплементарное множество  $\bar{V}'_D \subset V_D \setminus V'_D$ , разделенные ориентированными сечениями:  $\delta^+(V'_D) = \{(v_i^D, v_j^D) | v_i^D \in V'_D, v_j^D \in \bar{V}'_D\}$  и  $\delta^-(V'_D) = \{(v_i^D, v_j^D) | v_i^D \in \bar{V}'_D, v_j^D \in V'_D\}$ .

Задачу поиска дерева Штейнера  $ST_D$  минимального веса в ориентированном графе  $\Gamma_D$  можно записать следующим образом.

**Дано:**  $\Gamma_D(V_D, E_D, \alpha^D)$  – ориентированный реберно-взвешенный граф.

**Критерий оптимальности:**

$$\sum_{(v_i^D, v_j^D) \in E_D} \alpha^D(e_{ij}^D) x_{ij} + \sum_{v_i^D \in V_D} \omega(v_i^D) \rightarrow \min, \quad (4)$$

**Ограничения:**

$$\sum_{(v_j^D, v_i^D) \in E_D} x_{ji} = y_i, \quad \forall v_i^D \in V_D \setminus \{v_r\}, \quad (5)$$

$$x(\delta^-(V'_D)) \geq y_k, \quad v_k \in V'_D, v_r \notin V'_D, \forall V'_D \subset V_D, \quad (6)$$

$$\sum_{(v_r^D, v_i^D) \in E_D} x_{ri} = 1, \quad (7)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (v_i^D, v_j^D) \in E_D, \quad (8)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad \forall v_i^D \in V_D \setminus \{v_r\}. \quad (9)$$

Условие (5) гарантирует, что степень входа для вершин результирующего дерева равна единице, тем самым обеспечивается, что результирующий граф не будет иметь циклов и будет деревом. Условие (6) гарантирует, что для каждой вершины  $v_i^D$  результирующего дерева  $ST_D$  существует ориентированный путь из корня  $v_r$  в  $v_i^D$ . Этим условием обеспечивается связность результирующего графа. Условие (7) гарантирует, что степень корневой вершины равна единице, из чего следует, что только одна вершина из множества  $V^{EN}$  будет входить в результирующее дерево. Тем самым, проектируемая сеть агрегации доступа будет подключаться в транспорт-

ную сеть посредством единого пограничного коммутатора. Условия (8) и (9) гарантируют целочисленность аргументов  $x_{ij}$  и  $u_i$ .

Задача (4) – (9) решается с помощью пакетов математического моделирования, которые содержат алгоритмы решения задач целочисленного линейного программирования такие, как: MathLab, CPLEX, GLPK и др. В работе данная задача решалась с применением пакета ILOG CPLEX v.12.1.

Полученное в результате дерево Штейнера  $ST_D$  с использованием обратной процедуры преобразовывается в дерево  $T$ , являющегося подграфом исходного графа  $\Gamma^1$ , которое описывает топологию проектируемого фрагмента сети.

#### 4. Проектирование сети агрегации доступа при наличии дополнительных требований к связности сети

Сеть агрегации доступа обеспечивает соединение узлов доступа с транспортной сетью. Метод проектирования сети агрегации доступа, рассмотренный в предыдущем пункте, позволяет определить топологию сети, которая имеет древовидную структуру. Сеть с древовидной структурой не имеет избыточных связей, удаление которых не нарушает связность сети. Такая топология сети позволяет оператору сети получить максимальную прибыль. В то же время, нарушение работоспособности отдельного канала связи приводит к тому, что сеть становится несвязанной и, следовательно, целая группа абонентов сети не могут получать телекоммуникационные услуги.

Рассмотрим метод проектирования сети агрегации доступа при наличии дополнительных условий связанных с необходимостью наличия резервных путей между узлами доступа и пограничным коммутатором.

##### Математическая постановка задачи.

Математическая постановка задачи аналогична приведенным в п.1 и отличается в следующем:

- все множество мест  $Z^{AN} = \{z_i^{AN}\}$ , где возможна установка оборудования узла доступа, разбивается на два подмножества  $Z_1^{AN}$  и  $Z_2^{AN}$ ;

- для узлов доступа, входящих во множество  $Z_2^{AN}$ , выдвигается требование наличия резервных путей между узлом доступа и пограничным коммутатором;

- для узлов доступа, входящих во множество  $Z_1^{AN}$ , указанное выше требование не выдвигается.

##### Необходимо найти:

- определить места установки оборудования узлов доступа (подмножество  $Z'^{AN} \subseteq Z^{AN}$ );

- места организации узлов агрегирования (подмножество  $Z'^{SN} \subseteq Z^{SN}$ );

- пограничный коммутатор  $z^{EN} \in Z^{EN}$ , посредством которого обеспечивается доступ в магистральный сегмент сети;

- топологию проектируемой сети (множество каналов связи  $B = \{b_{ij}\}$ ,  $b_{ij} = (z_i, z_j)$ ), при условии, что между узлами  $z'_i \in Z_2^{AN}$  и пограничным коммутатором  $z^{EN} \in Z^{EN}$  существует два непересекающихся пути.

**Критерий оптимальности:** Максимум прибыли оператора связи, определяемая как разность дохода от предоставления услуг и приведенных затрат на организацию сети.

Построим математическую модель решения задачи с использованием многослойных графов. Для этого синтезируем исходный МСГ  $MLG$  с использованием методики, описанной в п. 2. Тогда математическая постановка задачи с использованием многослойных графов имеет следующий вид.

##### Постановка задачи с использованием МСГ.

**Задано:**  $MLG = (\Gamma, E)$  – исходный избыточный взвешенный МСГ, полученный согласно методики, описанной в п. 2.

**Необходимо найти:**  $MLG'$  – МСГ, являющийся подграфом исходного избыточного МСГ  $MLG$ , имеющий связанные графы на уровнях  $l, l = 2, \dots, |S|+1$  такой, что вес результирующего МСГ, определяемый как сумма весов ребер и вершин входящих в его состав, был минимальным.

$$\sum_{l=2}^{|S|+1} \sum_{v_i^l \in V^l} [-\omega(e_i^l)] + \sum_{e_{ij}^l \in E^l} \alpha(e_{ij}^l) + \sum_{v_i^l \in V^l} \beta(v_i^l) \rightarrow \min. \quad (10)$$

$$MLG' = (\Gamma', E'), \quad \Gamma' = \{\Gamma^1, \Gamma^2\},$$

$$\Gamma^l = (V^l, E^l), \quad l = 1, 2,$$

$$\Gamma^l \subset \Gamma^1, \quad E^l \subset E^1, \quad E' \subset E. \quad (11)$$

$$\exists (e_i^l, e_j^l), e_i^l, e_j^l \in E^1, \forall i, j, v_i^l, v_j^l \in V^l, \forall l = 2, \dots, |S|+1. \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \pi_1 = (v_{k_1}^1, \dots, v_{k_n'}^1), (v_{k_m}^1, v_{k_{m+1}}^1) \in E^1, \\ m = 1, \dots, n' - 1, k_1' = i, v_{k_n'}^1 = z^{EN}, \\ \exists \pi_2 = (v_{k_1}^1, \dots, v_{k_n''}^1), (v_{k_m}^1, v_{k_{m+1}}^1) \in E^1, \\ m = 1, \dots, n'' - 1, k_1'' = i, v_{k_n''}^1 = z^{EN}, \\ \pi_1 \cap \pi_2 = \{v_i^1, v_j^1\}, v_j^1 = z^{EN}, \\ \forall i, v_i^1 \in V_2'^{AN}. \end{array} \right. \quad (13)$$

Выражение (10) определяет суммарный вес результирующего МСГ  $MLG'$ .

Выражение (11) формулирует условие, что искомым МСГ  $MLG'$  является подграфом исходного МСГ  $MLG$ .

Выражение (12) является условием связности всех графов слоев выше первого.

Выражение (13) формулирует условие существование двух независимых путей между вершиной, соответствующей пограничному коммутатору, и любой вершиной из множества  $V_2^{AN}$ , соответствующих узлам доступа с дополнительно выдвинутыми требованиями к повышенной связности.

Метод решения задачи (10) – (13) заключается в последовательном выполнении процедур преобразования исходного МСГ и решения частных задач на нем. Данный метод содержит следующие этапы:

М2.1. Уменьшение размерности решаемой задачи посредством преобразования графа  $\Gamma^1 = (V^1, E^1, \alpha, \beta, \omega)$  к сокращенному виду  $\Gamma_0^1 = (V_0^1, E_0^1, \alpha_0, \beta_0, \omega_0)$ .

М2.2. Преобразование неориентированного графа  $\Gamma_0^1 = (V_0^1, E_0^1, \alpha_0, \beta_0, \omega_0)$  к ориентированному реберно-взвешенному  $\Gamma_D = (V_D, E_D, \alpha^D, \beta^D, \omega^D)$  с искусственно введенной корневой вершиной.

М2.3. Решаем задачу поиска путей передачи многопродуктового потока на графе  $\Gamma_D = (V_D, E_D, \alpha^D, \beta^D, \omega^D)$ .

М2.4. Преобразование полученного решения задачи М2.3 в решение задачи (10) – (13).

Для уменьшения размерности решаемой задачи выполняемой на этапе М2.1 применяем алгоритм, описанный в [2] без изменений.

Преобразование неориентированного графа  $\Gamma_0^1 = (V_0^1, E_0^1, \alpha_0, \beta_0, \omega_0)$  в ориентированный реберно-взвешенный  $\Gamma_D = (V_D, E_D, \alpha^D, \beta^D, \omega^D)$ , выполняемое на этапе М2.2, производим посредством выполнения шагов алгоритма А1.1-А1.4. В синтезируемом графе  $\Gamma_D$  сохраняются веса вершин, а в качестве весов дуг принимаются веса ребер исходного графа  $\Gamma_0^1$ .

Для решения задачи (10) – (13) в работе был применен подход, базирующийся на использовании многопродуктовой потоковой модели [4, 5]. Решение задачи сводится в отправке единичного продукта из корневой вершины  $v_r$  в вершины  $V^{AN}$ . Для реализации условия наличия резервных путей в сети между вершинами  $v_r$  и  $V_2^{AN}$  отправляются два вида продукта  $s^{ik}$  и  $s^{jk}$ , которые не могут совместно передаваться по одному и тому же ребру и через одни и те же вершины.

Сформулируем задачу нахождения многопродуктового потока как задачу целочисленного программирования. Введем обозначения:

$x_{ij}$  – переменная, отображающая, используется

ли ребро  $(v_i^D, v_j^D)$  для передачи потоков:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (v_i^D, v_j^D) \text{ используется;} \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \forall (v_i^D, v_j^D) \in E^D;$$

$s_{ij}^{ik}$  – переменная, отображающая величину по-

тока продукта  $s^{ik}$ , ассоциированного с вершиной  $v_k^D \in V^{AN}$  и передаваемого из вершины  $v_i^D$  в  $v_j^D$ ,

$$0 \leq s_{ij}^{ik} \leq 1;$$

$s_{ij}^{jk}$  – переменная, отображающая величину по-

тока продукта  $s^{jk}$ , ассоциированного с вершиной  $v_k^D \in V_2^{AN}$  и передаваемого из вершины  $v_i^D$  в  $v_j^D$ ,

$$0 \leq s_{ij}^{jk} \leq 1;$$

$y_i$  – переменная, отображающая, используется ли вершина  $v_i^D$  для передачи продуктов  $s^{ik}$  или  $s^{jk}$ :

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i^D \text{ используется;} \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \forall v_i^D \in V_D.$$

Задачу нахождения многопродуктового потока в ориентированном графе  $\Gamma^D$  запишем следующим образом, как задачу целочисленного линейного программирования.

**Дано:**  $\Gamma_D = (V_D, E_D, \alpha^D, \beta^D, \omega^D)$  – ориентированный реберно-взвешенный граф.

**Критерий оптимальности:**

$$\sum_{(v_i^D, v_j^D) \in E_D} \alpha^D(e_{ij}^D) x_{ij} + \sum_{v_i^D \in V_D} \beta^D(v_i^D) y_i + \sum_{v_i^D \in V^{AN}} \omega^D(v_i^D) (1 - y_i) \rightarrow \min; \quad (14)$$

$$\sum_{(v_i^D, v_j^D) \in E_D} s_{ij}^{ik} - \sum_{(v_j^D, v_i^D) \in E_D} s_{ji}^{ik} = \begin{cases} -y_k, & v_j^D = v_r; \\ y_k, & j = k; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\forall v_k \in V^{AN}, \forall v_j \in V; \quad (15)$$

$$\sum_{(v_i^D, v_j^D) \in E_D} s_{ij}^{jk} - \sum_{(v_j^D, v_i^D) \in E_D} s_{ji}^{jk} = \begin{cases} -y_k, & v_j^D = v_r; \\ y_k, & j = k; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\forall v_k \in V_2^{AN}, \forall v_j \in V; \quad (16)$$

$$s_{ij}^{ik} \leq x_{ij}, \quad v_i^D = v_r, \forall v_j^D \in V, \forall v_k^D \in V^{AN}; \quad (17)$$

$$s_{ij}^{ik} + s_{ji}^{jk} \leq x_{ij}, \quad \forall (v_i^D, v_j^D) \in E_D, \forall v_k^D \in V^{AN}; \quad (18)$$

$$s_{ij}^{nk} \leq x_{ij}, \quad v_i^D = v_r, \forall v_j^D \in V, \forall v_k^D \in V_2^{AN}; \quad (19)$$

$$s_{ij}^{nk} + s_{ji}^{nk} \leq x_{ij}, \quad \forall (v_i^D, v_j^D) \in E_D, \forall v_k \in V_2^{AN}; \quad (20)$$

$$s_{ij}^{nk} + s_{ji}^{nk} \leq x_{ij}, \quad \forall (v_i^D, v_j^D) \in E_D, \forall v_k \in V_2^{AN}; \quad (21)$$

$$s_{ij}^{nk} + s_{ji}^{nk} \leq x_{ij}, \quad \forall (v_i^D, v_j^D) \in E_D, \forall v_k \in V_2^{AN}. \quad (22)$$

Выражение (14) является целевой функцией и определяет суммарные затраты на строительство узлов сети, организацию каналов связи и величину потеряннного дохода от неоказания услуг.

Выражения (15) и (16) являются условиями сохранения потока, в которых учитываются корневая вершина, абонентские узлы и возможные узлы Штейнера.

Выражения (15) – (22) связывают потоковые переменные  $x_{ij}$  и предотвращают протекание потока в обратном направлении по одному и тому же ребру.

Для решения приведенной задачи целочисленного линейного программирования можно использовать стандартные программные средства, например CPLEX от ILOG.

### Заключение

В работе приведена постановка и решена задача синтеза топологии сети агрегации доступа в классе древовидных сетей согласно критерию максимума прибыли оператора связи. В результате проведенного анализа авторы пришли к выводу, что данная задача может быть сведена к задаче PCST – разновидности задачи Штейнера на графе.

Математическая постановка задачи базируется на применении математической модели многослойного графа. Применение данной модели дало возможность учесть логические связи между уровнями проектируемой телекоммуникационной системы, позволило провести проектирование системы в целом.

Моделирование проектируемого фрагмента мультисервисной телекоммуникационной системы ориентированным графом с входящей в его состав

корневой вершиной позволяет решить задачу ранее известным методом ветвей и сечений.

Посредством введения в состав ориентированного графа дополнительной вершины, являющейся корнем искомого дерева Штейнера, и соединения ее исходящими дугами с вершинами, соответствующими пограничным коммутаторам, позволяет совместно решать задачу синтеза топологии проектируемого фрагмента сети и выбора пограничного коммутатора, посредством которого осуществляется доступ в магистральный сегмент сети.

Предложенный метод решения задачи может быть использован для проектирования сети доступа при развертывании телекоммуникационных систем предоставления мультисервисных услуг «Triple Play» и «Multy Play» абонентам сети, при развертывании сетей FTTx и других сетей имеющих древовидную структуру.

### Список литературы

1. Агеев Д.В. Проектирование современных телекоммуникационных систем с использованием многоуровневых графов / Д.В. Агеев // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2010. – № 4. – С. 75-77.
2. Агеев Д.В. Синтез топологии сети агрегации доступа согласно критерию максимум прибыли оператора связи / Д.В. Агеев // Вісник Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій. – 2010. – Т.8, №3. – С. 235-241.
3. Ljubić I. An algorithmic framework for the exact solution of the prize-collecting steiner tree problem / I. Ljubić, R. Weiskircher, U. Pferschy, G. Klau, P. Mutzel, M. Fischetti // Mathematical Programming. – 2006. – Series B, 105(2-3). – P. 427-449.
4. Fischetti M. Facets of two Steiner arborescence polyhedra / M. Fischetti // Mathematical Programming. – 1991. – № 51. – P. 401-419.
5. Wagner D. A multi-commodity flow approach for the design of the last mile in real-world fiber optic networks / D. Wagner, G.R. Raidl, U. Pferschy, P. Mutzel, P. Bachhiesl // Operations Research Proceedings. – 2006. – Springer, 2007.

Поступила в редколлегию 22.10.2010

**Рецензент:** д-р техн. наук, доцент А.В. Лемешко, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

### ПРОЕКТУВАННЯ МЕРЕЖІ ДОСТУПУ МУЛЬТИСЕРВІСНОЇ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ З ВИКОРИСТАННЯМ БАГАТОШАРОВОГО ГРАФА

Д.В. Агєєв

Вирішується завдання синтезу топології мережі доступу телекомунікаційної системи згідно критерію максимуму прибутку оператора мережі, за відсутності і наявності додаткових вимог до зв'язності. Рішення задачі базується на застосуванні математичної моделі багатощарового графа.

**Ключові слова:** багатощаровий граф, мультисервісна телекомунікаційна система.

### PLANNING OF NETWORK OF ACCESS OF MULTISERVICE TELECOMMUNICATION SYSTEM WITH THE USE OF MULTI-LAYERED COUNT

D.V. Ageev

The task of synthesis of topology of network of access of the telecommunication system decides in obedience to the criterion of a maximum of income of operator of network, in default of and presence of additional requirements to the compendancy. The decision of task is based on application of mathematical model of multi-layered count.

**Keywords:** multi-layered count, multiservice telecommunication system.