УДК 004.932.2:004.931.4

А.А. Бут, А.И. Пресняков, В.В. Шляхов

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ПРЕДИКАТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЗАДАНИЯ МУЛЬТИГРУПП

В статье предлагается подход к решению важного класса интеллектуальных задач связанных с агрегированием информации. Предлагается и развивается математический аппарат, использование которого позволяет формализовать различные задачи теории искусственного интеллекта.

Ключевые слова: *n-арные отношения, предикат, мультигруппа, мультиалгебраическая система.*

Введение

В теории искусственного интеллекта мы сталкиваемся с необходимостью изучения функционирования и построения математических моделей, так называемых психофизических или сенсорных систем, которые в свою очередь описывают работу тех или иных функций естественного интеллекта. С другой стороны, основой для любого математического моделирования является эксперимент. Стоит отметить, что при изучении психофизических систем возникает ситуация, когда в эксперименте можно фиксировать лишь сравнительную реакцию индивидуума на подаваемые входные стимулы. При этом сами стимулы могут быть разной природы и их количество может быть различно.

Сравнительная реакция и многообразие стимулов приводит к необходимости использования математического аппарата n-арных отношений. Формальные отношения некоторые стимулы отличают, а некоторые – нет. Фактически это означает, что исходные данные гранулируются или определенным образом факторизуются и таким образом возникают алгебраические структуры, заданные на множествах, а не на единичных (неделимых) элементах. Такие объекты в работах [1 – 4] названы мультиалгебраическими системами. Основной целью данной статьи является выяснение условий существования некоторой частной мультиалгебраической системы.

Формализация факторизации данных на базе аппарата мультиалгебраических систем

Опираясь на классическую теорию алгебраических систем [5], определим некоторые понятия, являющиеся базовыми для дальнейшего рассмотрения.

Пусть задано множество произвольной природы Ω и разбиение его на систему непересекающихся подмножеств $F_{\Omega} = \{A_1, \dots\}$; $A_1 \subset \Omega$. Допустим, что система непересекающихся подмножеств F_{Ω} представляет собой некоторую алгебраическую структуру (группу, кольцо, тело, поле и т.д.), с заданной на ней или на ее декартовых степенях набором функционалов (норма, скалярное произведение, метрика и т.д.), и еще связанную с другой алгебраической структурой, например некоторым полем, и таким образом может представлять собой либо линейное, либо гильбертово, либо какое-нибудь другое пространство над полем P. Предположим, что на элементах F_{Ω} у нас нет возможности проверки каких-либо аксиом, характеризующих ее как определенную алгебраическую систему, нам доступны лишь элементы исходного множества Ω. То есть образуется, в определенном смысле двухуровневая структура: алгебраическая система задана на элементах F_{Ω} (верхний уровень), а ее аксиоматика может быть получена только на базе свойств элементов множества Ω (нижний уровень). Алгебраической системой (или просто системой) называется объект $U = \langle A, \Sigma_H, \Sigma_P \rangle$ состоящий из трех множеств: непустого множества A, множества операций $\Sigma_H = \{H_0, \dots, H_{\xi}, \dots\}$, определенных на множестве A и множества отношений $\Sigma_P = \{P_0, \dots, P_{\eta}, \dots\}$, заданных на множестве A. Множество A называется носителем или основным множеством системы U, а его элементы – элементами системы U. Объединяя множества Σ_H и Σ_P и полагая $\Sigma = \Sigma_H \cup \Sigma_P$, сможем записать систему более кратко: $U = \langle A, \Sigma \rangle$. Алгебраическая система $U = \langle A, \Sigma \rangle$ называется алгеброй, если $\Sigma_P = \varnothing$ (т.е. заданы одни операции), и моделью, если $\Sigma_P = \varnothing$ (т.е. заданы одни отношения или предикаты). Теперь перейдем к нашей ситуации. У нас носитель Ω разбивается на систему непересекающихся подмножеств F_{Ω}, т.е. на нем всегда задан предикат E-эквивалентности. На этом же носителе могут быть заданы другие предикаты (и только они, а не операции – таково ограничение:

фиксировать операции мы не можем) $S_0,...,S_\gamma,...$ и все это происходит на так называемом нижнем “уровне”, т.е. на элементах Ω. На этом “уровне” мы имеем двойку: $\langle\Omega,\Sigma_S\rangle$, где $\Sigma_S=\{E,S_0,...,S_\eta,...\}$, другими словами модель, но такую, что на верхнем уровне: на элементах F_Ω мы имеем обычную алгебраическую систему, у которых все три ее компонента могут быть непустыми. Такие конструкции мы будем называть мультиалгебраическими системами и ниже дадим их определение. Мультиалгебраической системой называется модель, т.е. объект $\Im=\langle\Omega,\Sigma_S\rangle$, состоящий из двух множеств: непустого множества Ω и непустого множества предикатов $\Sigma_S=\{E,S_0,...,S_\eta,...\}$, обязательным элементом которого является предикат эквивалентности E, так связанный с остальным набором предикатов множества Σ_S, что на носителе F_Ω (классах эквивалентности предиката E) множеством Σ_S индуцируется множества $\Sigma_H=\{H_0,...,H_\xi,...\}$-операции и $\Sigma_P=\{P_0,...,P_\eta,...\}$-предикаты такие, что тройка $U=\langle F_\Omega,\Sigma_H,\Sigma_P\rangle$ представляют собой обычную алгебраическую систему.

Корректность данного определения устанавливается приведением примера объекта ему удовлетворяющего (это мы сделаем ниже). Более того, ниже мы покажем, что любая алгебраическая система может быть представлена в виде мультисистемы или модели с непустым вторым компонентом, включающим предикат эквивалентности E. Нами также будет установлена связь между элементами множества Σ_S, о которой идет речь в определении и которая характеризует модель как мультиалгебраическую систему. И, наконец, мы покажем, что мультисистемы и их свойства наиболее приемлемы или наиболее адекватно описывают ситуацию, в которую попадает исследователь при математическом моделировании реальных систем.

Приведем пример мультиалгебраической системы.

Рассмотрим в качестве множества $\Omega=N$ – множество натуральных чисел, F_Ω – разбиение этих чисел на два класса — четные и нечетные числа, т.е. $F_\Omega=\{ч,н\}$ (ч – множество четных чисел, н – множество нечетных натуральных чисел) и два предиката E и S, заданных на N^2 и N^3 соответственно ($N^k=\underbrace{N\times N\times...\times N}_{k}$ – прямое произведение), равенствами:

$$E(n_1,n_2)=\begin{cases}1,\left\{\dfrac{n_1}{2}\right\}=\left\{\dfrac{n_2}{2}\right\};\\ 0,\left\{\dfrac{n_1}{2}\right\}\neq\left\{\dfrac{n_2}{2}\right\};\end{cases}\qquad(1)$$

$$S(n_1,n_2,n_3)=\begin{cases}1,\left\{\dfrac{(n_1+n_2)}{2}\right\}=\left\{\dfrac{n_3}{2}\right\};\\ 0,\left\{\dfrac{(n_1+n_2)}{2}\right\}\neq\left\{\dfrac{n_3}{2}\right\};\end{cases}\qquad(2)$$

т.е. $\Sigma_S=\{E,S\}$, а $\left\{\dfrac{n}{2}\right\}$ – дробная часть числа.

Нетрудно заметить, что предикаты E и S, определенные на элементах $\Omega=N$ (нижний уровень), индуцируют на множестве $\Omega=N$ разбиение на два класса $F_\Omega=\{ч,н\}$ (предикат E), а на множестве F_Ω (верхний уровень) индуцируется операция (бинарная) H за счет предиката S следующим образом: два элемента $A_1,A_1\in F_\Omega$ соответствуют третьему $A_3\in F_\Omega$ тогда и только тогда, когда найдутся представители этого классов $n_i\in A_i$, $i=\overline{1,3}$, для которых $S(n_1,n_2,n_3)=1$. Непосредственная проверка (предикаты E и S заданы в явном виде равенствами (1) и (2)) позволяет убедиться, что классов разбиения два и операция H исходя из правила, сформулированного выше, и вида S представляет собой обычное сложение по модулю два, задающееся в виде табл. 1:

Таблица 1

Сложение по модулю два

H:	ч	н
ч	ч	н
н	н	ч

а алгебраическая структура (или алгебра) U=$\langle F_\Omega,H\rangle$ – обычная конечная абелева группа второго порядка.

Таким образом, из примера вытекает, что модель $\Im=\langle N,\{E,S\}\rangle$, где E,S заданы равенства (1) и (2) индуцирует алгебру U=$\langle F_\Omega,H\rangle$ – абелева группа второго порядка. Поэтому в соответствии с нашим определением $\Im$ – мультиалгебраическая система или в нашей терминологии конечная абелева мультигруппа второго порядка. Ясно, что если рассматривать деление не на 2, а скажем на k, т.е. в равенствах (1), (2) заменить число 2, стоящее под знаком дробной части на число k, то мы получим пример конечной абелевой мультигруппы k-го порядка.

Окончательно, на базе приведенных примеров мы можем сделать вывод о том, что мультиалгебраические системы, в виде моделей, существуют (и не одна), следовательно, данное нами определение вполне корректно. Возникает вопрос: любая ли модель является мультиалгебраической системой? Ответ на этот вопрос очевиден- не любая, поскольку в определении сказано, что вторая компонента $\sum_S$ содержит обязательно, хотя бы один предикат эквивалентности E. Но тогда возникает другой вопрос: если не любая модель является мультиалгебраической системой, то какие из них являются, а какие не являются? Далее: могут ли быть найдены, что-то типа характеристических свойств мультиалгебраических систем, или есть ли для них аналог теоремы существования? В вырожденной ситуации ответ на этот вопрос довольно прост. Необходимые и достаточные условия для существования тривиальных мультиалгебраических систем мы можем указать. Действительно рассмотрим модели вида $\Im = \langle \Omega, \{E\} \rangle$, т.е. непустое множество Ω, с заданным на нем отношением эквивалентности в виде предиката *E*. Тогда на классах эквивалентности F_Ω как на носителе индуцируется обычная алгебраическая система $U = \langle F_\Omega, \varnothing, \varnothing \rangle$, которая вырождена или тривиальна, т.е. без операций и отношений. Естественно, что нас будет интересовать вопрос, когда алгебраическая система U с носителем F_Ω имеет непустые вторую или третью компоненты. Для этого необходимо, чтобы элементы модели $\Im$, входящие в множество $\sum_S$ были определенным образом связанны друг с другом. В рассматриваемом нами примере эта связь заключается в том, что например, для предикатов E и S выполняется свойство:

$\forall n_3, n_3' \in N$ таких, что $S(n_1, n_2, n_3) = 1$ и $S(n_1, n_2, n_3') = 1$ вытекает $E(n_3, n_3') = 1$.

Имеют место и другие взаимосвязи. На том, каким общим условиям должны удовлетворять элементы множества $\sum_S$, для того, чтобы модель $\Im = \{\Omega, \sum_S\}$ была мультиалгебраической системой, мы остановимся ниже. В целом, в рамках приведенного примера несогласованность E и S может выражаться просто, если предикат S положить

$$S(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} 1, \left\{\dfrac{n_1 + n_2}{3}\right\} = \left\{\dfrac{n_3}{3}\right\}; \\ 0, \left\{\dfrac{n_1 + n_2}{3}\right\} \neq \left\{\dfrac{n_3}{3}\right\}, \end{cases} \tag{3}$$

то получим нетривиальную модель $\Im = \langle \Omega, \{E, S\} \rangle$, которая мультиалгебраической системой не является. Действительно, если E и S задаются равенствами (1) и (2) соответственно, то ни операцию, ни какое-либо отношение (предикат) на классах $F_\Omega = \{ч, н\}$ задать будет невозможно, т.к. значения предиката S существенным образом будет зависеть от представителя класса. Например, из (3) вытекает, что $S(2,5,7) = 1$, а $S(2,5,9) = 0$, несмотря на то, что $7, 9 \in H$ – принадлежат одному классу. Такие примеры могут быть приведены по каждому из аргументов предиката S. Таким образом, мы можем сделать вывод: не всякая модель представляет собой мультиалгебраическую систему, для того, чтобы это происходило, чтобы элементы множества $\sum_S$ удовлетворяли определенным условиям, на поиске которых мы остановимся ниже.

Наконец, заметим, что понятие мультиалгебраической системы близко к понятиям фактор алгебраических систем.

Исходя из нашего определения такие объекты как: фактор-группы, кольца, поля, алгебры являются мультиалгебраическими системами (если считать, что любая $n-$арная операция это $n+1$-арное отношение). Однако обратное неверно. Приведенный нами пример не является ни каким "фактором", т.к. предикат S не задает операций на $\Omega = N$. Таким образом, понятие мультиалгебраической системы является, на наш взгляд, расширением понятия фактор-алгебраической системы.

Важным понятием для обычных алгебраических систем является понятие изоморфизма. Отношение изоморфизма между алгебраическими системами рефлексивно, симметрично и транзитивно. Поэтому все алгебраические системы распадаются на классы изоморфных между собой систем. Теория алгебраических систем изучает преимущественно лишь те свойства, которые сохраняются при изоморфизме и которые, таким образом, одинаковы у всех изоморфных систем. Эти свойства часто называют абстрактными свойствами систем. Более того, считается, что абстрактные свойства системы – это свойства главных операций и предикатов системы, не зависящие от природы элементов, сглаживающих систему. Поэтому, еще принято, называть их аксиомами, а весь их набор – аксиоматикой той или иной алгебраической системы. Так есть аксиомы групп, колец, полей, линейных пространств и других алгебраических систем. И здесь важно подчеркнуть: для того чтобы задать алгебраическую систему U нужно задать тройку множеств $\langle A, \sum_H, \sum_P \rangle$, а для того, чтобы ее распознать, идентифицировать или построить математическую модель в виде алгебраической системы того или иного типа, необходимо установить аксиоматику этого типа алгебраических систем, а затем проверить ее выполнение в эксперименте.

Предикатная модель в виде мультигруппы

Будем предполагать, что система обработки входных сигналов реализует своим поведением четыре предиката, заданных на соответствующей декартовой степени множества M (входные сигналы): один одноместный $P(x)$, один двуместный $E(x,y)$ и два трехместных $S(x,y,z), T(x,y,z)$. Символами x,y,z обозначены входные сигналы системы. Выходными сигналами системы служат элементы 0 и 1, которые являются значениями перечисленных предикатов.

Предикат $P(x)$ формирует классы прообразов коэффициентов, которые могут быть приняты в качестве самих коэффициентов. Предикат $E(x,y)$ – это предикат эквивалентности, заданный на $M \times M$. Он формирует классы прообразов векторов, которые могут быть приняты в качестве самих векторов. Предикат $S(x,y,z)$ задан на P^3, он определяет операцию сложения коэффициентов. Предикат $T(x,y,z)$ задан на $P \times M \times M$, он определяет операцию умножения коэффициентов на вектор. Рассмотрим множество M, на котором заданы отношения $E(x,y), S(x,y,z), P(x), T(x,y,z)$, удовлетворяющие следующим свойствам:

1. $E(x,x)=1;$
2. $E(x,y)=1 \Rightarrow E(y,x)=1;$
3. $E(x,y)=1, E(y,z)=1 \Rightarrow E(x,z)=1;$
4. $\forall x,y \exists\ z : S(x,y,z)=1;$
5. $S(x,y,z)=1, S(x,y,z')=1 \Rightarrow E(z,z')=1;$
6. $S(x,y,z)=1, S(x,y',z)=1 \Rightarrow E(y,y')=1;$
7. $S(x,y,z)=1, S(x',y,z)=1 \Rightarrow E(x,x')=1;$
8. $S(x,y,z)=1 \Rightarrow S(y,x,z)=1;$
9. $S(x,y,z)=1, E(z,z')=1 \Rightarrow S(x,y,z')=1;$
10. $S(x,y,z)=1, E(y,y')=1 \Rightarrow S(x,y',z)=1;$
11. $S(x,y,z)=1, E(x,x')=1 \Rightarrow S(x',y,z)=1;$
12. $S(x,y,z)=1, S(z,t,r)=$ $=1, S(y,t,p)=1 \Rightarrow S(x,p,r)=1;$
13. $\exists 0 : S(x,y,x)=1 \Rightarrow E(y,o)=1;$
14. $\forall x \exists\ (-x) : S(x,-x,y)=1 \Rightarrow E(y,0)=1$.

В этом случае множество M разбивается на классы эквивалентности отношением $E(x,y)$. Классы эквивалентности будем обозначать $A, B, C, R, T, ...,$ а все множество классов N. Тогда, как показано в работе [6], $E(x,y)$ представим в виде

$$E(x,y)=D(Fx,Fy),$$

где D – предикат равенства на $N \times N$, а $F : M \to N$ (причем $Fx = Fy \Leftrightarrow E(x,y)=1$).

Наша задача состоит в том, чтобы показать, что заданные отношения индуцируют структуру n-мерного линейного пространства на классах эквивалентности.

Утверждение. Если на классах эквивалентности ввести операцию (сложения) по правилу $A+B=C$ тогда и только тогда, когда $\forall x,y,z$:

$$x \in A,\ y \in B,\ z \in C,\ S(x,y,z)=1,$$

то определение будет корректным и относительно данной операции N образует абелеву группу.

Доказательство. Сначала покажем корректность определения. Выделим произвольным образом два класса эквивалентности $A,B \in N$ и два представителя каждого класса $x \in A, y \in B$. Тогда из свойства 4) вытекает, что найдется $z \in C$, для которого $S(x,y,z)=1$. Это означает, что $A+B=C$ Таким образом, операция определена на любых парах $A,B \in N$, более того, единственным образом. Действительно, пусть $C' \neq C$, и

$$A+B=C,\ A+B=C'.$$

Тогда для произвольного $z' \in C'$ имеем $S(x,y,z')=1$. С учетом того, что $S(x,y,z)=1$, из свойства 5) получим $E(z,z')=1$ или $z' \in C$. Значит, $C \cap C' \neq \varnothing$ а поскольку различные классы имеют пустое пересечение, то $C \in C'$. Получили противоречие. Теперь покажем, что класс *Z* не зависит от выбора $x \in A$ и $y \in B$. Допустим, $x, x' \in A$ и $y, y' \in B$. Тогда, так как $S(x,y,z)=1$ и $E(x',x)=1$, то на основании свойства 11) получим $S(x',y,z)=1$. Далее, учитывая свойство 10) и равенство $E(y',y)=1$, будем иметь, что $S(x',y',z)=1$, но это и означает, что операция сложения не зависит от выбора элементов в классах A и B. Следовательно, операция, введенная нами, корректна.

Покажем, что относительно этой операции N образует абелеву группу.

Допустим, $A+B=C$. Тогда для любых $x \in A, y \in B, z \in C$ выполняется $S(x,y,z)=1$. В этом случае из свойства 8) вытекает $S(x,y,z)=1$ или $A+B=C$. Таким образом, $A+B=B+A$, следовательно, операция коммутативна.

Она также и ассоциативна. Пусть $(A+B)+C=R, A+B=T, B+C=G$. Тогда для представителей классов выполняются равенства $S(x,y,t)=1, S(y,z,g)=1, S(t,z,r)=1$. С учетом свойства 12) получим $S(x,g,r)=1$. Это означает $A+G=R$ или $A+(B+C)=R$, т.е.

$$(A+B)+C=A+(B+C),$$

значит, операция ассоциативна.

Рассмотрим свойство 13. В нем утверждается, что существует $O \in M$ такой, что для любого x выполняется $S(x,O,x)=1$. Следовательно, $A+O=A$ (O – класс эквивалентности, которому принадлежит O). Причем O – единственен, поскольку, если найдется $O' \neq O$, то для $y \in O'$ получим $S(x,y,z)=1$ и из второй части свойства 13 будет вытекать $E(y,O)=1$, то есть $O'=O$. Таким образом, среди N найдется единственный элемент O который выполняет роль нуля относительно данной операции.

Наконец, остановимся на существовании обратного элемента. Выберем произвольный класс A и его представитель $x \in A$. Тогда по свойству 14 имеем: найдется $-x$, для которого из $S(x,-x,y)=1$ вытекает $E(y,0)=1$. Пусть $-x \in -A$, тогда $A+(-A)=B$, где $y \in B$, но с учетом $E(y,0)=1$ получим $y \in 0$ или $B=0$. Таким образом,

$$A+(-A)=0,$$

причем $-A$ единственен. Поскольку, если равенство выполняется для какого-то другого класса C то $S(x,z,0)=1, S(x,-x,y)=1$ и $E(y,0)=1$. Тогда из свойства 9 получим $S(x,-x,0)=1$, а из свойства 6 $-E(-x,z)=1$, т.е. $-x \in C$ или $-A=C$.

Утверждение доказано.

Суммируем результаты доказанных нами утверждений. Заданные отношения:

1) разбивают исходное множество на классы эквивалентности;

2) эти классы эквивалентности образуют множество N, на котором индуцируется операция сложения и относительно нее множество N является группой.

Выводы

В итоге в данной работе найдены условия существования частного типа мультиалгебраических структур в виде мультигруппы. Причем процедура факторизации, которая индуцирует мультигруппу отличается от классического алгебраического подхода, что важно с теоретической точки зрения. С практической точки зрения, мультигруппы позволяют оперировать с классами объектов и строить более строгие, а значит более точные математические модели реальных психофизических и других систем искусственного интеллекта.

Список литературы

1. *Шляхов В.В. Об изоморфизме мультиалгебраических систем / В.В. Шляхов, С.Я. Яковлев // Доповіді НАН України. – 2002. – № 9. – С. 67-70.*
2. *Шляхов В.В. Характеристические свойства мультиалгебраических систем / В.В. Шляхов, С.В. Яковлев // Доповіді НАН України. – 2001. – № 10. – С. 72-76.*
3. *Машталир В.П. Свойства мультиалгебраических систем в задачах компаративного распознавания / В.П. Машталир, В.В. Шляхов // Кибернетика и системный анализ. – К., 2003. – № 6. – С. 11-21.*
4. *Kagramanyan A. Multialgebraic systems in information granulation / A. Kagramanyan, V. Mashtalir, V. Shlyakhov // International Journal "Information Theories and Applications". – 2008. – Vol. 15, No 1. – P. 55-63.*
5. *Мальцев А.И. Алгебраические системы / А.И. Мальцев. – М.: Наука, 1970. – 392 с.*
6. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Компараторная идентификация алгебраических систем / Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, В.В. Шляхов // АСУ и приборы автоматики. – Х.: Вища школа, 2000. – Вып. 113. – С. 107-123.*

Поступила в редколлегию 3.12.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.Н. Герасин, Харьковский национальный университет внутренних дел, Харьков.

УМОВИ ІСНУВАННЯ І ПРЕДИКАТИВНІ ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ЗАВДАННЯ МУЛЬТИГРУПП

О.О. Бут, А.І. Пресняков, В.В. Шляхов

Запропоновано підхід до рішення важливого класу інтелектуальних завдань пов'язаних з агрегацією інформації. Пропонується і розвивається математичний апарат використання якого дозволяє формалізувати різні завдання теорії штучного інтелекту

Ключові слова: *n-арне відношення, предикат, мультигрупа, мультиалгебраїчна система*

CONDITIONS OF EXISTENCE AND PREDICATE CHARACTERISTIC PROPERTIES OF TASK OF MULTIGROUPS

A.A. But, A.I. Presnyakov, V.V. Shlyahov

In the article offered approach to the decision of important class intellectual tasks related to aggregating of information. A mathematical vehicle is offered and develops, the use of which allows formalisated the different tasks of theory of artificial intelligence

Keywords: *n -arity relations, predicate, multigroup, multialgebraic system*