cross correlation.

УДК 006.91

И.П. Захаров[1], С.Г. Рабинович[2]

[1]*Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина*
[2]*Нью Джерси, США*

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПРИ КОСВЕННЫХ НЕКОРРЕЛИРОВАННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Рассмотрены различные подходы к оцениванию неопределенности косвенных некоррелированных измерений: традиционный, Монте-Карло, трансформации, перебора, бутстрап. Проведен анализ этих подходов и приведены рекомендации по их применению. Результаты применения всех подходов иллюстрируются примером измерения плотности твердого тела.

Ключевые слова: *косвенные измерения, неопределенность, корреляция.*

Введение

Косвенные некоррелированные измерения (КНИ) являются одними из наиболее распространенных видов непрямых измерений. Традиционный подход к оцениванию неопределенности таких измерений, базирующийся на методе линеаризации, перешел из теории приближенных вычислений в теорию неопределенности [1] практически без изменений. Несмотря на общепризнанность такого подхода, его достоверность в ряде случаев вызывает сомнения. Это привело к поиску других подходов к оцениванию неопределенности КНИ − методов Монте-Карло [2], трансформации [3], перебора [4], бутстрап [5].

Целью данной статьи является анализ этих подходов и выработка рекомендаций по их применению.

Изложение основного материала

1. Традиционный метод [1] прост в применении и широко распространен. Достоинством метода является универсальность. Однако этот метод имеет ряд недостатков. Так, при традиционном методе оценку y измеряемой величины Y находят путем подстановки в модельное уравнение

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_m) \qquad (1)$$

оценок входных величин $x_1, x_2, ..., x_m$:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_m)\,. \qquad (2)$$

При многократных измерениях эти оценки принимаются равными средним арифметическим отдельных наблюдений входных величин. Такая оценка измеряемой величины является смещенной, так как известно соотношение между математическими ожиданиями E :

$$E[f(x_1, x_2, ..., x_m)] \neq f[E(x_1), E(x_2), ..., E(x_m)]\,.$$

В основе оценивания неопределенности измерений традиционным методом лежит линеаризация уравнения измерения на основе разложения Тейлора. Разложение выполняется в точке, координаты которой принимаются равными оценкам входных величин.

Стандартную неопределенность измеряемой величины находят как корень квадратный из суммы квадратов вкладов неопределенностей входных величин $u_j(y)$:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} u_j^2(y)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left[c_j u(x_j)\right]^2}\,, \qquad (3)$$

где c_j − коэффициенты чувствительности, равные значениям производных $\dfrac{\partial y}{\partial x_j}$ в точке разложения.

Расширенную неопределенность результата U находят как произведение $u_c(y)$ на коэффициент охвата k, вычисляемый по распределению Стьюдента с так называемым эффективным числом степеней свободы

$$\nu_{eff} = u_c^4(y) \Big/ \sum_{j=1}^{m} \frac{u_j^4(y)}{\nu_j} \qquad (4)$$

и доверительной вероятностью 0,95. В выражении (4) ν_j − число степеней свободы j-й входной величины. Поскольку при вычислении $u_c(y)$ в расчет принимают только первые члены разложения Тейлора, это делает сомнительной вероятность, приписываемую полученной неопределенности.

Кроме того, оценки стандартных отклонений входных величин не являются абсолютно точными. Их неточность выражают или в виде доверительного интервала [3], или в виде отношения стандартного отношения оценки стандартного отклонения к истинному значению этого отклонения [1]. Однако это качество оценок стандартного отклонения не принято учитывать при расчете точности измерений. Поэтому его можно было бы назвать показателем надежности измерения.

Следует отметить, что при всех расчетах точности измерения исходным параметром является дисперсия, а не стандартное отклонение. Поэтому показателем надежности измерения целесообразно считать надежность оценивания дисперсии, а не стандартного отклонения. Для решения этой задачи воспользуемся общим выражением для дисперсии оценки дисперсии $V[s^2]$ распределения, приведенным в книге [6]:

$$V[s^2] = \frac{\mu_4 - \sigma^4}{n} - \frac{2(\mu_4 - 2\sigma^4)}{n^2} + \frac{\mu_4 - 3\sigma^4}{n^3}\,,$$

где s^2 − оценка дисперсии группы из n наблюдений (выборки объемом n); σ^2 − истинное значение дисперсии распределения; μ_4 − четвертый центральный момент распределения.

Для нормального распределения известно, что $\mu_4 / \sigma^4 = 3$. С учетом этого соотношения приведенное выше уравнение примет вид:

$$V[s^2] = 2\frac{\sigma^4 (n-1)}{n^2}\,,$$

отсюда в относительном виде:

$$V_r[s^2] = \frac{V[s^2]}{\sigma^4} = 2\frac{(n-1)}{n^2}\,.$$

Переходя от дисперсии $V_r[s^2]$ к стандартному отклонению $\sqrt{V_r[s^2]} = s_r[s^2]$, получаем: $s[s^2] / \sigma^2 = \sqrt{2(n-1)} / n$. Следует отметить, что оценка $s_r[s^2]$, будучи эффективной, является смещенной. Поступаясь несколько эффективностью, обычно пользуются несмещенной оценкой дисперсии выборки $S^2 = s^2 \dfrac{n}{n-1}$, тогда:

$$V[S^2] = 2\frac{\sigma^4 (n-1)}{n^2}\left(\frac{n}{n-1}\right)^2 = 2\frac{\sigma^4}{(n-1)}\,.$$

Отсюда $s[S^2] = \sigma^2 \sqrt{2/(n-1)}$, и в качестве показателя надежности S^2 от числа наблюдений будем использовать величину

$$\varepsilon = s[S^2] / \sigma^2 = \sqrt{2/(n-1)}\,, \qquad (5)$$

которая зависит только от объема выборки.

Зависимость $\varepsilon(n)$ приведена в табл. 1.

Таблица 1

Зависимость показателя надежности ε от числа измерений

n	3	5	7	10	15	20	30	40	50
ε	1,0	0,71	0,54	0,47	0,37	0,32	0,26	0,22	0,2

Полученные цифры говорят о том, что для надежной оценки дисперсии измерения требуется значительный объем выборки n.

В случае косвенных измерений, зависимость несмещенной оценки дисперсии измерения от количества измерений каждой входной величины n_i будет определяться выражением:

$$s[u_c^2(y)] = \sum_{j=1}^{m} c_j^4 \sigma_j^2 \sqrt{2/(n_j-1)} . \qquad (6)$$

2. Метод Монте-Карло – устраняет смещение результата измерения, позволяет учитывать законы распределения аргументов, повышает достоверность оценивания расширенной неопределенности по распределению измеряемой величины. Он представляет собой численный метод построения композиции независимых случайных величин с известными функциями распределения. Для этого формируется m (количество входных величин) массивов случайных чисел x_{ji} (j − номер входной величины, i − номер члена в массиве), с равными объемами N, не менее 10^5−10^{-6} каждый и законами распределения, соответствующими предполагаемым законам распределения входных величин (и имеющими параметры, соответствующие оценкам входных величин и их неопределенностям). После чего по формуле

$$y_i = f(x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{mi}) \qquad (7)$$

вычисляется массив случайных чисел измеряемой величины объемом n, по которому определяются параметры − результат измерения

$$\overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \qquad (8)$$

и его расширенная неопределенность $U(\overline{y})$, определяемая как [7]:

$$U(\overline{y}) = (y_{0,975 \cdot N} - y_{0,025 \cdot N})/2 . \qquad (9)$$

В этом выражении $y_{0,975 \cdot N}$ и $y_{0,025 \cdot N}$ − значения членов ранжированного массива выходной величины с порядковыми номерами $0,975 \cdot N$ и $0,025 \cdot N$. Недостатками этого метода является влияние недостоверности исходных данных (оценок входных величин и их неопределенностей, а также предполагаемых видов законов распределения).

3. Метод трансформации. Алгоритм этого метода состоит в следующем. Все входные величины в уравнении измерения, за исключением одной, заменяются их средними значениями. Затем в это уравнение подставляют последовательно все наблюдения, полученные при измерении входной величины, которая не была заменена. Каждое наблюдение дает одно значение измеряемой величины. Таким образом получаем столько реализаций измеряемой величины (n_j), сколько было наблюдений при измерении этой j-й входной величины:

$$y_i = f(x_{1i}, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m),\ i = 1, 2, \ldots, n_1 .$$

Затем переменной делают другую входную величину, и для нее тем же путем получают другую группу реализаций измеряемой величины. В итоге получается столько групп, сколько входных величин имеет уравнение измерения (m). Все они объединяются в одну группу, число членов которой равно $N = \sum_{j=1}^{m} n_j$. Полученная группа данных обрабатывается как группа наблюдений при прямых измерениях. В оценке неопределенности результата учитывается как разброс членов объединенной группы, так и неточность оценок аргументов [3].

Между группами реализаций измеряемой величины имеется некоторая зависимость. Эта зависимость возникает из-за того, что наблюдения при измерении одного аргумента используются для построения двух групп, в одной – как среднее этих наблюдений, а в другой – как переменная величина. Однако среднее значение остается постоянным для всей группы, а возможные изменения этого среднего в случае повторных измерений учитываются оценкой его неточности. Тем самым устраняется влияние данной зависимости.

Достоинство метода трансформации состоит в том, что он при объединении групп позволяет избежать применения разложения в ряд Тэйлора и связанных с ним неточностей.

4. Метод перебора. Суть метода заключается в получении всех возможных значений измеряемой величины y_i, получаемых при переборе всех значений входных величин, подставляемых в уравнение измерения $y_i = f(x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{mi})$. Количество получаемых, таким образом, значений y_i определяется как произведение всех количеств значений аргументов: $N = \prod_{i=1}^{m} n_i$. По полученному массиву измеряемой величины можно получить результат измерения

$$\overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i ,$$

его стандартное отклонение

$$s(y) = \sqrt{\frac{1}{(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{y})^2}$$

и расширенную неопределенность $U(y)$, определяемую по получаемому закону распределения измеряемой величины аналогично методу Монте-Карло.

Для равного количества n результатов наблюдений всех входных величин можно определить суммарную стандартную и расширенную неопределенности по формулам:

$$u(\bar{y}) = s(y)\big/\sqrt{n}\ ; \qquad (10)$$

$$U(\bar{y}) = t_{0,95}(n-1)\cdot u(\bar{y})\ . \qquad (11)$$

Метод перебора дает несмещенную оценку измеряемой величины и максимально надежную оценку ее неопределенности. Метод не нуждается в предположениях о форме распределений данных измерений аргументов или в построении этих распределений, не использует разложение Тэйлора, он опирается исключительно на имеющиеся экспериментальные данные и использует всю содержащуюся в них информацию. Метод перебора сводит к минимуму неточность оценивания дисперсии построенного распределения из-за ограниченного числа измерений аргументов. Поэтому неопределенность результата измерения, которую дает этот метод, соответствует заданной вероятности и является надежной.

5. Бутстрап-метод [6]**.** Метод основан на случайной выборке измеренных значений входных величин с возвращением. Пусть значение величины $Y = f(X_1, X_2, ..., X_m)$ определяется по результатам измерения входных величин x_{ji} (j – номер входной величины, i – номер члена в выборке, $i = 1, 2, ..., n_j$). Выбирая случайным образом значение номера члена в каждой выборке, рассчитываем соответствующую реализацию значения измеряемой величины. Повторяя эти вычисления произвольное число N раз, получаем массив независимых значений измеряемой величины (объемом N), который позволяет построить функцию распределения этих реализаций и вычислить ее параметры – оценки математического ожидания, стандартного отклонения и границ доверительного интервала.

Метод очень прост, дает надежные оценки параметров виртуальных наблюдений измеряемой величины и возможность построить функцию их распределения.

6. Сравнение получаемых результатов различными методами.

Для иллюстрации получаемых результатов были обработаны данные косвенного измерения плотности твердого тела [3] по результатам 11-и кратных измерений его массы m_i и объема V_i (табл. 2).

Обработка данных измерения плотности твердого тела перечисленными выше методами дала результаты, приведенные в табл. 3.

Результаты определения плотности традиционным методом приведены в [4]. Для расчета расширенной неопределенности было рассчитано эффективное число степеней свободы по формуле (4) ν_{eff} =19,6. Показатель неточности оценки дисперсии виртуальных наблюдений измеряемой величины соответствует примерно $n = 21$ и следовательно $\varepsilon = 32\%$. Однако метод линеаризации является приближенным методом и неточность приближения не учитывается.

Таблица 2

Данные для расчета плотности твердого тела

№ изм.	m_i, $10^{-3}\cdot$кг	V_i, $10^{-6}\cdot$м^3
1	252,9119	195,3799
2	252,9133	195,383
3	252,9151	195,379
4	252,913	195,3819
5	252,9109	195,3795
6	252,9094	195,3788
7	252,9113	195,3792
8	252,9115	195,3794
9	252,9119	195,3791
10	252,9115	195,3791
11	252,9118	195,3794
Среднее значение	**252,9119636**	**195,3798455**
СКО	**0,001459639**	**0,001342657**
Стандартная неопределенность	**0,000440098**	**0,000404826**

Таблица 3

Сравнительные результаты измерения плотности, полученные при обработке различными методами

Метод обработки	ρ, $10^3\cdot$кг/м^3	$u(\rho)$, $10^{-3}\cdot$кг/м^3	$U(\rho)$, $10^{-3}\cdot$кг/м^3
Традиционный	1,294462912	3,5025	7,306
Монте-Карло	1,294462906	3,4712	7,734
Трансформации	1,294462912	3,0031	6,517
Перебора	1,294462912	3,3534	7,472
Бутстрап	1,29446307	3,38	6,628

При реализации метода Монте-Карло генерировались случайные числа, распределенные по закону Стьюдента с числом степеней свободы 10 и параметрами, взятыми из табл. 2. Как видно из табл. 3, метод дал тот же результат, что был получен традиционным методом. Кроме того, увеличилась расширенная неопределенность результата измерения. Вероятно, это объясняется не полным соответствием экспериментальных данных принятому для их описания распределению Стьюдента.

Результаты определения плотности методом трансформации приведены в [3]. Неточность оценки дисперсии объединенной группы данных соответствует $n = 22$. Оценки неопределенности средних значений массы и объема составлялись на основе 11 наблюдений и их точность, соответственно, ниже.

При применении метода перебора было получено 121 значение плотности, по которым построена функция распределения, изображенная на рис. 1. Исходя из этой функции можно непосредственно получить значение расширенной неопределенности по формуле (9) для $N = 121$ (для членов ранжированного ряда с номерами 118 и 3). Она составила $7{,}136\cdot 10^{-3}$, однако это значение из-за малости N является неточным. Расчеты по формуле (11) дали более точное значение, приведенное в табл. 3.

Если принять, что неточность оценки дисперсии определяется исходными 121 виртуальными значениями измеряемой величины, то показатель этой неточности ε = 13%.

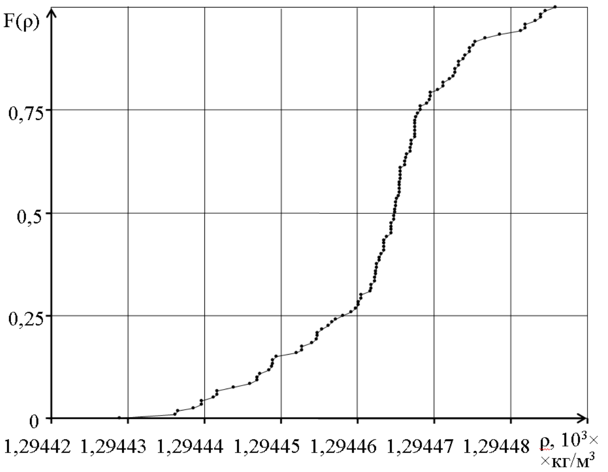

Рис. 1. Кумулятивная кривая закона распределения значений плотности, полученной методом перебора

Применение бутстрап-процедуры к нашим данным при N = 1000 дало результаты, приведенные в табл. 3.

Выводы

1. Результаты измерений, полученные разными методами дали практически одно и тоже значение измеряемой величины. Это объясняется малыми неопределенностями измерения массы и объема, при которых нет заметного смещения результата измерения плотности.

2. Наибольшее значение расширенной неопределенности дал метод Монте-Карло, что объясняется не полным соответствием экспериментальных данных принятому для их описания распределению Стьюдента.

3. Статистическая надежность методов обработки экспериментальных данных зависит от точности оценивания дисперсии распределения наблюдений, выполненных при измерении. В качестве показателя надежности предложено отношение стандартного отклонения оценки дисперсии распределения к ее истинному значению. При нормальном распределении это отношение зависит только от числа членов распределения.

4. Анализ показал, что наиболее надежными являются методы Монте-Карло и бутстрап. Это объясняется тем, что эти методы позволяют получить на выходе распределения с неограниченным числом членов. Но по этой же причине количественный показатель надежности к ним не применим. Из методов с физически ограниченным числом членов наиболее надежным оказался метод перебора.

5. Метод Монте-Карло и бутстрап-процедура легко реализуются на компьютере. Для распространения этих методов следует разработать и стандартизовать соответствующие специализированные программные средства.

Список литературы

1. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. – Geneva: ISO, 1993. – 101 p.*

2. *JCGM 101:2008. Evaluation of measurement data − Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” − Propagation of distributions using a Monte Carlo method. − BIPM, 2008. − 88 p.*

3. *Rabinovich S.G. Evaluating measurement accuracy: a practical approach / S.G. Rabinovich. – New York: Springer. 2010. – 271 p.*

4. *Rabinovich S.G. Measurement errors and uncertainty: theory and practice / S.G. Rabinovich. – 3rd edn. − New York: Springer. 2005. − 308 p.*

5. *Efron B. An introduction to the bootstrap / B. Efron, R.J. Tibshirani. – London - New York: Chapman & Hal, 1988. – 456 p.*

6. *Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – 2-е изд. – М.: Мир, 1975. – 648 с.*

7. *Zakharov Igor P. Application of Monte Carlo simulation for the evaluation of measurements uncertainty / Igor P. Zakharov, Sergey V. Vodotyka. // Metrology and Measurement systems. – 2008. – Vol., XV, Number 1. – P. 118-123.*

Поступила в редколлегию 29.12.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Руженцев, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ МЕТОДІВ ОБРОБКИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ПРИ НЕПРЯМИХ НЕКОРЕЛЬОВАНИХ ВИМІРЮВАННЯХ

І.П. Захаров, С.Г. Рабінович

Розглянуто різні підходи до оцінювання невизначеності непрямих некорельованих вимірювань: традиційний, Монте-Карло, трансформації, перебору, бутстрап. Проведено аналіз цих підходів та наведені рекомендації по їх застосуванню. Результати застосування всіх підходів ілюструються прикладом вимірювання щільності твердого тіла.

Ключові слова: *непрямі вимірювання, невизначеність, кореляція.*

A COMPARATIVE ANALYSIS OF METHODS OF EXPERIMENTAL DATA PROCESSING IN UNCORRELATED INDIRECT MEASUREMENTS

I.P. Zakharov, S.G. Rabinovich

The article considers several methods for evaluating the uncertainty of uncorrelated indirect measurements: the traditional method, the Monte Carlo method, the method of transformation, the method of enumeration and the bootstrap method. We analyze and compare these approaches and provide recommendations on their practical application. Our analysis is illustrated through utilizing each method in the same example of the measurement of the density of a solid body.

Keywords: *indirect measurements, uncertainty, correlation.*