УДК 621.658

Н.Ю. Ламнауэр

*Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков*

# ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ ВЫХОДА БИЕНИЯ ЗА ДОПУСК

*В докладе рассмотрено решение задачи нахождения модели распределения величины биения, как случайной величины, которая описывала бы процесс биения более точно, чем общепринятая модель Релея. Для построенной модели биения найдены числовые характеристики. Получены оценки параметров, определены наилучшие из них. Предложен метод оценки времени выхода биения за допуск.*

***Ключевые слова:*** *модель распределения величины биения.*

## Введение

Современный мир – это мир, который невозможно представить без множества машин и механизмов. От качества их работы зависит повседневная жизнь современного человека. 80% изделий машиностроения имеют узлы, которые вращаются, и поэтому актуальной является задача обеспечения качества вращающихся изделий. Одна из основных задач машиностроения – создание изделий с высокими качественными показателями – не может быть решена без развития науки о надежности и долговечности машин. Поэтому основной задачей, стоящей перед производителями, в области повышения качества изделий машиностроения, стала необходимость создания стройной математико-статистической теории надёжности вращающихся изделий.

Показатели качества машин имеют изменчивый характер, что является следствием погрешностей изготовления деталей и дополнительных изменений показателей их качества за счет технологии изготовления. Так для вращающихся изделий погрешности приводят к изменению динамического качества машин, появлению вибраций, шума, искажению поверхностей контакта и других нежелательных явлений.

Биение – один из показателей качества вращающихся изделий, который влияет на надежность и долговечность работы машин и механизмов. В современном мире большинство вращающихся изделий работают на высоких скоростях, и в этом случае контроль этого показателя качества становится очень важным. Потому актуальным является прогнозирования времени выхода биения за допуск в процессе конструирования или изготовления вращающихся изделий, которые применимы в различных машинах, а также определение этого времени при эксплуатации изделия.

## Основной материал

**Модель биения и её оценки.** Из определений радиального и торцевого биения следует, что случайная величина биения зависит от двух случайных величин X и Y. Поэтому случайная величина R, являющаяся их векторной суммой, положительна и может принимать значения от нуля до какой-то величины $r_b$, которую назовем - верхним порогом биения. Тогда в плоскости XOY плотность совместного распределения f(x, y) случайной точки (X;Y) зависит только от расстояния $r=\sqrt{x^2+y^2}$ точки (x; y) от начала координат f(x, y) = g(r). Для функции $r=\sqrt{x^2+y^2}$ линиями уровня служат окружности с центром в начале координат, поэтому в качестве новых координат удобно выбрать полярные координаты r, φ. Коэффициент искажения равен r, так как $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

На каждой линии r = const и координата φ изменяется от 0 до 2π. Следовательно, плотность распределения расстояния равна

$$f(r)=\int_0^{2\pi} g(r)\,r\,d\varphi = 2\pi r\,g(r)\,. \qquad (1)$$

В зависимости от распределения точки (X, Y), в круге получаются различные законы изменения величин биения.

Если предположить, что точка (X;Y) имеет круговое нормальное распределение, т.е. среднее значение случайного вектора равно нулю, $\sigma_x=\sigma_y=\sigma$ и отсутствует зависимость между X и Y, то плотность распределения имеет вид:

$$f(r)=\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Данное распределение неприменимо для биения, так как физически биение есть ограниченная величина, а у распределения Рэлея эта величина неограниченна.

Возможны и другие предположения [1]. Если предположить, что функция $g(r)$ в формуле (1) имеет степенной вид

$$g(r)=C(r_b-r)^\alpha;\quad (0\le r\le r_b),$$

то плотность распределения $f(r)$ из формулы (1) в точках $r = r_b$ и $r = 0$ равна нулю, что и должно быть, так как процесс биения ограничен.

Отсюда плотность распределения биения определяется формулой

$$f(r)=\frac{(2+\alpha)(1+\alpha)}{r_b^{2+\alpha}}r(r_b-r)^\alpha,\quad (\alpha>-1), \qquad (2)$$

где $r_b$ – масштабный параметр, α - параметр формы.

Модель (2) принадлежит к кривым Пирсона I типа.

Была найдена функция распределения случайной величины R, которая имеет вид:

$$F(r)=\begin{cases} 0, & r\le 0;\\ 1-\dfrac{(r_b-r)^{\alpha+1}(r_b+(1+\alpha)r)}{r_b^{2+\alpha}}, & 0\le r\le r_b;\\ 1, & r\ge r_b. \end{cases} \qquad (3)$$

Предлагаемая модель (2) имеет лучшие возможности по сравнению с моделью Пирсона I типа, так, например, она имеет функцию распределения в достаточно простом в виде.

Для модели биения (2) начальный момент к-го порядка имеет вид [2]:

$$M(R^к)=\frac{r_b^к(2+\alpha)(1+\alpha)\Gamma(к+2)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(к+3+\alpha)}\,.$$

Отсюда математическое ожидание случайной величины R имеет вид:

$$M(R)=\frac{2r_b}{\alpha+3}, \qquad (4)$$

а дисперсия описываться выражением

$$D(R)=\frac{2r_к^2(1+\alpha)}{(\alpha+3)^2(\alpha+4)}\,. \qquad (5)$$

Среднее квадратичное отклонение $\sigma(R)$:

$$\sigma(R)=\frac{r_b}{(\alpha+3)}\sqrt{\frac{2(1+\alpha)}{(\alpha+4)}}\,.$$

Коэффициент вариации V, определяемый по формуле:

$$V=\sqrt{\frac{1+\alpha}{2(4+\alpha)}}\,.$$

Для модели (2) коэффициент асимметрии определяется по формуле

$$\sqrt{\eta_1}=\frac{2(\alpha-1)\sqrt{4+\alpha}}{(5+\alpha)\sqrt{2(\alpha+1)}},$$

а коэффициент эксцесса имеет вид:

$$\eta_2=\frac{6(\alpha+4)(\alpha^2+2\alpha+3)}{(\alpha+1)(\alpha+5)(\alpha+6)}\,.$$

Мода модели (2) определяется выражением:

$$r_{mod} = \frac{r_b}{1+\alpha}.$$

Найденные числовые характеристики для модели (2) позволят использовать их для решения задач, связанных с оценкой величин биения.

Заметим, что самая лучшая модель совсем непригодна для решения практических задач пока не будут найдены неплохие оценки ее параметров. Поэтому необходимо найти эти оценки, а затем изучить, какие оценки являются хорошими.

По методу максимального правдоподобия [3] оценка параметра $\alpha$ модели (2) имеют вид

$$\alpha_4 = \frac{2n}{r_b \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_b - r_i} - n}, \qquad (6)$$

где $n$ – объём экспериментов, а $r_i$ – экспериментальные значения.

Оценка параметра $r_b$ находится из решения уравнения

$$\frac{3r_b^2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_b - r_i}\right)^2 - 2nr_b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_b - r_i} - n^2}{2r_b^2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_b - r_i}\right)^2 + 2nr_b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_b - r_i}} = \qquad (7)$$

$$= n\ln r_b - \sum_{i=1}^{n}\ln\left(r_b - r_i\right),$$

которую обозначим через $r_{b4}$.

В системе MAPLE составлена программа оценки параметров $r_b$ и $\alpha$ для модели (2) по методу максимального правдоподобия. В программу вносятся только данные испытаний объёма $n$.

По методу моментов, оценки параметров $r_b$ и $\alpha$ для модели (2), находятся из формулы математического ожидания (4) и формулы дисперсии (5), приравнивая выборочное среднее $\overline{r}$ и выборочную дисперсию $D_b(R)$ к теоретическим моментам:

$$\alpha_1 = \frac{8D_b(R) - \overline{r}^2}{\overline{r}^2 - 2D_b(R)} \qquad (8)$$

$$\text{и } r_{b1} = \frac{\overline{r}(\alpha_1 + 3)}{2}, \qquad (9)$$

где оценка $r_{b1}$ параметра $r_b$ находится по найденному $\alpha_1$ из (8).

В работе [4] предлагается метод получения упрощённых оценок параметров любого распределения, который для двухпараметрического распределения требует знания только математического ожидания первой и второй порядковых статистик выборки объёма n = 2. Воспользуемся данным методом и найдём оценки параметров модели биения (2).

Для модели (2) математическое ожидание первой порядковой статистики при объёме выборки n = 2 имеет вид:

$$M_2\left[R_{(1)}\right] = 2(2+\alpha)(1+\alpha)\int_0^{r_b} r^2(r_b - r)^{2\alpha+1} \times$$

$$\times\frac{(r_b + (1+\alpha)r)}{r_b^{4+2\alpha}}dr = \frac{(8+5\alpha)r_b}{(5+2\alpha)(3+2\alpha)}.$$

Математическое ожидание второй порядковой статистики из выборки объема $n = 2$, определяется выражением

$$M_2\left(R_{(2)}\right) = \frac{4r_b}{\alpha+3} - \frac{(8+5\alpha)r_b}{(5+2\alpha)(3+2\alpha)} =$$

$$= \frac{11\alpha^2 + 41\alpha + 36}{(\alpha+3)(5+2\alpha)(3+2\alpha)}r_b.$$

Пользуясь формулой из работы [4] имеем уравнение

$$\frac{11\alpha^2 + 41\alpha + 36}{5\alpha^2 + 23\alpha + 24} = \frac{\sum_{i=2}^{n}(i-1)r_{(i)}}{\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)r_{(i)}}, \qquad (10)$$

решая которое относительно параметра формы $\alpha$, получаем оценку этого параметра $-\alpha_3$. Имея данную оценку $\alpha_3$, получим оценку параметра $r_b$:

$$r_{b3} = \frac{2(5+2\alpha_3)(3+2\alpha_3)}{n(n-1)(8+5\alpha_3)}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)r_{(i)}. \qquad (11)$$

Другой метод получения оценок параметров распределений на примере модели (2) рассмотрен в [3].

Оценку $r_{b2}$ параметра $r_b$ получаем из решения уравнения

$$(n-1)(2r_{b2} - 2\overline{r})(2r_{b2} - \overline{r})\left(\frac{r_{(n)}}{\overline{r}}\right)^2(r_{b2} - r_{(n)})^{\frac{2r_{b2}-2\overline{r}}{\overline{r}}} +$$

$$+ r_{b2}^{\frac{2r_{b2}-\overline{r}}{\overline{r}}}\left(r_{b2} - \frac{(2r_{b2} - 2\overline{r})r_{(n)}}{\overline{r}}\right) -$$

$$-(r_{b2} - r_{(n)})^{\frac{2r_{b2}-2\overline{r}}{\overline{r}}}\left(r_{b2}^2 - \frac{(2r_{b2} - 2\overline{r})^2 r_{(n)}}{\overline{r}^2}\right) = 0, \qquad (12)$$

где $r_{(n)}$ – максимальное выборочное значение, а $\overline{r}$ – среднее выборочное значение.

Оценка $\alpha_2$ параметра формы $\alpha$ для модели (2) имеет вид:

$$\alpha_2 = \frac{2r_{b2}}{\overline{r}} - 3. \qquad (13)$$

Статистический анализ [] показал, что близкой к оптимальной оценке являются оценки (8) и (9), поэтому их можно применять для малой выборке.

**Прогнозирование времени работы изделия по параметру биения.** Имея небольшое количество испытаний, например, n = 7 некоторый момент времени $t_1$ определяем по формулам (8) и (9) оценку верхнего порога $r_b$. Находим и в другие моменты времени $t$ оценку верхнего порога $r_b$ по формулам (8) и (9). Далее находим с использованием программы в системе MAPLE аппроксимирующий многочлен и определяем, при каком значении $t$ данный аппроксимирующий многочлен пересекается с допуском на биение (рис. 1).

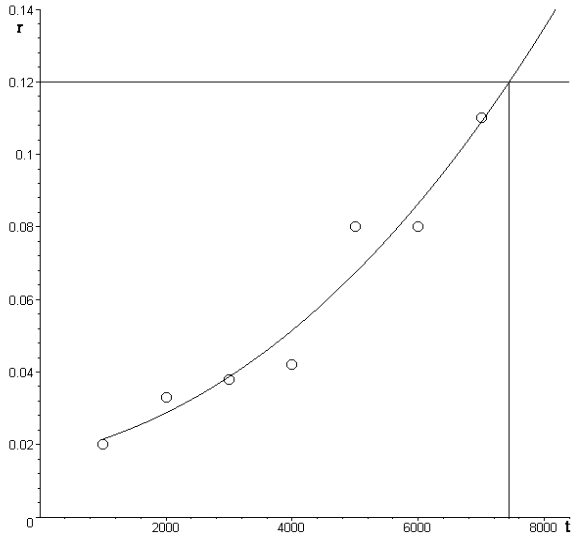


Рис. 1. Аппроксимация прогнозируемого верхнего порога радиального биения $r_b$ многочленом третьей степени и геометрическое представление определения времени $t$ работы изделия до отказа по допустимому биению

Так, например, для работающих семи изделий были найдены по формулам (8) и (9) значения верхнего порога 0,02; 0,033; 0,038; 0,042; 0,08; 0,08; 0,11 мм для моментов времени соответственно 1000; 2000; 3000; 4000: 5000; 6000; 7000 час (рис. 1). Аппроксимируя данные значения кубическим многочленом и приравнивая его к допуску 0,12 мм, получаем, решая данное уравнение, прогнозируемое время работы изделия до отказа по биению $t = 7446$ час.

## Выводы

1. Предложенная модель и найденные для неё оценки параметров позволяют по малой выборке дать прогноз верхнего порога биения в любой момент времени $t$.

2. По найденным оценкам верхнего порога биения в любой момент времени $t$ предлагается методика прогноза времени выхода биения за допуск.

3. Предлагаемая методика позволяет в процессе конструирования или изготовления вращающихся изделий, которые применимы в различных изделиях машиностроения, дать прогноз времени выхода биения за допуск, что имеет большое практическое значение при эксплуатации изделия.

## Список литературы

1. *Ламнауэр Н.Ю. Технологическое обеспечение качества соединений по параметру биения / Н.Ю. Ламнауэр // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». – Х., 2005. – Вип. 57. – С. 56-61.*

2. *Ламнауер Н.Ю. Прогнозирование начала времени профилактических работ соединений с ограниченным биением / Н.Ю. Ламнауэр // Високі технології в машинобудуванні: зб. наук. пр. НТУ «ХПІ». – Х., 2006. – Вип. 1 (12). – С. 245-250.*

3. *Арпентьев Б.М. Оценка качества сборки соединений по критерию биения / Б.М. Арпентьев, Н.Ю. Ламнауэр // Вісник Національного технічного університета «ХПІ». – Х., 2005. – Вип. 9. – С. 48-54.*

4. *Куцин А.Н. Оценка качества технических систем / А.Н. Куцин, Ю.И. Созонов // Сборка в машиностроении, приборостроении. – М., 2004. – № 7. – С. 23-27.*

5. *Ламнауэр Н.Ю. Оценка надежности изделий по радиальному биению / Н.Ю. Ламнауэр // Вестник Национального технического университета «ХПИ». – Х., 2005. – Вып. 39. – С. 29-33.*

*Поступила в редколлегию 2.12.2010*

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. А.Я. Мовшович, Харьковский НИИ технологии машиностроения, Харьков.

### ОЦІНКА ЧАСУ ВИХОДУ БИТТЯ ЗА ДОПУСК

Н.Ю. Ламнауер

*Вирішувалася задача знаходження моделі розподілу величини биття, як випадкової величини, яка описувала б процес биття більш точно, ніж загальноприйнята модель Релея. Для побудованої моделі биття знайдені її числові характеристики. Отримано оцінки її параметрів, визначені з них найкращі. Запропоновано метод оцінки часу виходу биття за допуск.*

***Ключові слова:*** *модель розподілу величини биття.*

### ESTIMATION OF TIME OF OUTPUT OF BEATING FOR ADMITTANCE

N.Yu. Lamnauer

*Solved the problem of finding a model of the distribution of heartbeats, as a random variable that would describe the process of beating more accurately than the conventional model of Rayleigh. To construct a model beats found its numerical characteristics. Obtained estimates of its parameters, determined from them the best. A method for estimating time-to beats per admission.*

***Keywords:*** *model of distributing of size of beating.*