

УДК 621.37:621.391.519.21

А.Я. Белецкий, Д.С. Демьяник

Национальный авиационный университет, Киев

ОЦЕНКА ДИСПЕРСИИ ГАРМОНИК СПЕКТРА ОДНОСВЯЗНОГО МАРКОВСКОГО ГАУССОВСКОГО ПРОЦЕССА В ДИСКРЕТНЫХ БАЗИСАХ ВИЛЕНКИНА-КРЕСТЕНСОНА ФУНКЦИЙ

Получены аналитические соотношения для оценки дисперсии откликов частотных каналов процессора ДПФ в базисах дискретно-экспоненциальных функций, функций Уолша и Виленкина-Крестенсона функций при подаче на вход процессора отсчётов гауссовского односвязного марковского шума. Результаты исследований могут найти применение при решении задач цифровой обработки доплеровско-импульсных радиолокационных сигналов.

Ключевые слова: дискретные базисы, процессор ДПФ, системы ДЭФ, Уолша, ВКФ.

Введение и постановка задачи

Процессор дискретного преобразования Фурье (ДПФ) осуществляет вычисление спектра $\dot{X}(k)$ в общем случае комплексного входного сигнала $\dot{x}(l)$, реализуя соотношения [1]

$$\dot{X}(k) = \sum_{l=0}^{N-1} \dot{x}(l)\varphi(k,l), \quad k, l = \overline{0, N-1},$$

где $\varphi(k,l)$ – базисная функция k -го порядка нормализованного времени l ; N – объём выборки отсчётов входного сигнала $\dot{x}(t)$.

Для процесса с математическим ожиданием (МО), равным нулю, и дисперсией ψ введём соответствие $\dot{x}(t) \Leftrightarrow N(0, \psi)$, в котором N есть обозначение нормального гауссовского распределения, а в скобках указаны параметры (МО и дисперсия) этого распределения.

Пусть

$$R_{ij} = \frac{\langle x_i x_j \rangle}{\psi}, \quad i, j = \overline{0, N-1}, \quad (1)$$

есть элементы автокорреляционной матрицы (АКМ) дискретного сигнала. Если выполняется условие $R_{ij} = R^{|i-j|}$, где R – коэффициент корреляции отсчётов сигнала, разнесённых на один период дискретизации T , то последовательность $\dot{x}(l)$ называется односвязной марковской.

Принимая во внимание свойство четности автокорреляционной функции, АКМ односвязной цепи представляется в виде соотношения:

$$\begin{vmatrix} 1 & R & R^2 & \dots & R^{N-1} \\ R & 1 & R & \dots & R^{N-2} \\ R^2 & R & 1 & \dots & R^{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R^{N-1} & R^{N-2} & R^{N-3} & \dots & 1 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Основная задача, которая решается в данной работе, состоит в получении аналитических оценок дисперсии откликов частотных каналов процессора ДПФ в различных базисах дискретного преобразования для односвязной марковской модели входного гауссовского шума. В качестве базисов рассмотрены базисы дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ), функций Уолша, являющиеся частными случаями базиса дискретных Виленкина-Крестенсона функций (ВКФ), а также непосредственно базис ВКФ, отличный от базисов ДЭФ и функций Уолша.

Базис дискретных экспоненциальных функций

Предположим, что на вход процессора ДПФ подаётся комплексный дискретный сигнал

$$\dot{x}_l = a_l + jb_l, \quad (3)$$

квадратурные составляющие которого a_l и b_l взаимно независимы, а по отдельности представляют собой последовательности, образующие односвязные марковские цепи такие, что

$$a_l, b_l \Leftrightarrow N(0, \psi), \quad l = \overline{0, N-1}. \quad (4)$$

Моделирование односвязной марковской последовательности случайных величин (СВ), удовлетворяющих условиям (3) и (4), осуществляется согласно следующему простому алгоритму. Сначала формируется ряд независимых СВ

$$c_l \Leftrightarrow N(0, \psi), \quad l = \overline{0, N-1},$$

которые затем переопределяются по правилу

$$a_0 = c_0; \quad a_l = R \cdot a_{l-1} + \sqrt{1-R^2} \cdot c_l. \quad (5)$$

Аналогичным образом формируется и последовательность дискретных СВ b_l . Легко проверить, что ряд (5) удовлетворяет условию (4).

Процессор ДПФ N -мерной совокупности входных сигналов \dot{x}_l ставит в соответствие N -мерную

совокупность комплексных гармоник

$$\dot{X}(k) = A_k + jB_k, \quad k = \overline{0, N-1},$$

где k – номер гармоники, а A_k и B_k – вещественная и мнимая составляющие k -й гармоники спектра соответственно.

В силу того, что операция ДПФ в любом базисе сводится к алгебраическому суммированию последовательности входных сигналов \dot{x}_l с постоянными (возможно, комплексными) весами, а также принимая во внимание то, что квадратурные составляющие a_l и b_l этого сигнала есть СВ $\Leftrightarrow N(0, \psi)$, приходим к общим соотношениям

$$A_k, B_k \Leftrightarrow N(0, \psi_k), \quad k = \overline{0, N-1},$$

где ψ_k – дисперсия квадратур k -й гармоники спектра.

Рассмотрим базис ДЭФ, прямое ДПФ в котором зададим соотношением

$$\dot{X}(k) = \sum_{l=0}^{N-1} \dot{x}_l W^{kl},$$

где $W = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\right)$ – есть фазовый (или поворачивающий) множитель.

Воспользовавшись формулой Эйлера, представим W^{kl} в виде

$$W^{kl} = c_{kl} - js_{kl}, \quad (6)$$

причём

$$c_{kl} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}kl\right), \quad s_{kl} = \sin\left(\frac{2\pi}{N}kl\right). \quad (7)$$

На основании соотношений (3), (6) и (7) приходим к следующим выражениям для квадратурных составляющих

$$A_k = \sum_{l=0}^{N-1} a_{kl}; \quad B_k = \sum_{l=0}^{N-1} b_{kl}, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (8)$$

где

$$a_{kl} = c_{kl}a_l + s_{kl}b_l; \quad b_{kl} = c_{kl}b_l - s_{kl}a_l. \quad (9)$$

Легко показать, что $\langle a_l \rangle$ и $\langle b_l \rangle$ равны нулю и, кроме того, эти СВ некоррелированы, т.е. $\langle a_l b_l \rangle = 0$. В силу того, что A_k (как и B_k) есть центрированные СВ (т.е. $\langle A_k \rangle = 0$), дисперсию k -й гармоники ψ_k определим из соотношения

$$\psi_k = \langle A_k^2 \rangle.$$

которое, согласно (8), примет вид

$$\psi_k = \left\langle \left(\sum_{l=0}^{N-1} a_{kl} \right)^2 \right\rangle. \quad (10)$$

Операцию возведения в квадрат ряда (10) легко осуществить, воспользовавшись квадратной матрицей (табл. 1) размером $N \times N$, на пересечении i -й строки и j -го столбца которой находится эле-

мент (i, j) , равный $a_{ki}a_{kj}$.

Таблица 1

К вычислению дисперсии по формуле (9)

Номер отсчета	0	1	...	j	...	N-1
0	0,0	0,1	...	0,j	...	0,N-1
1	1,0	1,1	...	1,j	...	1,N-1
...
i	i,0	i,1	...	i,j	...	i,N-1
...
N-1	N-1,0	N-1,1	...	N-1,j	...	N-1,N-1

Согласно табл. 1 дисперсию ψ_k можно представить в виде суммы дисперсий $\psi_{ij}^{(k)}$ всех элементов матрицы, т.е.

$$\psi_k = \sum_{i,j=0}^{N-1} \psi_{ij}^{(k)}, \quad (11)$$

$$\text{причём } \psi_{ij}^{(k)} = \langle a_{ki}a_{kj} \rangle. \quad (12)$$

Подставив значения величин (9) в (12), имеем

$$\psi_{ij}^{(k)} = \langle (c_{ki}a_i + s_{ki}b_i) \cdot (c_{kj}a_j + s_{kj}b_j) \rangle.$$

Раскрывая в последнем выражении скобки с учётом того, что $\langle a_i b_j \rangle = 0$ (в силу независимости квадратурных составляющих), получим

$$\psi_{ij}^{(k)} = c_{ki}c_{kj} \langle a_i a_j \rangle + s_{ki}s_{kj} \langle b_i b_j \rangle. \quad (13)$$

Принимая во внимание (1) и (7), после элементарных преобразований в (13) находим

$$\psi_{ij}^{(k)} = \psi \cdot R^{|i-j|} \cos\left(\frac{2\pi}{N}k(i-j)\right). \quad (14)$$

Обозначив через d модуль разности $(i-j)$, представим правую часть равенства (14) в виде

$$\psi_{ij}^{(k)} = \psi \cdot R^d \cos\left(\frac{2\pi}{N}kd\right). \quad (15)$$

А теперь обратимся к анализу табл. 1. На главной диагонали матрицы находятся элементы (их число равно N), для которых $d=0$. Непосредственно к главной примыкают диагонали с числом элементов, равным $2(N-1)$, причём для этих элементов $d=1$ и т.д. Проведенный анализ даёт возможность представить выражения (10) с учетом (14) в окончательном виде

$$\psi_k = \psi \cdot \left(N + 2 \sum_{d=1}^{N-1} (N-d) \cos\left(\frac{2\pi}{N}kd\right) \cdot R^d \right).$$

Как частные случаи из последнего соотношения следует, что при $R=0$

$$\psi_k = N\psi, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (16)$$

Если $R=1$, то

$$\psi_k = \begin{cases} N^2\psi, & k=0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \quad (17)$$

На рис. 1 показан график зависимости дисперсии откликов 16-точечного процессора ДПФ.

В самом деле, $R = 0$ означает, что на вход процессора ДПФ подведен сигнал типа белого шума с дисперсией, равной ψ . Подобный входной процесс обладает равномерной на всей оси частот спектральной плотностью. Так как все фильтры процессора ДПФ обладают одинаковыми амплитудными и фазовыми частотными характеристиками, то при подаче на вход такого гребенчатого фильтра белого шума на выходе всех каналов процессора будут формироваться нормально распределённые центрированные квадратурные составляющие с одинаковыми дисперсиями, вычисляемыми по формуле (16). Значение $R = 1$ эквивалентно тому, что на вход процессора ДПФ подаётся пачка из N постоянных по величине (но случайных от пачки к пачке) сигналов. При этом отклики всех частотных каналов (за исключением нулевого) будут равны нулю, а в нулевом канале образуются квадратурные составляющие, дисперсия которых определяется верхним выражением системы уравнений (17).

Базис функций Уолша

Применение базиса ДЭФ для обработки сигналов в реальном времени сталкивается с некоторыми проблемами, связанными с тем, что операции умножения в этом базисе выполняются над комплексными операндами (по крайней мере таковыми являются фазовые множители W), а это требует значительных затрат машинного времени (или аппаратных ресурсов). К числу базисов, которые полностью либо частично устраняют в дискретном преобразовании операции умножения комплексных переменных, относятся базисы функций Уолша.

Обратимся к определению дисперсий гармоник спектра в классическом базисе функций Уолша, упорядоченных по Адамару, матрица восьмого порядка которого (выбранного в качестве примера) задана соотношением

$$H_8 = \begin{matrix} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{vmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{vmatrix} \end{matrix} \quad (18)$$

Комплексный спектр сигнала в базисе функций Уолша-Адамара (УАФ) определяется выражением

$$\dot{X}(k) = \sum_{l=0}^{N-1} \dot{x}(l)h(k,l), \quad k, l = \overline{0, N-1},$$

в котором $h(k,l)$ – есть l -й отсчёт k -й базисной функций в системе УАФ.

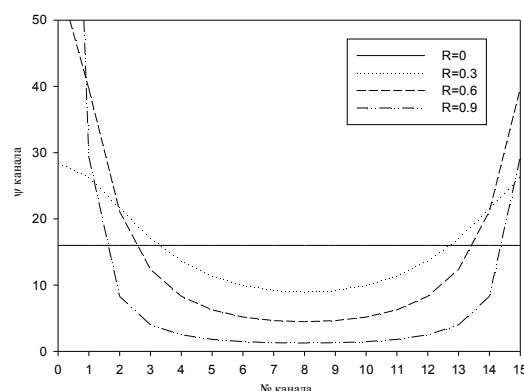


Рис. 1. Зависимость ψ_k от k для базиса ДЭФ

Дисперсии ψ_k легко можно найти с помощью методики, ранее использовавшейся для оценки дисперсии откликов процессора ДПФ в базисе ДЭФ. Для примера вычислим дисперсию седьмой гармоники восьмиточечного процессора в базисе УАФ, представленном матрицей (18). В табл. 2 приведены значения функции $h(7,l)$ и вещественные компоненты $a_{7,l}$ произведения $\dot{x}(l)h(7,l)$, $l = \overline{0,7}$.

Таблица 2

Вспомогательные данные								
l	0	1	2	3	4	5	6	7
$h(7,l)$	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
$a_{7,l}$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7

Теперь составим табл. 3 для определения ψ_7 , аналогичную табл. 1.

Таблица 3

К вычислению дисперсии седьмой гармоники								
	a_0	$-a_1$	$-a_2$	a_3	$-a_4$	a_5	a_6	$-a_7$
a_0	0,0	-(0,1)	-(0,2)	0,3	-(0,4)	0,5	0,6	-(0,7)
$-a_1$	-(0,1)	1,1	1,2	-(1,3)	1,4	-(1,5)	-(1,6)	1,7
$-a_2$	-(0,2)	1,2	2,2	-(2,3)	2,4	-(2,5)	-(2,6)	2,7
a_3	0,3	-(1,3)	-(2,3)	3,3	-(3,4)	3,5	3,6	-(3,7)
$-a_4$	-(0,4)	1,4	2,4	-(3,4)	4,4	-(4,5)	-(4,6)	4,7
a_5	0,5	-(1,5)	-(2,5)	3,5	-(4,5)	5,5	5,6	-(5,7)
a_6	0,6	-(1,6)	-(2,6)	3,6	-(4,6)	5,6	6,6	-(6,7)
$-a_7$	-(0,7)	1,7	2,7	-(3,7)	4,7	-(5,7)	-(6,7)	7,7

По данным табл. 3 легко приходим к выражению для ψ_7 , которое выглядит следующим образом

$$\psi_7 = \psi \left(8 + 2 \left(-3R - 2R^2 + 3R^3 - 4R^4 + R^5 + 2R^6 - R^7 \right) \right).$$

Общее выражение для ψ_k в базисе Уолша-Адамара можно представить в виде

$$\psi_k = \psi \cdot \left(N + 2 \sum_{z=1}^{N-1} \alpha_{kz} R^z \right), \quad (19)$$

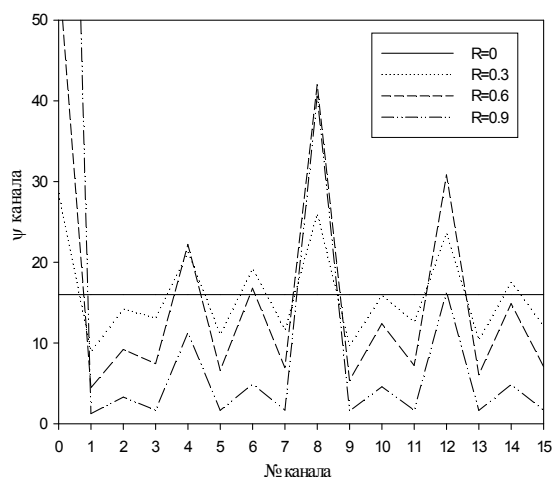
в котором весовые коэффициенты α_{kz} для $N=8$ приведены в табл. 4.

Таблица 4

Коэффициенты α_{kz} ряда (19)

k	z						
	1	2	3	4	5	6	7
0	7	6	5	4	3	2	1
1	-7	6	-5	4	-3	2	-1
2	1	-6	-1	4	1	-2	-1
3	-1	-6	1	4	-1	-2	1
4	5	2	-1	-4	-3	-2	-1
5	-5	2	1	-4	3	-2	1
6	3	-2	-3	-4	-1	2	1
7	-3	-2	3	-4	1	2	-1

Вычислив аналогичным образом весовые коэффициенты α_{kz} для $N=16$, приходим к распределению дисперсии откликов частотных каналов 16-точечного процессора ДПФ в базисе функций Уолша-Адамара, показанного на рис. 2.

Рис. 2. Зависимость ψ_k от k для 16-точечного базиса УАФ

Как следует из рис. 2, амплитудный спектр односвязной марковской модели гауссовского сигнала в базисе функций Уолша-Адамара, характер изменения по частотам которого подобен распределению дисперсии откликов процессора ДПФ в этом же базисе, обладает рядом особенностей. Во-первых, амплитуды гармоник сигнала в четных выходных каналах процессора всегда больше амплитуд гармоник в соседних нечетных каналах.

И, во-вторых, если в базисе ДЭФ амплитудный спектр (рис. 1) симметричен относительно канала $N/2$, то в базисе УАФ заметна небольшая асимметрия спектра.

Базис функций Виленкена-Крестенсона

Далее рассмотрим базисы ВКФ [2]. Преобразования в этих базисах требуют меньшего количества

комплексных умножений, чем преобразования в базисах ДЭФ. Матрица системы ВКФ-Адамара образуется как n -я кронекеровская степень матрицы ДЭФ m -го порядка. Система функций ВКФ-Адамара может быть аналитически представлена следующим образом [3]

$$\text{had}(k, l) = \prod_{z=0}^{n-1} W^{k_z l_z},$$

где k – номер базисной функции системы ВКФ-Адамара; l – дискретное время; $W = \exp\{-j2\pi/m\}$ – фазовый множитель, в котором m – основание системы счисления, n – показатель кронекеровской степени, k_z и l_z – разрядные коэффициенты в m -ичном представлении чисел k и l .

Комплексный спектр входного сигнала $\dot{x}(l)$ в базисе ВКФ-Адамара определяется соотношением

$$\dot{X}(k) = \sum_{l=0}^{N-1} \dot{x}(l) \text{had}(k, l), \quad k, l = \overline{0, N-1}, \quad (20)$$

где $N = m^n$ – порядок матрицы ВКФ-Адамара, совпадающий с числом отсчетов входного сигнала.

Если, воспользовавшись формулой Эйлера, представить $\text{had}(k, l)$ в виде

$$\text{had}(k, l) = c_{kl} - js_{kl},$$

где

$$c_{kl} = \cos\left(\frac{2\pi}{m} \sum_{z=0}^{n-1} k_z l_z\right), \quad s_{kl} = \sin\left(\frac{2\pi}{m} \sum_{z=0}^{n-1} k_z l_z\right), \quad (21)$$

то окажется, что соотношения (9) – (13) будут верны также и для системы ВКФ-Адамара.

А теперь обратимся к оценке $\psi_{ij}^{(k)}$, вычисляемой для преобразования (20). По определению

$$\psi_{ij}^{(k)} = \langle a_{ki} a_{kj} \rangle = c_{ki} c_{kj} \langle a_i a_j \rangle + s_{ki} s_{kj} \langle b_i b_j \rangle.$$

Принимая во внимание, что

$$\langle a_i a_j \rangle = \langle b_i b_j \rangle = \psi \cdot R^d,$$

имеем

$$\psi_{ij}^{(k)} = \psi \cdot R^d (c_{ki} c_{kj} + s_{ki} s_{kj}). \quad (22)$$

С учетом равенств (21) после элементарных преобразований выражение (22) приводится к форме

$$\psi_k = \sum_{i,j=0}^{N-1} \psi \cdot R^d \cos\left(\frac{2\pi}{m} \left(\sum_{z=0}^{n-1} k_z i_z - \sum_{z=0}^{n-1} k_z j_z \right)\right). \quad (23)$$

По аналогии с (19) представим ряд (23) в виде

$$\psi_k = \psi \cdot \left(N + 2 \sum_{z=1}^{N-1} \beta_{kz} R^z \right). \quad (24)$$

Весовые коэффициенты ряда (24), рассчитанные для параметров $m=3$, $n=2$, $k, z = \overline{1, 8}$ сведены в табл. 5.

Опираясь на изложенную выше методику, можно рассчитать дисперсии откликов процессора ДПФ в базисе ВКФ для произвольных парамет-

ров m и n . Для примера на рис. 3 показано распределение дисперсии шума выходных каналов 16-точечного процессора, параметры базиса которого таковы: $m = 4$ и $n = 2$.

Таблица 5

Коэффициенты β_{kz} ряда (22)

k	z							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0	8	7	6	5	4	3	2	1
1	-4	-3.5	6	-2.5	-2	3	-1	-0.5
2	-4	-3.5	6	-2.5	-2	3	-1	-0.5
3	5	1	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5
4	-4	2.5	-3	-1	1	-1.5	2	-0.5
5	-1	-3.5	-3	3.5	1	-1.5	-1	1
6	5	1	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5
7	-1	-3.5	-3	3.5	1	-1.5	-1	1
8	-4	2.5	-3	-1	1	-1.5	2	-0.5

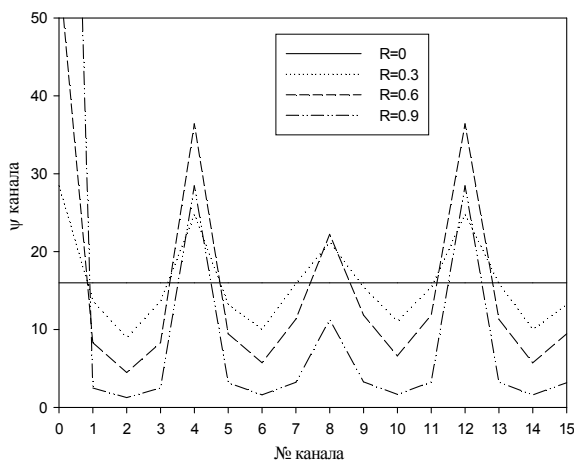


Рис. 3. Залежність ψ_k от k для базиса ВКФ-Адамара с параметрами $m = 4$ и $n = 2$

Из анализа данных, представленных на рис. 3, следует, что максимум (при любых R , исключая $R = 0$) дисперсии откликов процессора ДПФ в базисе ВКФ-Адамара на входное воздействие типа одно-связного марковского шума достигается в каналах,

номера которых кратны четырем (основанию системы счисления m , совпадающей с порядком матрицы ДЭФ, порождающей систему ВКФ-Адамара).

Минимум дисперсии откликов наблюдается в четных каналах, примыкающих к каналам с максимальной дисперсией.

Таким образом, характер изменения дисперсий откликов процессоров ДПФ в базисах систем Уолша и ВКФ, упорядоченных по Адамару, несколько отличаются друг от друга, что наглядно подтверждается графиками на рис. 2 и 3.

Выводы

В статье предложена методика составления аналитических выражений для определения дисперсий квадратур гармоник спектра односвязного марковского гауссовского процесса в дискретных базисах ДЭФ, функций Уолша и ВКФ. Дисперсии гармоник, полученные на основании статистического моделирования, близки к оценкам, вычисленных аналитически. Результаты исследований пригодны для применения в задачах обнаружения-измерения доплеровско-импульсных сигналов и, в частности, для определения порога решения, отвечающего заданной вероятности ложной тревоги.

Список литературы

1. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
2. Белецкий А.Я. Преобразования Грея. Т. 2. Прикладные аспекты / А.Я. Белецкий, А.А. Белецкий, Е.А. Белецкий. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2007. – 644 с.
3. Трахтман А.М. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах / А.М. Трахтман, В.А. Трахтман. – М.: Сов. радио, 1975. – 208 с.

Поступила в редколлегию 27.04.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.А. Кузнецов, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

ОЦІНКА ДИСПЕРСІЙ ГАРМОНІК СПЕКТРУ ОДНОЗВ'ЯЗНОГО МАРКОВСЬКОГО ГАУСІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ В ДИСКРЕТНИХ БАЗИСАХ ВІЛЕНКІНА-КРЕСТЕНСЕНА ФУНКЦІЙ

А.Я. Білецький, Д.С. Дем'яник

Отримані аналітичні співвідношення для оцінки дисперсій відгуків частотних каналів процесору ДПФ в базисах дискретно-експоненційних функцій, функцій Уолша й Віленкіна-Крестенсена функцій для випадку, коли на вхід процесора подаються відліки гаусівського однозв'язного марковського шуму. Результати досліджень можуть знайти застосування при вирішенні задач цифрової обробки доплерівсько-імпульсних радіолокаційних сигналів.

Ключові слова: дискретні базиси, процесор ДПФ, системи ДЕФ, Уолша, ВКФ.

ESTIMATION OF DISPERSIONS OF HARMONICS OF SPECTER OF SIMPLY CONNECTED MARKOV GAUSSIAN NOISE IN DISCRETE BASIS OF VILENKIN-CHRESTENSON FUNCTIONS

A.Ya. Beletsky, D.S. Demyanik

Expressions for estimation of the dispersions of responses of frequency channels of DFT-processor in basis of discrete-exponential functions, Walsh functions and Vilenkin-Chrestenson functions which receives simply connected Markov Gaussian noise was deduced. The research results can find application in solving problems of digital processing of pulse-Doppler radar signals.

Keywords: discrete basis, processor DFT, system of DEF, Walsh functions, Vilenkin- Chrestenson functions.