УДК 519.816

О.М. Сікоза, Н.А. Яремчук

Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ПРИ ЕКСПЕРТНОМУ ОЦІНЮВАННІ ВАГОВИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

В статті розглянуто питання отримання невизначеності вагових коефіцієнтів при їх експертному оцінюванні. Вагові коефіцієнти використовуються для комбінування окремих властивостей складного об'єкту. Невизначеність обчислюється з урахуванням допустимих операцій для ординальної шкали, за якою відображаються значення вагових коефіцієнтів. Для отримання значень вагових коефіцієнтів та їх розширеної невизначеності використано порядкові статистики, а довірча ймовірність обчислюється за винайденою авторами формулою. Для практичного застосування розроблено таблиці, за якими можна отримати довірчу ймовірність за номерами порядкових статистик і кількістю експертів, що задіяні при оцінюванні.

Ключові слова: *шкала порядку, вагові коефіцієнти, експертне оцінювання, невизначеність.*

Вступ

При побудові комплексних показників якості складних об'єктів на основі ієрархічної структури, що включає часткові показники якості, використовують вагові коефіцієнти, які характеризують вплив часткових показників на комплексний показник якості. Вагові коефіцієнти можуть бути отримані з використанням апріорної інформації за обраним критерієм, з використанням експертного оцінювання, з використанням апріорної інформації, що тримана за кількома критеріями.

Отримання вагових коефіцієнтів за експертним оцінюванням є самим розповсюдженим. Існують праці [1, 2], де експертне оцінювання називають «суб'єктивним вимірюванням». Дійсно, експертне оцінювання є суб'єктивним, так як залежить від особи, що приймає рішення. Але згідно визначення, вимірювання є об'єктивною емпіричною операцією [3]. Тому в даній статті прийнято термін експертне оцінювання. Щодо його суб'єктивізму, існує цілий ряд праць [1, 2, 4 – 7], що направлені на зменшення суб'єктивізму експертного оцінювання при використанні думок декількох експертів.

На сьогоднішній день відомо багато методів безпосереднього і опосередкованого експертного оцінювання вагових коефіцієнтів. Але найбільш поширеним і найбільш надійним вважають метод парних або попарних порівнянь [7]. При використанні цього методу результати експертного оцінювання заносять в матрицю парних порівнянь або представляють у вигляді орієнованого графу парних порівнянь, вершинами якого є властивості, а дуги характеризують відношення між ними. Результати експертного оцінювання вагових коефіцієнтів отримують з використанням бінарного відношення порядку, тому шкала вагових коефіцієнтів є шкалою порядку. Але при обробці даних експертного оцінювання цей факт не завжди враховують. Вагові коефіцієнти обчислюють за середнім арифметичним значенням, а стандартну невизначеність – за середнім квадратичним відхиленням. Такі алгебричні операції можна використовувати тільки після додаткової метризації [8], що в свою чергу є трудомісткою операцією і може призводити до змін початкових думок певних експертів.

Метою даної статті є розробка способів отримання вагових коефіцієнтів властивостей складних об'єктів при їх експертному оцінюванні з характеристикою невизначеності і врахуванням того, що експертні дані подано за шкалою порядку.

Визначення вагових коефіцієнтів за експертним оцінюванням

При використанні метода попарних порівнянь за думками декількох експертів [9] на множині параметрів (властивостей) встановлюється бінарне відношення порядку $r_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}, i \neq j$, де n – кількість властивостей. Для цього кожен експерт

© О.М. Сікоза, Н.А. Яремчук

послідовно порівнює властивість досліджуваного складного об'єкту V_1 з властивостями $V_2, V_3, ..., V_n$. Якщо експерт вважає, що властивість V_i більш важлива за властивість V_j, то в першому рядку табл. 1 він ставить одиницю ($\delta_{ij} = 1$ або інше значення за домовленістю), при $i = j$ або при $V_i \sim V_j$ у відповідних комірках проставляється прочерк або інші значення за домовленістю. Аналогічно заповнюється весь правий верхній кут табл. 1. Лівий нижній кут заповнюється протилежними значеннями.

В табл. 1 позначено $S_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}$, де $i = \overrightarrow{1,n}, k = \overrightarrow{1,n_E}$ (n_E – кількість експертів). Тобто для кожного k-го експерта отримуємо вектор-стовбець значень S_{ik}, а для кожної i-ої властивості за результатами n_E експертів отримуємо вектор-рядок (табл. 2).

Таблиця 1

Результати експертного оцінювання k-го експерта (i-та матриця бінарного відношення порядку)

Номер властивості	1	2	…	n	S_{ik}
1					S_{1k}
2					S_{2k}
⋮					⋮
n					S_{nk}

Таблиця 2

Результати експертного оцінювання для всіх експертів

S_{11}	…	S_{1k}	…	S_{1n_E}
S_{21}	…	S_{2k}	…	S_{2n_E}
⋮	…	⋮	…	⋮
S_{n1}	…	S_{nk}	…	S_{nn_E}

В працях [8 – 10] колективний ваговий коефіцієнт визначають за середнім арифметичним вектора-рядка, що відповідає оцінкам всіх експертів. В даній статті запропоновано використати адекватну для шкал порядку оцінку – медіану, тобто

$$\tilde{S}_i = \mathrm{med}\{S_{ik}\},\ i = \overrightarrow{1,n}, k = \overrightarrow{1,n_E}.$$

Нормалізовані вагові коефіцієнти отримуємо за наступним виразом:

$$\rho_i = \frac{\tilde{S}_i}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{S}_i} = \frac{\mathrm{med}\{S_{ik}\}}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{med}\{S_{ik}\}},\ \sum_{i=1}^{n} \rho_i = 1.$$

Обчислення невизначеності вагових коефіцієнтів

Існує цілий ряд способів обчислення довірчого інтервалу медіани для вибірки з нормальної генеральної сукупності [11]. Але для обчислення довірчого інтервалу використовується генеральне середнє і генеральне середнє квадратичне відхилення. Зважаючи на шкалу порядку вихідних даних для оцінювання довірчого інтервалу медіани доцільно використовувати методи непараметричного статистичного оцінювання. Для цього результати експертного оцінювання (вектор-рядки табл. 2) ранжують за зростанням:

$$S'_{i1}, ..., S'_{ik}, ..., S'_{in_E},$$

де S'_{ik} – порядкові статистики ранжованого ряду.

При кількості експертів $n_E > 10$ для непараметричного оцінювання границь довірчого інтервалу використовують порядкові статистики S_L і S_H з номерами L і H:

$L = E\left[\left(n_E + 1 - z_P \cdot \sqrt{n_E}\right)/2\right]$ для нижньої границі S_L;

$H = E\left[\left(n_E + 1 - z_P \cdot \sqrt{n_E}\right)/2 + 1\right]$ для верхньої границі S_H, (1)

якщо $\left(n_E + 1 - z_P \cdot \sqrt{n_E}\right)/2$ не ціле число [12]. Тоді границями довірчого інтервалу з ймовірністю P є порядкові статистики S_L і S_H. Значення z_p відповідає функції нормального розподілу.

Тоді границі довірчого інтервалу нормалізованого вагового коефіцієнту з ймовірністю P обчислюються за формулою:

$$\rho_{iL} = \frac{S_{iL}}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{med}\{S_{ik}\}};\ \rho_{iH} = \frac{S_{iH}}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{med}\{S_{ik}\}},\ k = \overrightarrow{1,n_E}.$$

В статті вирішувалася задача отримання границь довірчого інтервалу вагових коефіцієнтів при кількості експертів $n_E = 3...10$. Для цього було використано наступне положення [13]: якщо $\left(x_1, x_2, ..., x_{n_E}\right)$ – вибірка з розподілу з неперервною функцією розподілу $F(x)$ і, якщо $x(k_1), x(k_1 + k_2)$ – порядкові статистики цієї вибірки з номерами k_1 та $(k_1 + k_2)$, тоді $[x(k_1), x(k_1 + k_2)]$ – довірчий інтервал для квантилю x_p при довірчій ймовірності

$$I_P(k_1, n_E - k_1 + 1) - I_P(k_1 + k_2, n_E - k_1 - k_2 + 1),$$

тобто

$$P\left(x(k_1) < x_P < x(k_1 + k_2)\right) = I_P(k_1, n_E - k_1 + 1) - \\ - I_P(k_1 + k_2, n_E - k_1 - k_2 + 1),$$

де $I_P(\nu_1, \nu_2)$ – неповна бета-функція:

$$I_P(\nu_1, \nu_2) = \frac{\Gamma(\nu_1 + \nu_2)}{\Gamma(\nu_1) \cdot \Gamma(\nu_2)} \cdot \int_0^P x^{\nu_1 - 1} \cdot (1 - x)^{\nu_2 - 1} dx,$$

де $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функція.

При побудові довірчого інтервалу для медіани $medS_i = x_{0,5}; k_1 = k; k_1 + k_2 = n_E - k + 1$.

Тоді формула для ймовірності набуває наступного вигляду:

$$P\left(x(k) < x_{0,5} < x(n_E - k + 1)\right) = I_{0,5}(k, n_E - k + 1) - \\ - I_{0,5}(n_E - k + 1, k).$$

Скориставшись властивостями неповної бета-функції [11]:

$$I_P(\nu_1, \nu_2) = 1 - I_{1-P}(\nu_2, \nu_1),$$

авторами винайдено наступну формулу

$$P\left(x(k) < x_{0,5} < x(n_E - k + 1)\right) = \\ = 2 \cdot I_{0,5}(k, n_E - k + 1) - 1. \quad (2)$$

Таблиці неповних бета-функцій побудовано для $0 < k \le 17, n_E - k + 1 \ge 50$, тобто для вибірок з великим об'ємом [13]. Тому для обчислення значень неповної бета-функції можна скористатися формулою з математичної статистики [11]:

$$I_P\left(k, n_E - k + 1\right) = \sum_{i=k}^{n_E} C_{n_E}^i \cdot p^i \cdot (1-p)^{n_E - i}.$$

Для перевірки збіжності винайденої авторами формули (2) з формулою (1) отримаємо границі медіани для великої кількості експертів $n_E = 15$. Якщо $P = 0,95; z_P = 1,96; L = 4; H = 12$, тобто границі довірчого інтервалу для медіани з ймовірністю $P = 0,95$ – це 4-а та 12-та порядкові статистики.

А тепер обчислимо ймовірність знаходження медіани в інтервалі між цими порядковими статистиками за формулою (2):

$$I_{0,5}(4,12) = (0,5)^{n_E} \sum_{i=4}^{12} C_{n_E}^i = 0,9787;$$

$$P\left(x(4) < x_{0,5} < x(12)\right) = 2 \cdot I_{0,5}(4,12) - 1 = 0,957.$$

Цей розрахунок підтверджує збіжність результатів, враховуючи дискретний характер даних за формулою (1). Недоліком обчислення номеру порядкової статистики за заданою ймовірністю є похибка заокруглення номеру порядкової статистики. При малій кількості експертів n_E вона виявляється значною. Саме цим обумовлено обмеження застосування способу (1) границею $n_E > 10$. Дослідження показали, що розмах між 4-ою та 12-ою порядковими статистиками при $n_E = 15$ відповідає інтервалу ймовірностей від 0,89 до 0,96 (z_p від 1,6 до 2,06). При зменшенні n_E інтервал ймовірностей збільшується. Так, для граничного значення $n_E = 11$ розмах між 3-ою та 9-ою порядковими статистиками відповідає інтервалу ймовірностей від 0,8 до 0,93. Розрахунки за формулою (2) дозволяють отримати:

$$I_{0,5}(3;9) = 0,9614; P\left(x(3) < x_{0,5} < x(9)\right) = 0,923.$$

Для практичного використання способу обчислення ймовірностей, поданого формулою (2), авторами розроблено табл. 3, в якій наведено значення ймовірностей, що відповідають довірчому інтервалу медіани, який заданий номерами порядкових статистик в залежності від кількості експертів. Якщо кількість експертів мала $n_E = 3$ або $n_E = 4$, тоді інтервал порядкових статистик відповідає розмаху вагових коефіцієнтів.

Таблиця 3

Ймовірності знаходження медіани в довірчому інтервалі, що заданий номерами порядкових статистик (L – для нижньої границі, H – для верхньої границі)

Кількість експертів n_E / Границі довірчого інтервалу	3	4	5	6	7	8	9	10
$L = 1$, $H = n_E$	0,75	0,88	0,94	0,97	0,98	0,992	0,996	0,998
$L = 2$, $H = n_E - 1$	–	–	0,56	0,75	0,86	0,92	0,96	0,98
$L = 3$, $H = n_E - 2$	–	–	–	–	0,42	0,64	0,78	0,87

За номерами порядкових статистик L, H з ранжованого ряду S'_{ik} отримуємо значення S'_{iL}, S'_{iH}. Ймовірність $P(\rho_{iL} < \tilde{\rho}_i < \rho_{iH})$ знаходимо з табл. 3 за значеннями L, H, n_E. Розширену невизначеність i-го вагового коефіцієнту знаходимо як

$$U(P) = \rho_{iH} - \tilde{\rho} = \left|\tilde{\rho} - \rho_{iL}\right|.$$

Висновки

В статті розглянуто процедуру отримання вагових коефіцієнтів окремих властивостей складного об'єкту при формуванні його узагальненого показника якості. Вагові коефіцієнти визначаються за експертним методом попарного порівняння, заснованого на бінарному відношенні порядку. Результати оцінювання окремих експертів об'єднуються для визначення вагових коефіцієнтів. Зважаючи на те, що дані подано за шкалою порядку, в статті використано непараметричну оцінку вагових коефіцієнтів – медіану.

Проведений авторами статті аналіз показав, що наявні методи для обчислення невизначеності медіани можуть бути застосовані при кількості експертів $n_E > 10$. Це обумовлено наявністю похибки заокруглення при визначенні номерів порядкових статистик, що відповідають довірчому інтервалу медіани. Тому в статті винайдено формулу, що дозволяє обчислити ймовірність знаходження медіани в границях, які подані порядковими статистиками при $n_E \geq 3$, тобто ймовірність, що відповідає розширеній невизначеності.

Розроблений спосіб обчислення невизначеності як оцінки результату вимірювання може бути застосований не тільки при визначенні вагових коефіцієнтів, а й при обробці даних, отриманих за шкалою порядку, якщо оцінкою результату вимірювання обрано медіану. Для практичного використання авторами розроблено таблицю, за якою можна отримати ймовірності, що відповідають довірчому інтервалу медіани, заданому номерами порядкових статистик в залежності від кількості експертів.

Список літератури

1. *Харитонов Е.В. Метод согласования субъективных измерений в иерархиях матриц отношений предпочтения / Е.В. Харитонов // Измерительная техника. – 2000. – № 9. – С. 26-29.*
2. *Харитонов В.А. Новые способы преобразования форм представления субъективных измерений / В.А. Харитонов, Е.В. Харитонов // Измерительная техника. – 2002. – № 1. – С. 29-32.*
3. *Метрологія. Терміни та визначення : ДСТУ 2681-94. – К. : Держспоживстандарт України, 1994. – 50 с. – (Національний стандарт України).*
4. *Радаев Н.Н. Точность экспертного оценивания сосотояния объекта методом попарных сравнений с количественной оценкой предпочтения / Н.Н. Радаев // Измерительная техника. – 2007. – № 9. – С. 6-11.*
5. *Гохман О.Г. Экспертное оценивание / О.Г. Гохман. – Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1991. – 217 с.*
6. *Гнатієнко Г.М. Алгоритми обробки експертної інформації в задачах ранжування та їх застосування: дис. ... канд. техн. наук : 05.13.16 / Гнатієнко Григорій Миколайович. – К., 1994. – 133 с.*
7. *Дэвид Г. Метод парных сравнений / Г. Дэвид. – М.: Статистика, 1978. – 144 с.*
8. *Гнатієнко Г.М. Експертні технології прийняття рішень: монографія / Г.М. Гнатієнко, В.Є. Снитюк. – К.: ТОВ „Маклаут", 2008. – 444 с.*
9. *Тульчин Л.Г. Оценка качества электроизмерительных приборов / Л.Г. Тульчин, А.М. Хаскин, В.Д. Шаповалов – Л.: Энергоиздат. Ленингр. отд-ние, 1982. – 216 с.*
10. *Алексеев А.Н. Дистанционное обучение инженерным специальностям: монография / А.Н. Алексеев. – Сумы: ИТД „Университетская книга", 2005. – 333 с.*
11. *Большев Л.Н.Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 416 с.*
12. *Грановский В.А. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях / В.А. Грановский, Т.Н. Сирая. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1990. – 280 с.*
13. *Уилкс С. Математическая статистика / С. Уилкс. – М.: Наука, 1967. – 632 с.*

Надійшла до редколегії 17.12.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.Т. Кондратов, Інститут кібернетики Національної академії наук України, Київ.

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ ЭКСПЕРТНОМ ОЦЕНИВАНИИ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Е.Н. Сикоза, Н.А. Яремчук

В статье рассмотрен вопрос получения неопределенности весовых коэффициентов при их экспертном оценивании. Весовые коэффициенты используются для комбинирования отдельных свойств сложного объекта. Неопределенность вычисляется с использованием допустимых операций для ординальной шкалы, при помощи которой отображаются значения весовых коэффициентов. Для получения значений весовых коэффициентов и их расширенной неопределенности использованы порядковые статистики, а доверительная вероятность вычисляется по выведенной авторами формуле. Для практического применения разработаны таблицы, с использованием которых можно получить доверительную вероятность по номерам порядковых статистик и количеству экспертов, которые задействованы при оценивании.

Ключевые слова: *шкала порядка, весовые коэффициенты, экспертное оценивание, неопределенность.*

THE UNCERTAINTY CALCULATION AT EXPERT EVALUATION OF WEIGHT COEFFICIENTS

O.M. Sikoza, N.A. Yaremchuk

In the article question of receipt weight coefficients uncertainty at their expert evaluation is considered. Weight coefficients are used for combining of complex object's separate properties. The uncertainty is calculated taking into account possible operations for an ordinal scale which the values of weight coefficients are represented after. For practical application tables, after which it is possible to get confiding probability after the numbers of index statistician and by the amount of experts which are involved at an evaluation are developed.

Keywords: *ordinal scale, weight coefficients, expert evaluation, uncertainty.*