УДК 621.391

С.И. Приходько, А.С. Волков

*Украинская государственная академия железнодорожного транспорта, Харьков*

# МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КАСКАДНЫХ СВЕРТОЧНЫХ КОДОВ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

*Предложен метод построения алгебраических каскадных сверточных кодов в частотной области, основанный на применении обратного преобразования Фурье в конечных полях. Показано, что метод позволяет в частотной области алгебраически задавать сверточные коды внешней и внутренней ступени кодирования каскадного кода.*

***Ключевые слова:*** *помехоустойчивое кодирование, сверточные коды, каскадные коды, обратное преобразование Фурье.*

## Введение

**Постановка проблемы в общем виде и анализ литературы.** В настоящее время перспективным направлением развития методов помехоустойчивого кодирования является последовательное каскадирование сверточных кодов. Такой подход позволяет строить коды, обладающие высокими корректирующими способностями.

Сдерживающим фактором в развитии каскадных сверточных кодов является применение в качестве компонентных кодов внешней и внутренней ступени сверточных кодов, найденных переборными методами [4]. Такой подход затрудняет построение сверточных кодов с большой длиной кодового ограничения в составе каскадного и не допускает алгебраических методов декодирования [4, 8].

В то же время, по теореме Шеннона [1] известно, что помехоустойчивые коды большой длины обладают высокой эффективностью. Следовательно, высокой достоверности передаваемых дискретных сообщений можно добиться за счет применения сверточных кодов с большой длиной кодового ограничения [1, 2].

Таким образом, разработка алгебраического метода построения каскадных сверточных кодов с большой длиной кодового ограничения является актуальной научно-технической задачей.

В работе предлагается метод построения алгебраических каскадных сверточных $(n_k, k_k)$-кодов в частотной области, который основан на формировании кодовых слов недвоичных циклических блоковых кодов в частотной области, ограниченных на произвольное подполе, с последующим применением преобразования Фурье в конечных полях и обобщением процедуры кодирования на непрерывный случай на каждой ступени кодирования.

**Цель статьи** – разработка метода построения алгебраических каскадных сверточных кодов в частотной области с применением обратного преобразования Фурье на каждой ступени, обеспечивающего повышение достоверности передаваемых дискретных сообщений.

## Основной материал

Разработку метода построения в частотной области начнем с рассмотрения алгебраического каскадного сверточного $(n_k, k_k)$-кода на внешней ступени.

Зафиксируем недвоичный циклический блоковый $(N_1, K_1, D_1)$-код РС над $GF(q^p)$ в несистематическом виде [7, 8].

Предположим, на внешней ступени задан нерекурсивный сверточный $(n^{(1)}, k^{(1)})$-код над $GF(q^p)$ в несистематическом виде. Пусть $(n^{(1)}, k^{(1)})$-код имеет следующие параметры: $k_1 = \log_q /M/$, $n_1 = p$ и скорость кодирования $R_1 = k_1/p$ [2].

Представим информационную последовательность алгебраического каскадного сверточного $(n_k, k_k)$-кода внешней ступени в виде вектора $b = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$ бесконечной длины, причем каждая компонента вектора $b_i \in M$, $/M/ \geq /GF(q)/$, $M \in GF(q^p)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ .

Разобьем вектор информационной последовательности b на секции следующим образом:

$$b = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{K_1-1}) \cup \\ \cup (b_{K_1}, b_{K_1+1}, b_{K_1+2}, \ldots b_{2K_1-1}) \cup \ldots . \tag{1}$$

Перепишем вектор информационной последовательности b в виде многочлена b(x) бесконечной длины, представленного последовательностью секций многочленов $b_L(x)$, с учетом оператора задержки $x^{L \cdot K_1}$:

$$b(x) = \sum_{L=0}^{\infty} b_L(x) \cdot x^{L \cdot K_1} . \tag{2}$$

Из выражения (2) очевидно, что секции многочленов $b_L(x)$ не перекрываются.

Для формирования вектора в частотной области (частотного вектора) длины $N_1$ необходимо на позициях младших компонент каждой секции добавить последовательность, состоящую из $2 \cdot t_1$ нулей, где $t_1$ – число ошибок, исправляемых сверточным кодом внешней ступени. Остальные $N_1 - 2 \cdot t_1$ координат компонент каждой секции необходимо заполнить символами информационной последовательности согласно подмножеству M. Тогда каждую секцию, младшие компоненты которой имеют $2 \cdot t_1$ последовательных нулей, запишем в виде вектора [3, 7]:

$$b_L = (0,0,...,0,b_{2t_1}, b_{2t_1+1},...,b_{N_1-1}) . \quad (3)$$

Введем следующие обозначения: $B_L$ – одна секция вектора кодового слова в частотной области, $B_j$ – компонента частотного вектора. Следовательно:

$$B_L = (0,0,...,0,B_{N_1-K_1}, B_{N_1-K_1+1},...,B_{N_1-1}) , \quad (4)$$

где $2 \cdot t_1 = N_1 - K_1$.

Последовательность, состоящую из $2 \cdot t_1$ нулей в каждой секции, принято называть множеством проверочных частот [4]. Каждая компонента частотного вектора, которая не принадлежит множеству проверочных частот, удовлетворяет следующим условиям: $B_j \in M$, $/M/ \geq /GF(q)/$, $M \in GF(q^p)$.

Тогда многочлен $B_L(x)$ одной секции кодового слова внешней ступени в частотной области можно записать так:

$$B_L(x) = B_{N_1-K_1} x^{N_1-K_1} + ... + B_{N_1-1} x^{N_1-1} . \quad (5)$$

Из выражений (4) и (5) видно, что одна секция кодового слова алгебраического каскадного сверточного ($n_k$, $k_k$)-кода в частотной области на внешней ступени является кодовым словом недвоичного циклического блокового ($N_1$, $K_1$, $D_1$)-кода РС над $GF(q^p)$ в частотной области, ограниченного на подполе, которое определяется множеством M.

Таким образом, на основании выражений (1) и (4) вектор кодового слова B бесконечной длины алгебраического каскадного сверточного ($n_k$, $k_k$)-кода в частотной области над $GF(q^p)$ на внешней ступени формируется следующим образом:

$$\begin{aligned} B = (0,0,...,0,B_{N_1-K_1}, B_{N_1-K_1+1},...,B_{N_1-1}) \cup \\ \cup (0,0,...,0,B_{2N_1-K_1}, B_{2N_1-K_1+1},...,B_{2N_1-1}) \cup ... \end{aligned} \quad (6)$$

На основании выражения (6) перепишем вектор кодового слова B в виде многочлена B(x) бесконечной длины в частотной области над $GF(q^p)$, который представим последовательностью секций многочленов $B_L(x)$ вида (5) в частотной области, при этом учтем оператор задержки $x^{L \cdot N_1}$:

$$B(x) = \sum_{L=0}^{\infty} B_L(x) \cdot x^{L \cdot N_1} . \quad (7)$$

Согласно введенному оператору задержки $x^{L \cdot N_1}$, слагаемые в выражении (7) не перекрываются.

Далее необходимо выполнить обратное преобразование Фурье над $GF(q^p)$ каждой секции кодового слова в частотной области, с целью нахождения секции кодового слова алгебраического каскадного сверточного ($n_k$, $k_k$)-кода $c_L$ на внешней ступени во временной области. Рассмотрим эту процедуру подробнее [4, 7].

Согласно определению кода РС $N_1 = q^p - 1$ [8], следовательно, длина одной секции $c_L$ тоже равна $N_1 = q^p - 1$. Тогда возможно выполнить обратное преобразование Фурье над $GF(q^p)$, при этом $\gamma$ будет примитивным элементом поля $GF(q^p)$ [4].

Обратное преобразование Фурье над $GF(q^p)$ одной секции кодового слова в частотной области имеет вид [4, 5, 6]:

$$c_i = \frac{1}{N_1} \sum_{j=0}^{N_1-1} \gamma^{-i \cdot j} \cdot B_j , \quad (8)$$

где $c_i \in GF(q^p)$; $i = 0, …, N_1 - 1$.

Таким образом, согласно (8) вычисляются все компоненты $c_i$ одной секции кодового слова алгебраического каскадного сверточного ($n_k$, $k_k$)-кода $c_L$ на внешней ступени кодирования во временной области. Тогда $c_L = (c_0, c_1, c_2,...,c_{N_1-1})$, а многочлен одной секции кодового слова $c_L(x)$ имеет вид:

$$c_L(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_{N_1-1} x^{N_1-1} . \quad (9)$$

Важной особенностью данного метода является то, что вычисленная секция кодового слова $c_L$ на внешней ступени имеет несистематический вид.

Далее обобщим работу кодера сверточного кода внешней ступени на непрерывный случай, при этом учтем, что сверточные коды обладают памятью [4, 8]. Тогда, согласно выражениям (2) и (9), кодовое слово алгебраического каскадного сверточного ($n_k$, $k_k$)-кода над $GF(q^p)$ бесконечной длины на внешней ступени кодирования во временной области можно представить в виде многочлена c(x), который формируется последовательным наложением перекрывающихся секций $c_L(x)$ вида (9) в соответствии с оператором задержки $x^{L \cdot K_1}$:

$$c(x) = \sum_{L=0}^{\infty} c_L(x) \cdot x^{L \cdot K_1} . \quad (10)$$

Таким образом, на выходе кодера сверточного ($n^{(1)}$, $k^{(1)}$)-кода над $GF(q^p)$ внешней ступени формируется кодовое слово с бесконечной длины. Отметим, что сверточный ($n^{(1)}$, $k^{(1)}$)-код построен алгебраическим методом на основе представления секций кодовых слов в частотной области, с последующим применением обратного преобразования Фурье и обобщением работы кодера недвоичного ограниченного на подполе циклического блокового ($N_1$, $K_1$, $D_1$)-кода РС над $GF(q^p)$ в несистематическом виде на непрерывный случай. Несмотря на то, что процедура построения кода рассматривается в частотной области, по каналу связи передается кодовое слово бесконечной длины, сформированное во временной области.

Справедливо следующее утверждение.

*Утверждение 1.* Пусть задан недвоичный циклический блоковый ($N_1$, $K_1$, $D_1$)-код РС над $GF(q^p)$ в частотной области, информационные символы которого удовлетворяют подмножеству М. Тогда на основе применения обратного преобразования Фурье с последующим обобщением кодового слова c(x) на случай бесконечной длины в соответствии с оператором задержки $x^{L \cdot K_1}$ (10) можно построить алгебраическим способом сверточный ($n^{(1)}$, $k^{(1)}$)-код над $GF(q^p)$ в несистематическом виде с параметрами:

$$\begin{cases} k_1 = \log_q / M /, \\ n_1 = p, \\ R_1 = k_1 / p. \end{cases}$$

Важной особенностью данного алгебраического метода построения сверточных кодов является отсутствие необходимости поиска или построения порождающих многочленов. В то же время, данный алгебраический метод допускает построение сверточных кодов с любыми заданными длинами секций кодового слова.

Прейдем к рассмотрению процедуры построения алгебраического каскадного сверточного ($n_k$, $k_k$)-кода в частотной области на внутренней ступени.

Пусть задан недвоичный циклический блоковый ($N_0$, $K_0$, $D_0$)-код РС над $GF(q^m)$ в несистематическом виде [8]. Допустим, что кодом внутренней ступени является нерекурсивный сверточный ($n^{(0)}$, $k^{(0)}$)-код над $GF(q^m)$ также в несистематическом виде с параметрами: $k_0 = \log_q /Q/$, $n_0 = m$ и скорость кодирования $R_0 = k_0/m$ [2].

Информационную последовательность f алгебраического каскадного сверточного ($n_k$, $k_k$)-кода внутренней ступени во временной области, представленную в виде вектора $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$ бесконечной длины, зафиксируем в виде многочлена f(x) бесконечной длины следующим образом:

$$f(x) = \sum_{L=0}^{\infty} f_L(x) \cdot x^{L \cdot K_0}, \qquad (11)$$

где $f_L(x)$ – одна секция многочлена кодового слова f(x).

При этом $f_i \in Q$; $/Q/ \geq /GF(q)/$; $Q \in GF(q^m)$; $i = 0, 1, 2, \dots$ .

Тогда вектор одной секции кодового слова $f_L$ представим в частотной области следующим образом [4, 7]:

$$F_L = (0, 0, \dots, 0, F_{N_0 - K_0}, F_{N_0 - K_0 + 1}, \dots, F_{N_0 - 1}), \qquad (12)$$

где $F_j$ – компонента частотного вектора, $B_j \in Q$, $/Q/ \geq /GF(q)/$, $Q \in GF(q^m)$; $N_0 - K_0 = 2 \cdot t_0$; $t_0$ – число исправляемых ошибок сверточным кодом внутренней ступени.

Из выражения (12) очевидно, что множество проверочных частот определяется последовательностью, состоящей из $2 \cdot t_0$ нулей, а символы информационной последовательности, удовлетворяющие подмножеству Q, заполняют остальные $N_0 - 2 \cdot t_0$ частотных компонент одной секции кодового слова в частотной области [7].

Многочлен $F_L(x)$ одной секции кодового слова алгебраического каскадного сверточного ($n_k$, $k_k$)-кода в частотной области на внутренней ступени запишем в виде:

$$\begin{aligned} F_L(x) &= F_{N_0 - K_0} x^{N_0 - K_0} + \\ &+ F_{N_0 - K_0 + 1} x^{N_0 - K_0 + 1} + \dots + F_{N_0 - 1} x^{N_0 - 1}. \end{aligned} \qquad (13)$$

Далее, выполним обратное преобразование Фурье над $GF(q^m)$ одной секции кодового слова $F_L$, где α примитивный элемент поля $GF(q^m)$, на основании того, что $N_0 = q^m - 1$ [4, 5, 6]:

$$s_i = \frac{1}{N_0} \sum_{j=0}^{N_0 - 1} \alpha^{-i \cdot j} \cdot F_j, \qquad (14)$$

где $s_i \in GF(q^m)$; $i = 0, \dots, N_0 - 1$.

Согласно выражению (14), можно вычислить вектор $s_L = (s_0, s_1, s_2, \dots, s_{N_0 - 1})$ длины $N_0$ во временной области, который является одной секцией кодового слова алгебраического каскадного сверточного ($n_k$, $k_k$)-кода на внутренней ступени кодирования в несистематическом виде. Тогда многочлен одной секции кодового слова $s_L(x)$ имеет вид:

$$s_L(x) = s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \dots + s_{N_0 - 1} x^{N_0 - 1}. \qquad (15)$$

Следовательно, кодовое слово ($n_k$, $k_k$)-кода над $GF(q^m)$ бесконечной длины на внутренней ступени кодирования во временной области с учетом оператора задержки $x^{L \cdot K_0}$ представим в виде многочлена s(x):

$$s(x) = \sum_{L=0}^{\infty} s_L(x) \cdot x^{L \cdot K_0}. \qquad (16)$$

Многочлен s(x) является кодовым словом бесконечной длины алгебраического каскадного сверточного ($n_k$, $k_k$)-кода.

Сверточные коды внешней и внутренней ступени в составе каскадного кода, построенные в частотной области, должны быть согласованы по скорости. Это обеспечивается количественным соотношением между символами или кадрами кодового слова внешней ступени и информационными символами или кадрами внутренней ступени кодирования.

Справедливы следующие утверждения.

*Утверждение 2.* Работа кодеров внешней и внутренней ступени кодирования алгебраических каскадных сверточных ($n_k$, $k_k$)-кодов, построенных в частотной области, является согласованной по скорости, если выполняются следующие соотношения:

$$/GF(q)/ \leq /Q/ = /GF(q^p)/ \leq /GF(q^m)/, \; m > p.$$

Тогда,

$$k_0 = \log_q /Q/ = p, \; m > k_0.$$

Следовательно, кадр кодового слова сверточного кода внешней ступени $n_1 = p$ соответствует информационному кадру $k_0$ сверточного кода внутренней ступени.

*Утверждение 3.* Пусть множество Q удовлетворяет следующим соотношениям: /GF(q)/ $\le$ /Q/ $\le$ /GF($q^m$)/ $\le$ /GF($q^p$)/. Тогда выполнение условий: $k_0 = \log_q$ /Q/, $Q \in GF(q^m)$, $m > k_0$, где $k_0$ – делит число p либо число $N_1 \cdot p$ без остатка, а именно: $p = k_0 \cdot \varepsilon$, либо $N_1 \cdot p = k_0 \cdot \varepsilon$, $\varepsilon$ – натуральное число, обеспечивает согласованную по скорости работу сверточных кодеров внешней и внутренней ступени.

Таким образом, при построении алгебраических каскадных сверточных ($n_k$, $k_k$)-кодов в частотной области необходимо следовать согласно указанным соотношениям в утверждениях (2) и (3). В противном случае возможны задержки в процедурах кодирования и декодирования, из-за несогласования скоростей сверточных кодов.

Следовательно, справедливо следующее утверждение.

*Утверждение 4.* Ограничим последовательности информационных символов недвоичных циклических кодов РС над GF($q^p$) и GF($q^m$) в частотной области на подмножества M и Q, удовлетворяющие утверждениям 2 и 3. Тогда, применив обратное преобразование Фурье и обобщив на непрерывный случай работу кодеров согласно утверждению 1, можно построить алгебраическим способом алгебраический каскадный сверточный ($n_k$, $k_k$)-код в частотной области с согласованными скоростями и с параметрами:

$$\begin{cases} k_k = k_1 \cdot k_0, \\ n_k = p \cdot m, \\ R_k = R_1 \cdot R_0. \end{cases}$$

Таким образом, алгебраический подход к построению каскадных сверточных ($n_k$, $k_k$)-кодов в частотной области не требует поиск порождающих многочленов, что упрощает процедуру построения кодов и позволяет строить коды большой длины на каждой ступени. Благодаря этому, можно достичь высокой степени достоверности передаваемых дискретных сообщений.

## Выводы

Для повышения достоверности передаваемых дискретных сообщений разработан метод построения алгебраических каскадных сверточных кодов в частотной области.

Метод отличается от известных формированием кодовых слов недвоичных циклических блоковых кодов в частотной области, ограниченных на подмножества M и Q, с последующим применением обратного преобразования Фурье и обобщением процедуры кодирования на непрерывный случай на каждой ступени кодирования.

Согласно утверждениям 2 и 3 обеспечивается согласованная по скорости работа сверточных кодеров внешней и внутренней ступени, что исключает задержки в процедурах кодирования.

Разработанный метод допускает построение каскадных схем кодирования алгебраическим способом с большими длинами кодов внешней и внутренней ступени и относительно невысокой сложностью.

## Список литературы

1. *Форни Д. Каскадные коды: пер. с англ. / Д. Форни. – М.: Мир, 1970. – 207 с.*
2. *Данько Н.И. Алгебраические сверточные коды: учеб. пос. / Н.И. Данько, С.П. Евсеев, А.А. Кузнецов, П.Ф. Поляков, С.И. Приходько. – Х.: УкрГАЖТ, 2007. – 238 с.*
3. *Кларк Дж. мл. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи: пер. с англ.; под ред. Б.С. Цыбакова / Дж. мл. Кларк, Дж. Кейн. – М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.*
4. *Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки / Р. Блейхут. – М.: Мир, 1986. – 576 с.*
5. *Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов / Р. Блейхут. – М.: Мир, 1989. – 448 с.*
6. *Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток: пер. с англ. / Г. Нуссбаумер. – М.: Радио и связь, 1985. – 248 с.*
7. *Муттер В.М. Основы помехоустойчивой телепередачи информации / В.М. Муттер. –Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. Отд-ние, 1990. – 288 с.*
8. *Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение: пер. с англ.; под ред. А.В. Назаренко / Б. Скляр. – М.: Издат. дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.*

*Поступила в редколлегию 15.11.2010*

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. А.А. Кузнецов, Харьковский университет Воздушных Сил имени Ивана Кожедуба, Харьков.

### МЕТОД ПОБУДОВИ АЛГЕБРАЇЧНИХ КАСКАДНИХ ЗАГОРТКОВИХ КОДІВ В ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ

С.І. Приходько, О.С. Волков

*Запропоновано метод побудови алгебраїчного каскадного згорткового коду в частотній області, заснований на використанні зворотного перетворення Фур'є. Показано, що метод дозволяє в частотній області алгебраїчно задавати згорткові коди зовнішнього й внутрішнього ступеню кодування каскадного коду.*

***Ключові слова:*** *завадостійке кодування, згорткові коди, каскадні коди, зворотне перетворення Фур'є.*

### METHOD FOR CONSTRUCTING ALGEBRAIC CONCATENATED CONVOLUTIONAL CODES IN THE FREQUENCY DOMAIN

S.I. Prihodko, A.S. Volkov

*There has been suggested a method of constructing algebraic concatenated convolutional codes in the frequency domain based on the use of the inverse Fourier transform in finite fields. It is shown that the method allows the frequency domain algebraically defines convolutional codes of external and internal level coding of concatenated code.*

***Keywords:*** *error correcting coding, convolutional codes, concatenated codes, inverse Fourier transform.*