УДК 519.85

І.А. Чуб[1], М.В. Новожилова[2], І.В. Беленченко[2]

[1] *Національний університет цивільного захисту України, Харків*
[2] *Харківський технічний університет будівництва та архітектури, Харків*

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА РОЗВ'ЯЗОК ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ ПРОЕКТУ

Розглянуто математичну модель та метод розв'язання оптимізаційної задачі розподілу ресурсів проекту як задачі розміщення об'єктів зі змінними метричними характеристиками.

Ключові слова: *задачі розподілу ресурсів проектів, розміщення об'єктів, оптимізація.*

Вступ

Постановка проблеми. Математичне моделювання оптимізаційних задач розподілу ресурсів проектів може проводитися засобами теорії оптимізаційного геометричного проектування [1] із застосуванням методики розв'язання задач розміщення геометричних об'єктів зі змінними метричними характеристиками. Методи розв'язання задач розподілу ресурсів проектів переважно є евристичними, тому актуальним є математичне моделювання з урахуванням їх специфіки та розробка ефективних точних методів розв'язання.

Аналіз публікацій. У рамках теорії оптимізаційного геометричного проектування [1] множина задач розподілу ресурсів може бути представлена як задача розміщення n прямокутників у смузі заданої ширини так, щоб довжина зайнятої частини смуги була мінімальною. Для окремих реалізацій даної задачі розроблені ефективні методи знаходження глобального мінімуму – а саме метод гілок та меж [2], та методи пошуку локального мінімуму, засновані на застосуванні симплекс-методу або методах активного набору [3]. Існує значний клас практичних задач управління ресурсами, де необхідно передбачити можливість зміни метричних характеристик об'єктів. Тому однією з проблем при розв'язанні задач розподілу ресурсів проекту, яку можна представити як задачу розміщення, є проблема врахування змін характеристик об'єктів.

Основний матеріал

Постановка задачі. Розглянемо математичну модель та методику розв'язання задачі визначення оптимальних затратних характеристик проекту.

У загальному випадку проект R складається зі скінченої множини N робіт $R = \{R_n\}, n = 1, 2, ...N$. Робота R_n представляється як гіперпаралелепіпед у просторі ресурсів E^K. Для кожної роботи R_n відомі потреби в ресурсах: $R_n : \left(a_n, b_n^1, b_n^2, ..., b_n^{K-1}\right)$: де a_n – тривалість роботи, b_μ^k – інші ресурси, $n = 1, 2, ...N, k = 1, 2, ...K-1$. Відомі також величини $\{T, B^1, B^2, ..., B^{K-1}\}$ загальних ресурсів на виконання даного проекту, що виділяють у просторі ресурсів E^K область R_0. Вектор параметрів розміщення $u_n=(u_{n1}, u_{n2}, \ldots, u_{nk})$ задає положення об'єкта R_n у просторі ресурсів проекту, при цьому параметр u_{n1} визначає момент початку роботи R_n. Вважатимемо, що полюс O_n власної системи координат є вершиною об'єкта R_n.

Математична модель оптимізаційної задачі розміщення має вигляд:

$$\text{знайти:} \quad u^* = \arg\min_{u \in D \subset E^{KN}} \Psi(u), \tag{1}$$

де $u = (u_1, u_2, ..., u_N)$ – вектор параметрів розміщення об'єктів; область D припустимих розв'язків визначається геометричними обмеженнями на взаємне розміщення об'єктів, розміщення об'єктів в області, а також множиною технологічних і фізичних обмежень [1].

Нехай множина $R_n \subset E^3$ задана такими ресурсами: час T_n: $\{a_n\}$, фінанси R_0^2: $\{b_n^1\}$ і людський ресурс W_n: $\{b_n^2\}$. У E^3 просторова форма роботи (об'єкта) R_n – паралелепіпед (рис. 1, а).

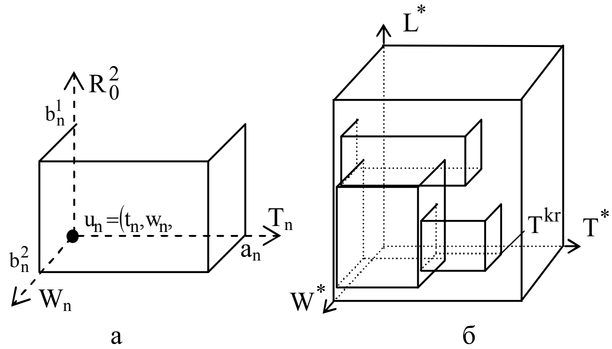


Рис. 1. Графічне представлення задачі розподілу декількох ресурсів

Положення кожної роботи R_n (u_n) в E^3 характеризується вектором параметрів розміщення $u_n=(t_n, w_n, l_n)$, що задають положення полюса власної системи координат $O_nT_nW_nL_n$. При цьому T*, W*, L* – максимальні значення відповідних ресурсів, можливі для виконання проекту, T^{kr} – тривалість критичного шляху (рис. 1, б).

Формалізація обмежень задачі. У припущенні, що екзогенні параметри моделі (1) є постійними, область R_0 – необмежений замкнений паралелепіпед умова на розміщення об'єктів в області описується системою N систем лінійних нерівностей вигляду:

$$F_h^n(u_n, a_n, b_n^1, b_n^2, W^*, L^*, T) \geq 0, \qquad (2)$$

де функції F_h^n, $h = \overline{1,6}$, $n = 1, 2, \ldots, N$ мають вигляд

$$F_h^n(u_n, a_n, b_n^1, b_n^2, W^*, L^*, T) := \begin{cases} t_n \geq 0; \\ T - t_n - a_n \geq 0; \\ w_n \geq 0; \\ W^* - w_n - b_n^1 \geq 0; \\ l_n \geq 0; \\ L^* - l_n - b_n^2 \geq 0. \end{cases}$$

Умови неперетину пари об'єктів (R_i, R_j) задаються системою N(N-1)/2 наборів лінійних нерівностей вигляду:

$$F^s(u_i, u_j) := \left\langle f_v^s(u_i, u_j) \geq 0, \right. \qquad (3)$$

де $f_1^s(u_i, u_j) = t_j - t_i - a_i$; $f_2^s(u_i, u_j) = t_i - t_j - a_j$;

$f_3^s(u_i, u_j, a_i, a_j) = w_j - w_i - b_i^1$;

$f_4^s(u_i, u_j) = w_i - w_j - b_j^1$; $\quad f_5^s(u_i, u_j) = l_i - l_j - b_j^2$;

$f_6^s(u_i, u_j) = l_j - l_i - b_i^2$; $\quad v = \overline{1,6}$, $s = \overline{1, N(N-1)/2}$.

Нехай на множині R задане відношення часткового впорядкування робіт [4] проекту у часі, яке обумовлюється технологічними обмеженнями виконання конкретних робіт проекту і задається у вигляді:

$$R_i \prec R_j, \; i, j = 1, 2, \ldots, N, \; i \neq j, \qquad (4)$$

де знак $\prec$ означає, що робота R_j повинна виконуватися безпосередньо після роботи R_i.

Ця умова відбиває технологічну послідовність робіт, яка визначена специфікою проекту і аналітично задається обмеженням:

$$f_2^s(u_i, u_j) := t_i - t_j - a_j = 0. \qquad (5)$$

Інакше кажучи, якщо об'єкти (Ri, Rj) знаходяться у відношенні (8), з усього набору (6), який задає умову взаємного неперетину пари (Ri, Rj), береться до уваги тільки рівняння (8).

Формалізація критерію якості задачі. У відповідності з [4] задачу (1) можна розглядати як двоетапну.

<u>Етап 1</u> містить такі задачі:

- визначення критичного шляху T^{kr} (Задача I);
- розподіл робіт на критичні (не мають резервів часу) операції $R_k, k \in K$, де K – множина індексів критичних робіт, і некритичні – $R_{\bar{k}}, \bar{k} \in \bar{K}$, $\bar{K} = J/K$ (J/K – теоретико-множинна від'ємність), $J = \bar{K} \cup K$, де $|J| = N$, $\bar{K}$ – множина індексів некритичних робіт.
- визначення резервів часу $t_x\left(R_{\bar{k}}\right)$ некритичних робіт.

В якості цільової функції на першому етапі обираємо час T, а інші критерії виносимо в обмеження задачі:

$$\Psi(u) := T(u) \to \min. \qquad (6)$$

На <u>етапі 2</u> вирішується задача вирівнювання та оптимізації використання ресурсів W, L (Задача II).

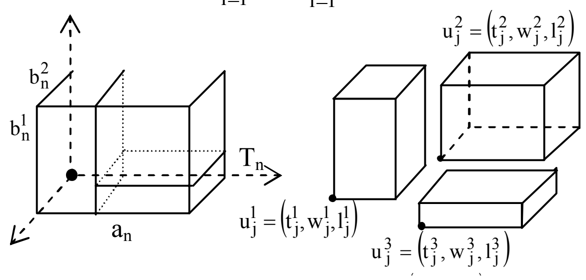
Розв'язання Задачі I можна проводити точними (метод гілок та меж) або наближеними (метод послідовно-одиночного розміщення, метод околів, що звужуються) методами. Результат розв'язання Задачі I – критичний шлях проекту T^{kr} (найкраще розміщення об'єктів у часі з урахуванням умови часткової упорядкованості робіт) – є початковим наближенням для Задачі II. З урахуванням результатів реалізації Етапу 1 у якості цільового функціонала багатокритеріальної Задачі II розглядаємо функцію вигляду

$$\Psi(u) := W(u) + L(u) \to \min, \qquad (7)$$

при цьому $T = T^{kr}$.

Ґрунтуючись на [5, 6], задача вирівнювання ресурсів розв'язується з урахуванням можливості розриву некритичних робіт $R_{\bar{k}}$ у часі й по ресурсах (рис. 2) на часткові роботи $R_{\bar{k}}^i$:

$$R_{\bar{k}} = \sum_{i=1}^{I} R_{\bar{k}}^i, \; \bigcap_{i=1}^{I} R_{\bar{k}}^i = \varnothing.$$



а , б

Рис. 2. Розбиття роботи $R_{\bar{k}}$: а – вихідна некритична робота; б – можливе розбиття некритичної роботи на часткові роботи

Математична модель багатомірної задачі вирівнювання ресурсів має вигляд:

$$\text{знайти:} \quad \bar{u}^* = \arg\min_{(\bar{u}, A) \in \Theta \subset R^{3(N+\bar{K}-K)+2\bar{K}}} \Psi(u), \qquad (8)$$

$A = (a_1^1, \ldots, a_1^{I_1}, b_1^{1-1}, \ldots, b_1^{1-I_1}, \ldots, b_N^{2-1}, \ldots, a_N^{2-I_N})$ - вектор метричних характеристик R_j^i; $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_{2\bar{K}})$ - вектор параметрів розміщення некритичних робіт; $\bar{K} = O(N \cdot I_N)$; Θ - область припустимих рішень:

$$w_n + b_n^{1-i} - D^* \leq 0; \; l_n + b_n^{2-i} - L^* \leq 0;$$

$$t_n, w_n, l_n \geq 0, \; i = 1, 2, \ldots, I_n, \; n = 1, 2, \ldots, N;$$

$$t_n^* \leq t_n^i \leq t_n^* + T_n;$$

$$t_j - t_i + a_j \leq 0 \;\text{ или }\; t_i - t_j + a_i \leq 0;$$

$$w_j^1 - w_i^1 + b_i^1 \leq 0 \;\text{ или }\; w_i^1 - w_j^1 + b_j^{1-1} \leq 0;$$

$$l_j^1 - l_i^1 + b_j^{2-1} \leq 0 \;\text{ или }\; l_i^1 - l_j^1 + b_j^{2-1} \leq 0,$$

де $[t_n^*, T_n]$ – вільний резерв часу некритичної роботи R_n, $i,j=1,2,...,\overline{K}$, $i \neq j$.

Метод розв'язання задачі. Для розв'язання задачі використовуємо алгоритм, заснований на схемі методу гілок та меж. В [7] запропоновано дерево рішень A для задачі (1), за допомогою якого здійснюється формування й перебір систем $\Im(u)=0$ лінійних рівнянь. Ми застосовуємо модифікацію методу розв'язання [6], що враховує можливість розбиття робіт проекту, яка передбачає побудову дерева рішень A з такими особливостями:

- рівні дерева рішень A, які відповідають параметрам розміщення критичних робіт, виключаються з подальшого розгляду, тому що вони є постійними величинами. Таких рівнів – 3K;
- визначення резервів часу $t_x(R_{\overline{k}})$ некритичних робіт виділяє таку підмножину R_Q зі всієї множини R робіт, що при виконанні вирівнювання ресурсів необхідно перевіряти умови неперетину R_q з поточною некритичною роботою;
- розбиття некритичної роботи $R_{\overline{k}}$ за двома ресурсами (рис. 2) одночасно означає додавання дев'яти додаткових рівнів дерева рішень.

Програмна реалізація виконана в Borland Delphi 7.0, мова програмування Object Pascal 6.0.

Результати чисельних експериментів. Розглядалась задача побудови календарного графіка робіт щодо монтажу комплексної системи пожежної автоматики складського терміналу у м. Вишневе Святошинського району Київської області. Перелік та характеристика робіт з монтажу і налагодженні системи наведено в табл. 1. Загальна вартість робіт згідно кошторису – 320000 грн.

Таблиця 1

Перелік та характеристика робіт з монтажу системи пожежної автоматики

Познаення операції	Найменування робіт і витрат	Вартість комплектуючих, грн/шт	Заробітна плата, грн/операція	Витрати труда люд.-год.	Кількість робітників	Тривалість операції
R_1	Підготовчі роботи на насосній станції	1200	500	25	2	2
R_2	Виготовлення дрібних індивідуальних конструкцій	59480	4611	3490	18	24
	Насосна станція автоматичного пожежогасіння					
R_3–R_6	Монтаж насосних агрегатів SP-16-4-A MMS-8000	145000	800	60	2	3
R_7	Монтаж компресора	6000	1000	30	4	1
R_8	Установлення фланцевих з'єднань на трубопроводах	22230	3013	169	4	5
R_9	Виготовлення вузлів труб із фланцями	4584	2734	1070	8	17
R_{10}	Монтаж трубопроводів зі сталевих труб із фланцями	46344	8627	1832	13	17
R_{11}	Монтаж вентилів, засувок, клапанів сталевих	56317	9249	1175	13	11
R_{12}	Перевірка на герметичність з'єднань	0	600	30	2	2
R_{13}	Грунтування та фарбування трубопроводів	780	200	10	1	1
	Приміщення, які захищаються					
R_{14}	Монтаж опорних конструкцій	22767	20361	1531	27	7
R_{15}	Виготовлення вузлів для трубопроводів	31716	16852	1335	28	6
R_{16}	Монтаж спринклерних трубопроводів	42533	39593	2808	27	13
R_{17}	Виготовлення вузлів для цехових трубопроводів	119155	92290	6545	31	26
R_{18}	Монтаж цехових трубопроводів	184075	172891	12362	59	26
R_{19}	Виготовлення вузлів для цехових трубопроводів	35069	18970	1345	24	7
R_{20}	Монтаж цехових трубопроводів	36809	34742	2464	25	12
R_{21}	Виготовлення вузлів для цехових трубопроводів	81337	67847	4812	40	10
R_{22}	Монтаж дренчерних трубопроводів	4724	4433	314	10	4
R_{23}	Монтаж трубопроводів пінного пожежогасіння	139648	13028	9300	58	10
R_{24}	Виготовлення вузлів для цехових трубопроводів	656	568	316	13	3
R_{25}	Монтаж трубопроводів спринклерних установок	953	920	217	9	3
R_{26}	Виготовлення вузлів для цехових трубопроводів	2565	1360	630	26	3
R_{27}	Монтаж трубопроводів спринклерних установок	2539	2436	216	5	5
R_{28}	Монтаж муфт	27452	23394	1659	41	5
R_{29}	Перевірка на герметичність з'єднань	0	1600	30	2	2
R_{30}	Монтаж зрошувачів спринклерних установок	238900	20124	1427	36	5
R_{31}	Монтаж зрошувачів, насадок дренчерних установок	15080	717	51	3	3
R_{32}	Здача системи в експлуатацію	0	315	24	1	3
		1327913	580073	55277		236

На рис. 3 наведені результати розв’язання задачі визначення критичного шляху. Час виконання проекту складає 130 робочих днів, максимальна кількість виконавців – 175 осіб. На рис. 4 представлені результати розв’язання задачі вирівнювання ресурсів проекту. Завдяки вирівнюванню використання людського ресурсу максимальна кількість виконавців, які мають працювати одночасно, складає 103 особи.

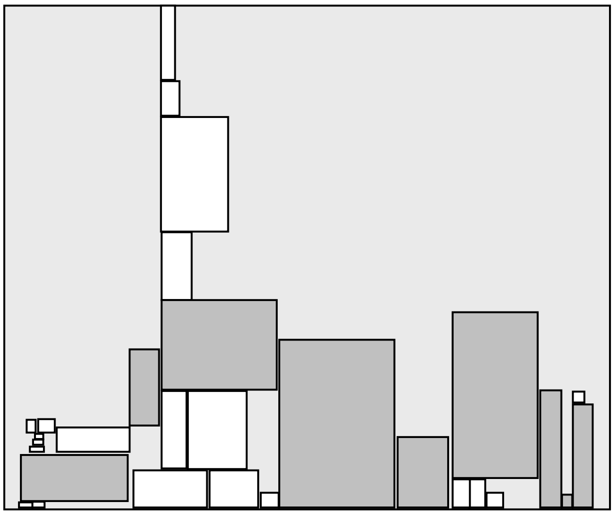


Рис. 3. Результати розв’язання задачі визначення критичного шляху проекту

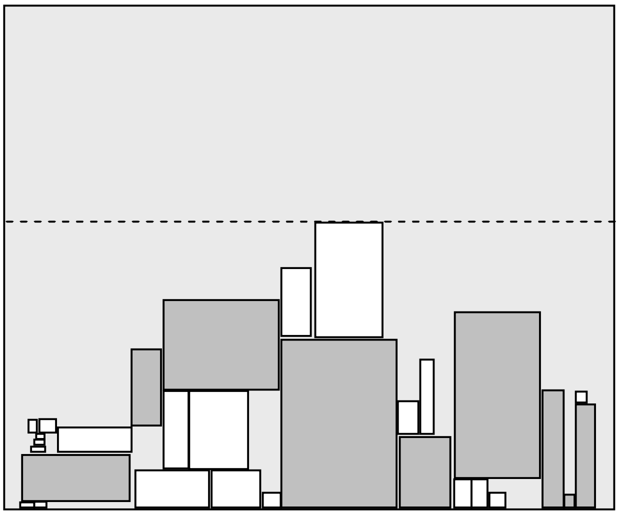


Рис. 4. Результати розв’язання задачі вирівнювання ресурсів проекту

Висновки

Побудована математична модель багатокритеріальної задачі розподілу обмежених ресурсів проекту як оптимізаційної задачі розміщення кінцевого набору геометричних об'єктів зі змінними метричними характеристиками й просторовою формою. Запропонований метод її розв’язання й проведені чисельні дослідження на прикладі оптимізації плану виконання робіт з монтажу комплексної системи пожежної автоматики складського терміналу у м. Вишневе Київської області.

Список літератури

1. *Стоян Ю.Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев. – К.: Наук. думка, 1986. – 266 с.*

2. *Исследование операций. В 2-х т. Т.2. Модели и применения / Под ред. Дж. Моудера, С Элмаграби. – М: Мир, 1981. – 677 с.*

3. *Новожилова М.В. Метод решения задачи размещения прямоугольников с переменными метрическими характеристиками / М.В. Новожилова, И.А. Чуб, М.Н. Мурин // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – Вып. 4. – С. 143-150.*

4. *Новожилова М.В. Анализ задачи управления ресурсами в условиях стабильности окружающей среды / М.В. Новожилова, Н.А. Попельнюх // Науковий вісник будівництва. – 2005. – № 31. – С. 313-317.*

5. *Новожилова М.В. Математическая модель оптимального распределения нескольких ресурсов инвестиционно-строительного проекта / М.В. Новожилова, И.В. Беленченко // Науковий вісник будівництва. – 2007. – № 43. – С. 236-239.*

6. *Чуб И.А. Решение задачи распределения ресурсов проекта как оптимизационной задачи размещения геометрических объектов с изменяемыми метрическими характеристиками / И.А. Чуб, А.С. Иванилов, М.В. Новожилова // Проблемы машиностроения. – 2010. – Т. 4, № 5-6. – С. 79-94.*

7. *Новожилова М.В. Об одном способе поиска оптимального размещения прямоугольных гиперпараллелепипедов / М.В. Новожилова, А.А. Черноморец. – Х.: ИПМаш НАНУ, 1992. – 26 с.*

Надійшла до редколегії 7.02.2011

Рецензент: д-р фіз.-мат. наук, проф. Н.Д. Сизова, Харківський технічний університет будівництва та архітектури, Харків.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ ПРОЕКТА

И.А. Чуб, М.В. Новожилова, И.В. Беленченко

Рассмотрена математическая модель и метод решения оптимизационной задачи распределения ресурсов проекта как задачи размещения объектов с изменяемыми метрическими характеристиками.

Ключевые слова: *задачи распределения ресурсов проектов, распределение объектов, оптимизация.*

MATHEMATICAL MODEL AND DECISION OPTIMIZATION PROBLEM OF DISTRIBUTION OF THE PROJECT RESOURCES

I.A. Chub, M.V. Novozhilova, I.V. Belenchenko

The mathematical model and method of the decision optimization problem of distribution of the project resources as problem of accommodation of objects with the changeable metric characteristics is considered.

Keywords: *tasks of allocation of resources of projects, distributing of objects, optimization.*