

УДК 531.306.96:452.411.815

Д.И. Леховицкий<sup>1</sup>, Д.С. Рачков<sup>1</sup>, А.В. Семеняка<sup>1</sup>, Д.В. Атаманский<sup>2</sup><sup>1</sup>Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков<sup>2</sup>Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ СПЕКТРОВ ОТРАЖЕНИЙ ОТ МЕТЕООБРАЗОВАНИЙ

*Рассматриваются параметрические методы спектрального анализа (СА) в задаче оценивания спектров метеообразований. Обосновывается единый подход к синтезу и сущность известных параметрических методов СА процессов авторегрессии произвольного целого порядка. Предлагаются их модификации и новые разновидности, перспективные для практического использования.*

**Ключевые слова:** спектральное оценивание, метеообразования, авторегрессионная модель, параметрические методы, обеляющие (обращающие) фильтры, спектральные функции.

### Введение

Извлечение метеорологической информации об атмосферных образованиях в доплеровских метеорадиолокаторах (ДМРЛ) базируется на оценках отражаемости, среднего значения и дисперсии радиальных скоростей движения образующих их элементов [1, 6, 16]. Эти параметры определяются моментами энергетических спектров междупериодных флуктуаций импульсов М-элементных пачек отражений, получаемых при импульсном зондировании заданных областей пространства [1, 6, 13, 16].

Для вычисления моментов спектра в ДМРЛ обычно используется автоковариационный (пульсарный) метод [1, 7]. Его повсеместное распространение обусловлено существовавшими на момент создания ДМРЛ ограничениями производительности вычислительных комплексов [1]. Возросшие возможности вычислительной техники позволяют оценить не только моменты, но и спектры в целом, несущие дополнительную информацию о метеообразованиях (МО), в частности, о форме их энергетического спектра – важном признаке распознавания опасных метеоявлений [1, 6].

К настоящему времени подробно изучены [1, 2, 4, 5, 10, 16 и др.] и реализованы в некоторых ДМРЛ [24] классические (непараметрические) методы спектрального оценивания (СО) на основе преобразования Фурье, разработанные еще в начале 20-го столетия. В то же время уже на протяжении нескольких последних десятилетий идет интенсивный поиск альтернативных методов СА, призванных устранить хорошо известные недостатки классических методов. Однако созданные в результате многочисленные "сверхразрешающие" методы СО [8 – 11, 15 – 17, 20 и др.] до сих пор не используются в ДМРЛ, хотя возможности современной и перспективной цифровой элементной

базы позволяют рассчитывать на их практическую реализацию. Одной из причин этого можно считать большое разнообразие предложенных методов, порождающее сложную задачу выбора целесообразного (целесообразных) для внедрения в ДМРЛ. Еще одна причина связана с существенными отличиями непрерывных спектров отражений от МО от дискретных спектров излучений конечного числа точечных источников, для разрешения которых в основном и разрабатывались т. н. "сверхразрешающие" методы СО. Эти отличия требуют других критериев оценки качества СО, в связи с чем могут оказаться неприменимыми известные результаты их сравнения по критериям, используемым при СО дискретных спектров.

Применительно к рассматриваемой задаче оценивания непрерывных спектров мощности требуется более полное уяснение сущности, сходства и различий большого числа известных "параметрических" методов СО и определение на этой основе наиболее перспективных для внедрения в существующие и разрабатываемые ДМРЛ. Решению круга связанных с этим задач посвящена данная статья, которая организована следующим образом. В первом разделе кратко обсуждаются обобщенная структура и свойства параметрических анализаторов спектра. Во втором разделе показывается, что большинство известных "сверхразрешающих" методов СО, их модификации и новые разновидности могут быть получены комбинированием выходных сигналов обеляющих и (или) обращающих фильтров процессов авторегрессии (АР – процессов) различного порядка, а отличия между ними заключаются в используемом способе комбинирования. На этой основе определяются параметрические методы СО, перспективные для дальнейших исследований и внедрения в существующие и разрабатываемые ДМРЛ.

### 1. Обобщенный параметрический анализатор спектра случайных процессов

А. . На рис. 1 показан обобщенный параметрический анализатор спектра (ОАС)  $M$  – элементного случайного вектора (пачки)  $\mathbf{u} = \{u_\ell\}_{\ell=1}^M$  комплексных амплитуд смеси шума и отражений от МО анализируемого элемента дальности с  $M \times M$  КМ  $\Phi = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*$  [8, 14, 16]. Здесь и далее черта сверху и звездочка - символы статистического усреднения и эрмитового сопряжения (комплексного сопряжения и транспонирования) соответственно.

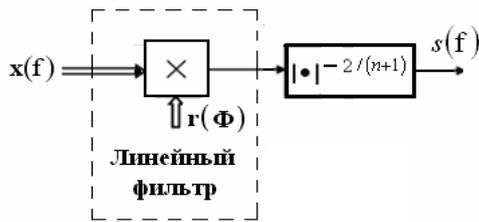


Рис. 1. Обобщенный анализатор спектра

В его основе лежит хорошо известная связь

$$s_{out}(f, \Phi) = s(f) \cdot k_p(f, \Phi) \quad (3)$$

между спектром  $s(f)$  на входе и спектром  $s_{out}(f, \Phi)$  на выходе линейного фильтра с импульсной характеристикой  $\mathbf{r}(\Phi)$  и квадратом модуля частотной характеристики (энергетической частотной характеристикой (ЭЧХ))

$$k_p(f, \Phi) = \left| \mathbf{x}^*(f) \cdot \mathbf{r}(\Phi) \right|^2, \quad (4)$$

где  $\mathbf{x}(f) = \{x_\ell(f)\}_{\ell=1}^M$  –  $M$ -мерный вектор отсчетов комплексной гармоники частотой  $f$  в моменты времени, определяемые временными интервалами между импульсами пачки [2, 4, 5, 7 и др.];  $f$  – нормированная (безразмерная) частота, лежащая в интервале  $f \in [-0.5, 0.5]$  и связанная с истинной частотой  $f$  равенством  $f = f \cdot T$ ;  $T$  – полагаемый далее постоянным временной интервал между зондированиями.

Если выходной спектр (3) равен

$$s_{out}(f) = 1/s^n(f), \quad n \geq 0, \quad (5)$$

то искомый входной спектр

$$s(f) = 1/k_p(f)^{1/(n+1)} \quad (6)$$

полностью определяется ЭЧХ фильтра (4), реализующего преобразование (5).

В частности, при  $n = 0$  и  $n = 1$

$$s(f) = 1/k_p(f) \quad \text{и} \quad s(f) = 1/k_p(f)^{1/2}. \quad (7)$$

Первая ситуация ( $n = 0$ ) соответствует **обеслабляющему** фильтру с ЭЧХ

$$k_p(f) = 1/s(f), \quad (8a)$$

преобразующему неравномерный в общем случае спектр  $s(f)$  входного процесса в равномерный спектр  $s_{out}(f) = 1$  белого шума. Вторая ситуация ( $n = 1$ ) – **обращающему** фильтру с ЭЧХ

$$k_p(f) = 1/s^2(f), \quad (8b)$$

преобразующему входной процесс со спектром  $s(f)$  в выходной со спектром  $s_{out}(f) = 1/s(f)$ , обратным входному. При  $n > 1$  фильтр в процедуре рис. 1 является **"переобращающим"**.

Б. Методы СО, укладываемые в процедуру рис. 1, обычно называются **параметрическими** [8 – 11, 15 – 17, 20 и др.]. Причина в том, что здесь априори постулируется структура формирующего фильтра ( $\Phi$ ) **входного** процесса, определяющая функциональную форму его спектра, зависящего от конечномерного вектора параметров этого  $\Phi$ . Основным этапом СО в этом случае является отыскание оценок этих параметров, концентрирующихся в элементах оценки  $\hat{\Phi}$  его КМ  $\Phi = \{\varphi_{ij}\}_{i,j=1}^M$ . На основе ее определяющих элементов (параметров) вычисляются оценки  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(\hat{\Phi})$  ИХ  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\Phi)$  и

$\hat{k}_p(f) = \left| \mathbf{x}^*(f) \cdot \mathbf{r}(\hat{\Phi}) \right|^2$  ЭЧХ  $k_p(f, \Phi)$  (4), реализующих преобразование (5), которые используются в процедуре рис. 1, б при формировании оценки  $\hat{s}(f) = s(f, \hat{\Phi}) = 1/\hat{k}_p(f, \hat{\Phi})^{1/(n+1)}$  спектра  $s(f)$  (6).

В. Очевидно, что при полном согласовании ЭЧХ фильтра (4) с параметрами входного процесса, т. е. при точном выполнении подобных (8) равенств анализатор рис. 1 точно воспроизведет по (6) искомый входной спектр. Однако практически неизбежное рассогласование ЭЧХ фильтра со входным процессом, обусловленное, в частности, неполнотой учтенной при синтезе априорной информации и ошибками оценивания параметров априори неизвестной КМ входного процесса, может не сохранить "предельных" (в отсутствие рассогласований) возможностей параметрических методов [14]. Здесь в соответствующей форме проявляется типичная закономерность – обработка, базирующаяся на той или иной априорной информации, при ее достоверности, как правило, эффективнее синтезированной без ее учета, но может уступать ей в условиях, в которых априорные предположения не выполняются.

Г. В качестве априорной информации, использованной при синтезе большинства параметрических методов СО, выступает предположение о том,

что анализируемый процесс может быть аппроксимирован процессом авторегрессии (АР–процессом) произвольного целого порядка  $p \geq 1$  [2, 5, 8]. Мы относим эту широко распространенную модель только к отражениям от МО, так что априорная информация о собственном шуме приемника выступает как не использованная при синтезе. Дополнительными источниками ошибок выступают рассогласование размера  $M$  фильтра (анализируемой пачки отражений) и порядка  $p$  аппроксимирующего АР–процесса, а также конечность объема обучающей выборки, доступной при оценке параметров (КМ) входного процесса. Влияние некоторых из этих ошибок рассматривается в следующем разделе. Ниже кратко описывается математическая модель входных воздействий, используемая при синтезе и пояснении сущности известных и новых методов СО, укладываемых в процедуру рис. 1.

Д. В соответствии с [1, 7, 16 и др.] будем полагать, что анализируемая  $M$ –элементная пачка (вектор)  $\mathbf{u}$  комплексных амплитуд смеси шума  $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^M \sim \text{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_M)$  приемника и отражений  $\mathbf{y} = \{y_i\}_{i=1}^M \sim \text{CN}(\mathbf{0}, \eta \cdot \boldsymbol{\rho})$  от МО является случайным нормальным комплексным вектором

$$\mathbf{u} = \{u_\ell\}_{\ell=1}^M = \xi + \mathbf{y} \sim \text{CN}(\mathbf{0}, \Phi), \quad (9)$$

с нулевым вектором средних значений.

Статистические свойства этого вектора исчерпывающе характеризуются  $M \times M$  КМ

$$\Phi = \{ \varphi_{ij} \}_{i,j=1}^M = \overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*} = \mathbf{I}_M + \eta \cdot \boldsymbol{\rho} \quad (10)$$

или спектром

$$s(f) = 1 + \eta \cdot s_{\text{norm}}(f) \quad (11)$$

междупериодных флуктуаций импульсов пачки.

Единичная  $M \times M$  матрица  $\mathbf{I}_M$  в (10) имеет смысл КМ пачки взаимно независимых собственных шумов приемника с нулевыми средними значениями и принятой за единицу дисперсией (мощностью) в  $M$  смежных интервалах зондирования анализируемого элемента дистанции,  $\eta$  – относительная (по отношению к мощности шума) мощность отражений от МО (ОСШ),

$$\boldsymbol{\rho} = \{ \rho_{pq} \}_{p,q=1}^M = \int_{-0.5}^{0.5} s_{\text{norm}}(f) \cdot \mathbf{x}(f) \cdot \mathbf{x}^*(f) df \quad (12a)$$

$M \times M$  матрица коэффициентов взаимной корреляции импульсов  $M$ -элементной пачки отражений,  $s_{\text{norm}}(f)$  – их спектр, нормированный условием

$$\int_{-1/2}^{1/2} s_{\text{norm}}(f) df = \rho_{qq} = 1, \quad q \in 1, M. \quad (12б)$$

В рассматриваемом случае равных временных интервалов между отсчетами стационарного вход-

ного процесса эта КМ эрмитова **теплицева**, так что

$$\rho_{pq} = \rho_{p-q}, \quad \rho_0 = 1, \quad \rho_k = \rho_{-k}^*, \quad k \in 0, M-1. \quad (12в)$$

Е. В рассматриваемой АР – модели отражений от МО отсчеты  $y_k$  импульсов пачки удовлетворяют разностному уравнению [2]

$$y_k = \xi_k + \sum_{i=1}^p \varphi_i \cdot y_{k-i}, \quad k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

с вектором параметров  $\boldsymbol{\varphi} = \{ \varphi_i \}_{i=1}^p$  [2, 4, 5, 8]. Здесь  $p \geq 1$  – порядок аппроксимирующего АР – процесса,

$$\xi_k \sim \text{CN}(0, C), \quad \overline{\xi_k \cdot \xi_\ell^*} = C \cdot \delta_{k\ell}, \quad \delta_{k\ell} = \begin{cases} 1, & k = \ell \\ 0, & k \neq \ell \end{cases} \quad (14)$$

независимые отсчеты гауссова стационарного дискретного белого шума с нулевыми средними и дисперсией  $C$ , обеспечивающей нормировку (12б).

Соответствующая (14) схема формирующего фильтра АР – процесса порядка  $p$  (далее для краткости – процесса АР –  $p$ ) показана на рис. 2.

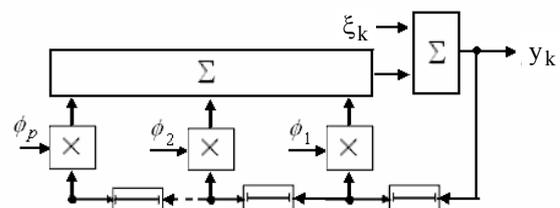


Рис. 2. Формирующий фильтр процесса АР –  $p$

Процессы с непрерывными  $p \leq p$ -модовыми спектрами с произвольной шириной, скоростью спада и расположением мод на нормированной частотной оси  $f \in -0.5, 0.5$  формируются этим фильтром при соответствующем выборе в общем случае комплексного вектора параметров  $\boldsymbol{\varphi} = \{ \varphi_i \}_{i=1}^p$  [5, 8, 13]. Эти параметры имеют ясный физический смысл и полностью определяют спектр и КМ формируемого процесса, что существенно используется в рассматриваемых далее параметрических методах СО.

Различие между ними порождается различием в общем случае неравноценных способов их использования, что ниже обосновывается более подробно.

## 2. АР–параметрические методы СО

А. Как следует из определения (13), для совокупности  $p+1$  смежных отсчетов процесса АР –  $p$  справедливо равенство

$$y_k - \sum_{i=1}^p \varphi_i \cdot y_{k-i} = \boldsymbol{\alpha}^* \cdot \mathbf{y}_k = \xi_k, \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\alpha}^* = \{ \alpha_i \}_{i=1}^{p+1}, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_{i+1} = -\varphi_i, \quad \mathbf{y}_k = \{ y_{k-i} \}_{i=0}^p.$$

Оно может быть реализовано, в частности, трансверсальным фильтром, показанным на рис. 3. Входными в нем выступают отсчеты процесса AP - p с параметрами  $\varphi_i$  ( $i \in 1, p$ ), выходными – отсчеты  $\xi_k$  (14) стационарного белого шума.

Поэтому фильтр рис. 3 с ИХ  $\alpha^*$  (15) размера  $p+1$  является **обеляющим** для процесса AP - p с параметрами  $\varphi_i$  ( $i \in 1, p$ ). В силу (4), (8a) его ЭЧХ

$$k_p(f) = \left| \alpha^* \cdot x_{p+1}(f) \right|^2 = C / s_{\text{norm}}(f) \quad (16)$$

определяет спектр  $s_{\text{norm}}(f)$  входного процесса.

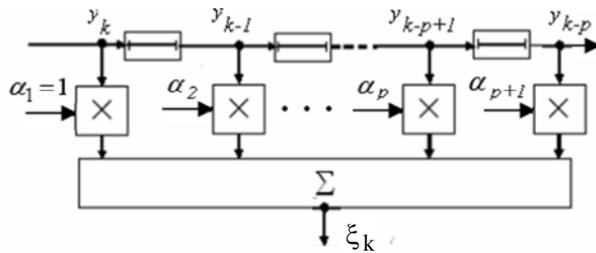


Рис. 3. Обеляющий фильтр процесса AP – p

Здесь и далее через  $x_L(f)$  обозначается вектор из  $L \leq M$  смежных компонент вектора  $x(f)$  (10).

**Б.** Смысл ИХ  $\alpha^*$  вытекает из уравнения

$$\alpha^* \cdot y_k \cdot y_k^* = \xi_k \cdot y_k^* \quad (17a)$$

полученного умножением справа обеих частей (15) на  $(p+1)$  – мерную строку  $y_k^*$  и их последующего статистического усреднения. В силу стационарности входного процесса его  $(p+1) \times (p+1)$  нормированная КМ  $\rho^{(p+1)} = \{ \rho_{ij} \}_{i,j=1}^{p+1} = \overline{y_k \cdot y_k^*}$  не зависит от  $k$ , а вектор - строка в правой части (17a)

$$\overline{\xi_k \cdot y_k^*} = C \cdot e_1^{(p+1)*} \quad (17б)$$

где  $e_\ell^{(m)}$  –  $\ell$ -й столбец единичной матрицы  $I_m$ .

Последнее равенство вытекает из того, что все компоненты вектора  $y_k^*$ , кроме первой, образованы "предшествующими" отсчетами шума  $\xi_\ell$ ,  $\ell < k$ , некоррелированными с его  $k$ -м отсчетом  $\xi_k$  с дисперсией  $C$ , входящим в состав его первой компоненты. Поэтому решением уравнения (17a) является вектор

$$\alpha^* = C \cdot e_1^{(p+1)*} \cdot \Omega^{(p+1)} = C \cdot \Omega_1^{(p+1)*} \quad (17в)$$

пропорциональный первой строке матрицы

$$\Omega^{(p+1)} = \{ \omega_{ij}^{(p+1)} \}_{i,j=1}^{p+1} = \left( \rho^{(p+1)} \right)^{-1} \quad (17г)$$

обратной КМ. Поскольку его первая компонента  $\alpha_1 = 1$  (15), то коэффициент пропорциональности

$$C = 1 / \omega_{11}^{(p+1)}$$

**В.** Фильтр рис. 3 с ИХ (17в), пропорциональной первой строке  $\Omega_1^{(p+1)*}$  матрицы (17г), определяет спектр (5) с параметром  $n = 0$ . При  $M > p$  его определяет также первая строка  $M \times M$  матрицы (17г)

$$\Omega = \{ \omega_{ij} \}_{i,j=1}^M = (\rho)^{-1} \quad (18a)$$

Другие строки этой матрицы или ее степеней определяют спектры (5) с параметром  $n > 0$ . Их выбор в качестве ИХ порождает соответствующие разновидности ОАС рис. 1, б и AP-параметрические методы СО на его основе.

**Г.** Их можно обосновать, используя эрмитовость и положительную определенность (э.п.о.) матрицы (18), в силу которых она допускает представление **Холецкого**

$$n \cdot n^* = \Omega = h^* \cdot h \quad (18б)$$

в виде произведения треугольных сомножителей

$$n = \{ n_{ij} \}_{i,j=1}^M, \quad h = \{ h_{ij} \}_{i,j=1}^M, \quad n_{ij} = h_{ij} = 0, \quad j > i, \quad (18в)$$

$$n_{ii} > 0, \quad h_{ii} > 0.$$

Если, кроме того,  $M \times M$  **э.п.о. теплицева** (12в) матрица  $\rho = \{ \rho_{ij} \}_{i,j=1}^M$  (18) является КМ процесса AP –  $p < M$ , представление (18) преобразуется к виду [2]

$$n_b \cdot n_b^* = \Omega_b = h_b^* \cdot h_b \quad (19)$$

где  $h_b$  и  $n_b$  – нижние треугольные ленточные (*band*)  $M \times M$  матрицы с шириной ленты  $zz = p+1$  с действительными положительными диагональными элементами,  $\Omega_b$  – **э.п.о.** ленточная  $M \times M$  матрица с шириной ленты  $z = 2 \cdot p + 1$ . Равенство (19) наглядно иллюстрируется рис. 4.

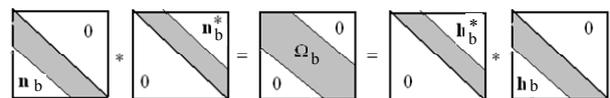


Рис. 4 Разложения Холецкого э.п.о. матрицы  $\Omega_b$  (19)

В качестве примера на рис. 5 показана нижняя треугольная  $8 \times 8$  матрица  $h_b$  процесса AP–2 с коэффициентом корреляции смежных отсчетов  $\rho_1 = 0.99$ .

$$h_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7.017 & 7.088 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8.105 & -18.683 & 10.767 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0 & 8.105 & -18.683 & 10.767 & 0 & -0 & 0 & 0 \\ 0 & -0 & 8.105 & -18.683 & 10.767 & 0 & -0 & 0 \\ -0 & 0 & -0 & 8.105 & -18.683 & 10.767 & 0 & 0 \\ 0 & -0 & 0 & -0 & 8.105 & -18.683 & 10.767 & 0 \\ 0 & -0 & -0 & 0 & -0 & 8.105 & -18.683 & 10.767 \end{pmatrix}$$

Рис. 5 Сомножитель  $h_b$  матрицы  $\Omega_b$  ( $M=8, p=2$ )

Связь матриц  $\mathbf{\Omega}_b$  (19) и  $\mathbf{\rho}$  (18a) подробно раскрыта в [25], где показано, в частности, что для э.п.о. теплицевой матрицы  $\mathbf{\rho}$  матрица  $\mathbf{\Omega}_b$  э.п.о. и персимметрична, т.е. удовлетворяет равенству

$$\mathbf{\Omega}_b = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{\Omega}_b^T \cdot \mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{\Omega}_b^{\sim} \cdot \mathbf{\Pi}, \quad \mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^T = \mathbf{\Pi}^{-1}, \quad (20)$$

показывающему, что  $\mathbf{\Omega}_b$  совпадает с результатом ее "поворота" относительно побочной диагонали.

Здесь  $\mathbf{\Pi}$  – симметричная ортогональная матрица перестановок с единицами на побочной диагонали и нулями в остальных позициях, верхние индексы ( $\sim$ ) и (Т) – символы комплексного сопряжения и транспонирования соответственно.

Следствием (20) являются равенства

$$\mathbf{h}_b = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}_b^T \cdot \mathbf{\Pi}, \quad \mathbf{n}_b = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{h}_b^T \cdot \mathbf{\Pi}, \quad (21)$$

означающие, что матрица  $\mathbf{h}_b$  ( $\mathbf{n}_b$ ) совпадает с результатом "поворота" матрицы  $\mathbf{n}_b$  ( $\mathbf{h}_b$ ) относительно побочной диагонали. В связи с этим матрица  $\mathbf{h}_b$  однозначно определяет все матрицы в (19).

"Генезис" известных [5, 8, 10, 11, 19, 20] и некоторых новых [17] параметрических методов СО объясняется свойствами этих матриц, которые можно сформулировать следующим образом.

1. Нижняя треугольная угловая  $(p+1) \times (p+1)$  подматрица (в штриховой рамке на рис. 5) матрицы  $\mathbf{h}_b$  является нижним треугольным сомножителем  $\mathbf{h}^{(p+1)}$  матрицы (17г)

$$\mathbf{\Omega}^{(p+1)} = \mathbf{h}^{(p+1)*} \cdot \mathbf{h}^{(p+1)} = \left( \mathbf{\rho}^{(p+1)} \right)^{-1}. \quad (22)$$

2. Все строки, расположенные в пределах ленты шириной  $(p+1)$ , одинаковы и совпадают с последней строкой угловой подматрицы  $\mathbf{h}^{(p+1)}$ .

3. Эта последняя строка совпадает с ИХ обеляющего фильтра АР – процесса порядка  $p < M$ . В этом можно убедиться, используя персимметрию КМ  $\mathbf{\rho}^{(p+1)} = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{\rho}^{(p+1)\sim} \cdot \mathbf{\Pi}$ , позволяющую переписать уравнение (17а) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{\beta}^* \cdot \mathbf{\rho}^{(p+1)} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_{p+1}^{(p+1)*}, \\ \mathbf{\beta}^* &= \{ \beta_\ell \}_{\ell=1}^{p+1} = \mathbf{\alpha}^T \cdot \mathbf{\Pi} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_{p+1}^{(p+1)*} \mathbf{\Omega}^{(p+1)}. \end{aligned} \quad (23)$$

ЭЧХ фильтра с ИХ  $\mathbf{\beta}^*$  (23) равна

$$\begin{aligned} k_p(f) &= \left| \mathbf{\beta}^* \cdot \mathbf{x}_{p+1}(f) \right|^2 = \left| \mathbf{\alpha}^* \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{x}_{p+1}(f) \right|^2 = \\ &= \left| \mathbf{\alpha}^* \cdot e^{-j2\pi(p+2)} \mathbf{x}_{p+1}(f) \right|^2 = \left| \mathbf{\alpha}^* \cdot \mathbf{x}_{p+1}(f) \right|^2, \end{aligned} \quad (24)$$

т.е. совпадает с (16), поэтому показанный на рис. 6 фильтр с ИХ  $\mathbf{\beta}^*$  также является обеляющим.

В силу (22) его ИХ равенством

$$\begin{aligned} \mathbf{\beta}^* &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_{p+1}^{(p+1)*} \cdot \mathbf{h}^{(p+1)*} \cdot \mathbf{h}^{(p+1)} = \\ &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{h}_{p+1}^{(p+1)} \cdot \mathbf{h}_{p+1}^{(p+1)*}, \end{aligned} \quad (25)$$

связана с  $(p+1)$  – мерной последней строкой

$\mathbf{h}_{p+1}^{(p+1)*} = \{ h_\ell^{(p+1)*} \}_{\ell=1}^{p+1}$  нижней треугольной матрицы  $\mathbf{h}^{(p+1)}$ . Ее последний элемент вследствие персимметрии матрицы  $\mathbf{\Omega}^{(p+1)}$  (22) и (17г) равен

$$h_{p+1}^{(p+1)*} = \sqrt{\omega_{p+1,p+1}^{(p+1)}} = \sqrt{\omega_{1,1}^{(p+1)}} = 1/\sqrt{C}. \quad (26)$$

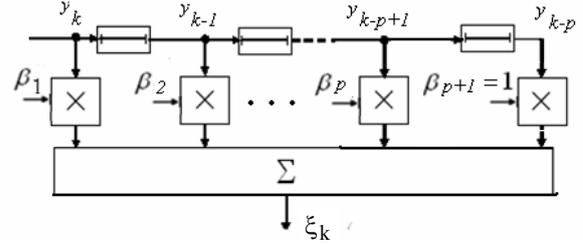


Рис. 6. Обеляющий фильтр процесса АР – р

Поэтому последняя строка матрицы  $\mathbf{h}^{(p+1)}$

$$\mathbf{h}_{p+1}^{(p+1)*} = 1/\sqrt{C} \cdot \mathbf{\beta}^* = \sqrt{C} \cdot \mathbf{e}_{p+1}^{(p+1)*} \mathbf{\Omega}^{(p+1)}, \quad (27)$$

а фильтр с такой ИХ в силу (24), (16) имеет ЭЧХ

$$k_p(f) = \left| \mathbf{h}_{p+1}^{(p+1)*} \cdot \mathbf{x}_{p+1}(f) \right|^2 = 1/s_{\text{norm}}(f), \quad (28a)$$

что и доказывает свойство 3 матрицы  $\mathbf{h}_b$  (19).

В силу этого свойства и свойства 2

$$\left| p_\ell(f) \right|^2 = 1/s_{\text{norm}}(f), \quad \ell \in p+1, M, \quad (28б)$$

где  $p_i(f)$  –  $i$  – я ( $i \in 1, M$ ) компонента вектора

$$\mathbf{p}(f) = \{ p_i(f) \}_{i=1}^M = \mathbf{h} \cdot \mathbf{x}(f). \quad (28в)$$

Тем самым фильтр с  $M \times M$  матричной импульсной характеристикой (МИХ)  $\mathbf{h} = \mathbf{h}_b$  (18б) содержит  $M-p$  обеляющих фильтров размера  $p+1$  (рис. 4) процесса АР –  $p < M$  с ИХ, равными ее строкам  $\mathbf{h}_\ell^*$  с номерами  $\ell \in p+1, M$  (или, что эквивалентно, единственный такой  $(p+1)$  – мерный фильтр, обрабатывающий всю  $M$  – элементную пачку в режиме "скользящего окна").

Аналогично в силу (21)

$$\left| q_\ell(f) \right|^2 = 1/s_{\text{norm}}(f), \quad \ell \in 1, M-p, \quad (28г)$$

где  $q_i(f)$ ,  $i \in 1, M-p$  –  $i$  – я компонента вектора

$$\mathbf{q}(f) = \{ q_i(f) \}_{i=1}^M = \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{x}(f). \quad (28д)$$

Д. Свойства 1-3 матрицы  $\mathbf{h}_b$  определяют и важные свойства ленточной матрицы  $\mathbf{\Omega}_b$  (19), рис. 4, показанной на рис. 7 для тех же условий, что

и на рис. 4 ( $p = 2, M = 8 > 2 \cdot p + 1, \rho_1 = 0.99$ ).

Они сводятся к следующему.

1. Первая ( $\Omega_{1b}^*$ ) и последняя ( $\Omega_{Mb}^*$ ) строки матрицы  $\Omega_b$  пропорциональны ИХ обеляющих фильтров с ЭЧХ

$$k_p(f) = \left| \Omega_{1b}^* \cdot \mathbf{x}(f) \right|^2 = \left| \Omega_{Mb}^* \cdot \mathbf{x}(f) \right|^2 = \frac{c}{s_{\text{norm}}(f)},$$

$$c = \omega_{MM}^{(b)} = \omega_{11}^{(b)} = 1/C. \tag{28}$$

$$\Omega_b = \begin{pmatrix} 115.93 & -201.16 & 87.26 & -0 & 0 & 0 & -0 & 0 \\ -201.16 & 464.99 & -352.59 & 87.26 & -0 & 0 & 0 & -0 \\ 87.26 & -352.59 & 530.68 & -352.59 & 87.26 & -0 & 0 & 0 \\ -0 & 87.26 & -352.59 & 530.68 & -352.59 & 87.26 & -0 & 0 \\ 0 & -0 & 87.26 & -352.59 & 530.68 & -352.59 & 87.26 & -0 \\ -0 & 0 & -0 & 87.26 & -352.59 & 530.68 & -352.59 & 87.26 \\ -0 & 0 & 0 & -0 & 87.26 & -352.59 & 464.99 & -201.16 \\ 0 & -0 & 0 & 0 & -0 & 87.26 & -201.16 & 115.93 \end{pmatrix}$$

Рис. 7 Структура матрицы  $\Omega_b$  ( $M = 8, p = 2$ )

Равенство ЭЧХ соответствующих фильтров вытекает из персимметрии (20) матрицы  $\Omega_b$ , в силу которой  $\Omega_{Mb}^* = \Omega_{1b}^T \cdot \Pi$ . Как следует из (23) – (25), фильтры с такими ИХ имеют одинаковые ЭЧХ. Поэтому для доказательства (28) пригодна любая из них, например, последняя. В силу (25) для нее справедливо равенство

$$\Omega_{Mb}^* = 1/C \cdot \beta^* \cdot \mathbf{E}_{p+1}^{(M)*} (M-p), \tag{29}$$

где

$$\mathbf{E}_m^{(K)*}(\ell) = \sum_{i=1}^m \mathbf{e}_i^{(m)} \cdot \mathbf{e}_{\ell+i-1}^{(K)*} \tag{30,a}$$

$m \times K$  матрица, составленная из  $m \leq K$  смежных строк  $\mathbf{e}_{\ell+i-1}^{(K)*}$ ,  $i \in 1, m$  единичной  $K \times K$  матрицы, начиная с  $\ell$ -й.

На рис. 8 показан пример такой матрицы при  $K = 8, m = 3, \ell = 2$ .

$$\mathbf{E}_3^*(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{30,б}$$

Рис. 8. Матрица  $\mathbf{E}_m^{(K)*}(\ell)$ ,  $K = 8, m = 3, \ell = 2$ .

Из (29) в сочетании с (24), (16) непосредственно следует и (28).

2. Строки  $\omega_{p+\ell}^* = \{ \omega_{p+\ell,i} \}_{i=\ell}^{2 \cdot p + \ell}$ ,  $\ell \in 1, M - 2 \cdot p$  матрицы  $\Omega_b$  с  $(p+1)$ -й по  $(M-p)$ -ю включительно, расположенные в пределах ленты шириной  $(2p+1)$ , одинаковы, так что

$$\omega_{p+\ell}^* = \omega_{p+1}^* = \{ \omega_{p+1,i} \}_{i=1}^{2 \cdot p + 1}, \quad \ell \in 1, M - 2 \cdot p \tag{31,a}$$

Действительно, для  $i$ -го элемента  $\omega_{p+\ell,i}$  строки  $\omega_{p+\ell}^*$  справедливо равенство

$$\omega_{p+\ell,i}^{(b)} = \mathbf{h}_{p+\ell}^{(b)*} \cdot \mathbf{h}_i^{(b)}, \quad i \in \ell, 2 \cdot p + \ell,$$

где

$$\mathbf{h}_{p+\ell}^{(b)*} = \mathbf{b} \sim \cdot \Pi \cdot \mathbf{E}_{p+1}^{(M)*}(p+\ell) \quad \text{и} \quad \mathbf{h}_i^{(b)} = \mathbf{E}_{p+1}^{(M)}(i) \cdot \mathbf{g}_i -$$

$(p+\ell)$ -я строка матрицы  $\mathbf{h}_b^*$  и  $i$ -й,  $i \in \ell, 2 \cdot p + \ell$  столбец матрицы  $\mathbf{h}_b$  (19) соответственно,  $\mathbf{g}_i = \{ \mathbf{g}_\ell^{(i)} \}_{\ell=1}^{p+1}$  –  $(p+1)$ -мерный столбец его ненулевых элементов,

$$\mathbf{b} = \{ b_i \}_{i=1}^{p+1} = \mathbf{h}_{p+1}^{(p+1)*} \tag{31б}$$

последняя строка нижней треугольной матрицы  $\mathbf{h}^{(p+1)}$  (22).

Поэтому

$$\omega_{p+\ell,i}^{(b)} = \mathbf{b} \sim \cdot \Pi \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{g}_i,$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_{p+1}^{(M)*}(p+\ell) \cdot \mathbf{E}_{p+1}^{(M)}(i).$$

В соответствии с (30)  $(p+1) \times (p+1)$  матрица

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \sum_{v=1}^{\Delta+1} \mathbf{e}_v^{(p+1)} \cdot \mathbf{e}_{p+v-\Delta}^{(p+1)*}, & \Delta = i - \ell \leq p; \\ \sum_{v=\Delta-p+1}^{p+1} \mathbf{e}_v^{(p+1)} \cdot \mathbf{e}_{p+v-\Delta}^{(p+1)*}, & \Delta = i - \ell \geq p, \end{cases}$$

откуда

$$\omega_{p+\ell,i}^{(b)} = \begin{cases} \sum_{v=1}^{\Delta+1} b_{p+2-v} \sim \cdot \mathbf{g}_{p+v-\Delta}^{(i)}, & \Delta = i - \ell \leq p; \\ \sum_{v=\Delta-p+1}^{p+1} b_{p+2-v} \sim \cdot \mathbf{g}_{p+v-\Delta}^{(i)}, & \Delta = i - \ell \geq p. \end{cases}$$

При  $i \in p+1, M-p$  вектор  $\mathbf{g}_i = \Pi \cdot \mathbf{b}^T$  и не зависит от  $i$ , так что

$$\omega_{p+\ell,i}^{(b)} = \begin{cases} \sum_{v=1}^{\Delta+1} b_{p+2-v} \sim \cdot b_{\Delta+2-v}, & \Delta = i - \ell \leq p; \\ \sum_{v=\Delta-p+1}^{p+1} b_{p+2-v} \sim \cdot b_{\Delta+2-v}, & \Delta = i - \ell \geq p. \end{cases}$$

Эта же формула пригодна и при любых  $i \in \ell, 2 \cdot p + \ell$ , поскольку отличные от используемых в ней элементы векторов  $\mathbf{g}_i$  при  $i \in \ell, p$  в ней не участвуют.

Это доказывает равенство строк (31), элементы которых удобно записать в виде свертки:

$$\omega_{p+\ell, i}^{(b)} = \begin{cases} \sum_{v=1}^{\Delta+1} b_{p+2-v} \cdot b_{\Delta+2-v}, & \Delta = i - \ell \leq p; \\ \sum_{v=1}^{2p+1-\Delta} b_{\Delta+v-p} \cdot b_v, & \Delta = i - \ell \geq p, \end{cases} \quad (32)$$

$\ell \in 1, M - 2 \cdot p, i \in \ell, 2 \cdot p + \ell$

векторов  $\mathbf{b} = \{b_i\}_{i=1}^{p+1}$  и  $\tilde{\mathbf{b}} = \{b_i\}_{i=1}^{p+1}$  – ИХ обесцеляющих фильтров (свойство 3 п. Г.).

Поскольку свертке ИХ соответствует перемножение ЭЧХ, справедливо свойство

3. Строки  $\omega_{p+\ell}^*$  (31a) матрицы  $\mathbf{\Omega}_b$  (19) совпадают с ИХ **обращающего** фильтра с ЭЧХ

$$k_p(f) = \left| \omega_{p+\ell}^* \cdot x_{2 \cdot p+1}(f) \right|^2 = 1/s_{\text{norm}}^2(f). \quad (33, a)$$

В силу этого свойства и свойства 2

$$\left| r_\ell(f) \right|^2 = 1/s_{\text{norm}}^2(f), \quad \ell \in p+1, M-p, \quad (33, b)$$

где  $r_i(f)$ ,  $i \in 1, M-i$  – я компонента вектора

$$\mathbf{r}(f) = \{r_i(f)\}_{i=1}^M = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{x}(f). \quad (33, b)$$

Этот результат вполне естественен, поскольку переход от МИХ  $\mathbf{h}_b$  к МИХ  $\mathbf{\Omega}_b = \mathbf{h}_b^* \cdot \mathbf{h}_b$  эквивалентен последовательному включению фильтров вида рис. 5 с ИХ  $\mathbf{b}$  и  $\tilde{\mathbf{b}}$  и, тем самым, к перемножению их равных ЭЧХ (28).

Этот же эффект порождает последовательное включение двух фильтров вида рис.3 с  $(p+1)$  – мерными ИХ  $\mathbf{a}$  (15) и

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{n}_1^{(p+1)*} \quad (34)$$

ненулевыми элементами первой строки верхней треугольной матрицы  $\mathbf{n}_b^*$  (рис. 4).

Эффект обращения спектра обеспечивает и последовательное соединение обесцеляющих фильтров вида рис. 3 и рис. 6, к которому формально приводит использование в (19) связей (21). Тем самым фильтр с  $M \times M$  матричной импульсной характеристикой (МИХ)  $\mathbf{\Omega}_b$  (19) содержит в своем составе 2 обесцеляющих фильтра процессов  $AP - p < M$  с  $(p+1)$  – мерными ИХ  $\mathbf{\Omega}_{1b}^*$  и  $\mathbf{\Omega}_{Mb}^*$  и  $M - 2 \cdot p$  обрацющих фильтров процессов  $AP - p \leq (M-1)/2$  с  $(2p+1)$  – мерными ИХ (31a), (32). Остальные строки матрицы  $\mathbf{\Omega}_b$  при  $M \geq 2 \cdot p + 1$  имеют смысл ИХ "переобесцеляющих" ("недообрацющих") фильтров с ЭЧХ

$$k_p(f) = \left| r_\ell(f) \right|^2 \approx 1/s_{\text{norm}}^\gamma(f), \quad 1 < \gamma < 2, \quad (35)$$

$\ell \in 2, p; \ell \in M - p + 1, M - p.$

Такие ЭЧХ имеют два последовательно соединенных фильтра вида рис. 3 или (и) рис. 6, размер  $zz$  одного из которых меньше  $p+1$ . Очевидно, что наращивая далее число обесцеляющих или обрацющих фильтров, можно получить ЭЧХ вида (8), обратно пропорциональные произвольной степени спектра входного процесса.

Е. Для удобства последующих ссылок основные результаты п.п. А.-Д. сведены в табл. 1.

В колонке 1 приведены условия, при которых строки матриц  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{n}^*$  и  $\mathbf{\Omega}$  (18) с номерами, указанными нижним индексом в колонке 2, представляют собой ИХ фильтров с ЭЧХ, указанными в соответствующей строке третьей колонки.

Таблица 1

Сводка основных результатов разд. 2

Условие	ИХ фильтра	ЭЧХ $k_p(f)$ (название фильтра)
1	2	3
$M \leq p$	$\mathbf{h}_1 \cdots \mathbf{h}_p,$ $\mathbf{n}_{M-p+1}^* \cdots \mathbf{n}_M^*,$	$1/s_{\text{norm}}^\gamma(f), \quad 0 < \gamma < 1$ ("недообесцеляющий")
$M > p$	$\mathbf{h}_{p+1} \cdots \mathbf{h}_M,$ $\mathbf{n}_1^* \cdots \mathbf{n}_{M-p}^*,$	$1/s_{\text{norm}}(f)$ (обесцеляющий)
$M > p + 1$	$\mathbf{\Omega}_2 \cdots \mathbf{\Omega}_p,$ $\mathbf{\Omega}_{M-p+1} \cdots \mathbf{\Omega}_{M-1}$	$1/s_{\text{norm}}^\gamma(f), \quad 1 < \gamma < 2$ ("переобесцеляющий", "недообрацующий")
$M > 2p$	$\mathbf{\Omega}_{p+1} \cdots \mathbf{\Omega}_{M-p}$	$1/s_{\text{norm}}^2(f)$ (обрацующий)

Ж. Очевидно, что в условиях, приведенных в первой колонке Табл.1, такие же свойства будут иметь и указанные во второй колонке строки матриц  $\mathbf{h}_\eta$ ,  $\mathbf{n}_\eta^*$ ,  $\mathbf{\Omega}_\eta$  разложений Холецкого

$$\mathbf{n}_\eta \cdot \mathbf{n}_\eta^* = \mathbf{\Omega}_\eta = \mathbf{h}_\eta^* \cdot \mathbf{h}_\eta \quad (36)$$

матрицы  $\mathbf{\Omega}_\eta = (\eta \cdot \rho)^{-1}$ , обратной КМ  $\eta \cdot \rho$  отражений от МО. Так, сохранится ленточная структура матриц  $\mathbf{h}_\eta = (1/\sqrt{\eta}) \cdot \mathbf{h}_b$ ,  $\mathbf{\Omega}_\eta = (1/\eta) \cdot \mathbf{\Omega}_b$  (рис. 7) и, тем самым, структура (рис. 4) разложений (36). В связи с этим изменения ЭЧХ  $k_p(f)$  в колонке 3 сведутся только к замене  $s_{\text{norm}}(f)$  на  $\eta \cdot s_{\text{norm}}(f)$ , что не изменит свойств соответствующих фильтров, отраженных в их названиях.

3. При рассогласовании фильтра с входным процессом (например, при нарушении условий колонки 1) эти свойства изменяются. Характер изменений иллюстрируется рис. 9, где штриховыми кривыми показаны спектры процессов AP - p интенсивностью  $\eta$  с коэффициентом корреляции  $\rho_1 = 0.99$  на входе, а сплошными - спектры  $s_{out}(f)$  (3) на выходе фильтров размера  $M = 8$  с ИХ - строками матриц (36), указанными во второй колонке табл. 1.

Параметром семейств служит номер  $\ell$  этой строки, значение  $\ell = 1$  ( $\ell = M = 8$ ) соответствует первой (последней) строке матрицы  $\mathbf{n}_{\eta}^* (\mathbf{h}_{\eta})$ , а остальные - строкам матрицы  $\mathbf{\Omega}_{\eta}$ .

В условиях рис. 9, а, б ( $M = 8 > 2p$ ) рассогласования нет.

При этом фильтры с ИХ  $\mathbf{n}_{\eta 1}^* = \mathbf{e}_1^{(M)*} \cdot \mathbf{n}_{\eta}^*$  и  $\mathbf{h}_{\eta M}^* = \mathbf{e}_M^{(M)*} \cdot \mathbf{h}_{\eta}$  преобразуют неравномерный входной спектр  $s(f)$  в равномерный спектр белого шума единичной (0 дБ) мощности, т. е. являются обеляющими (вторая строка колонки 3).

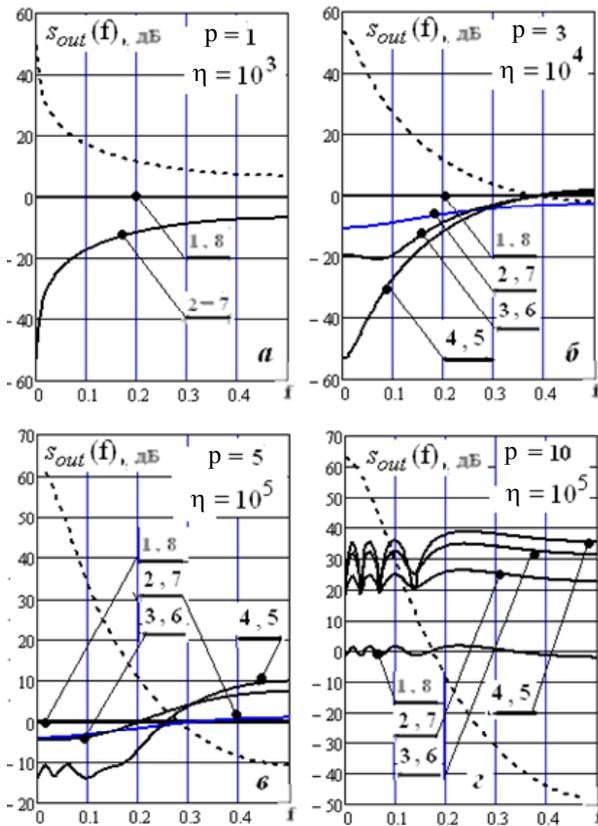


Рис. 9. Спектры процессов AP - p на входе и выходе фильтров с ИХ - строками матриц (36) ( $M = 8, \rho_1 = 0.99$ )

Спектр на выходах фильтров с ИХ  $\mathbf{\Omega}_{\eta \ell} = \mathbf{e}_{\ell}^{(M)*} \cdot \mathbf{\Omega}_{\eta}$ ,  $\ell \in p+1, \ell \in p+1, M-p$  обратен входному (в дБ - масштабе рис. 9 - противоположен по знаку), и, следовательно, они являются обрабатывающими (четвертая строка колонки 3).

Спектры на выходах фильтров с ИХ  $\mathbf{\Omega}_{\eta \ell} = \mathbf{e}_{\ell}^{(M)*} \cdot \mathbf{\Omega}_{\eta}$ ,  $\ell \in 2, p$  и  $\ell \in M-p+1, M$  лежат в промежутке между равномерным спектром белого шума и спектром, обратным входному, что объясняет их название "переобеляющий" ("недообрабатывающий"). В условиях рис. 9, в ( $p < M \leq 2 \cdot p$ ) фильтры с ИХ - строками матриц (36) могут только "обелить" или "переобелить" входной спектр, но не "обратить" его. И, наконец, при  $M < p$  (рис. 9, г) они не могут не только обратить, но и обелить входной спектр (его можно только "недообелить").

К. Помимо несоответствия размеров  $M$  фильтра и порядка  $p$  входного процесса дополнительным источником рассогласования служит собственный шум приемника. В этом случае даже при выполнении условий, приведенных в первой колонке табл. 1, треугольные сомножители

$$\mathbf{H} = \{ H_{ij} \}_{i,j=1}^M, \quad (37, a)$$

$$\mathbf{N} = \{ N_{ij} \}_{i,j=1}^M, H_{ij} = N_{ij} = 0, j > i$$

разложения Холецкого

$$\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^* = \mathbf{\Psi} \quad (37, б)$$

$M \times M$  матрицы

$$\mathbf{\Psi} = \{ \Psi_{ij} \}_{i,j=1}^M = (\mathbf{I}_M + \eta \cdot \mathbf{p})^{-1} = \mathbf{\Phi}^{-1}, \quad (38)$$

обратной КМ (10) аддитивной смеси шума и AP - p отражений от МО, уже не являются строго ленточными (рис. 4, 6), не соблюдается равенство строк (свойства 2 п.п. Г., Д.), а связи между ЭЧХ  $k_p(f)$  и спектром входного процесса (11) отличаются от приведенных в третьей колонке.

Эффект влияния шума на свойства фильтров с ИХ - строками матриц (37) показан на рис. 10. Здесь штриховыми кривыми показаны спектры (11) смеси шума и процессов AP - p с ОСШ  $\eta$  и коэффициентом корреляции  $\rho_1 = 0.99$  на входе, а сплошными - спектры  $s_{out}(f)$  (3) на выходе фильтров размера  $M = 8$  с ИХ -  $\ell$ -ми строками матриц (37), указанными во второй колонке табл. 1, с ЭЧХ, образованными квадратами модулей

$$|q_1(f)|^2, |p_M(f)|^2, |r_{\ell}(f)|^2, \ell \in 2, M-1, \quad (39)$$

указанных нижними индексами элементов векторов

$$\mathbf{q}(f) = \{ q_{\ell}(f) \}_{\ell=1}^M = \mathbf{N}^* \cdot \mathbf{x}(f),$$

$$\mathbf{p}(f) = \{ p_\ell(f) \}_{\ell=1}^M = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}(f), \quad (40)$$

$$\mathbf{r}(f) = \{ r_\ell(f) \}_{\ell=1}^M = \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{x}(f),$$

аналогичных векторам (28), (28) при замене матриц (18а), (18б) на матрицы (37), (38).

Из сравнения приведенных кривых с соответствующими кривыми рис. 9 видно, что степень влияния шума зависит от различий спектра  $\eta \cdot s_{\text{ном}}(f)$  отражений от МО и спектра (11) их смеси с шумом. Оно мало, если малы различия между ними (рис. 8, а и рис. 10, а), и увеличивается по мере роста различий между этими спектрами, наблюдающегося на остальных рисунках. Мерой их различий (штриховых кривых рис. 9, 10) может служить различие спектров (совокупности собственных значений) матриц  $\mathbf{\Psi}$  (38) и  $\mathbf{\Omega}_\eta$  (36).

**Л.** Даже при выполнении условий колонки 1 табл. 1 и пренебрежимо малом уровне шума приемника реально неизбежно рассогласование фильтра и входного процесса, обусловленное ошибками оценивания по выборкам конечного объема априори неизвестных матриц (37), строки которых выступают в роли ИХ фильтра в ОАС рис. 1, б. Влияние этих ошибок на качество различных параметрических методов СО представляет собой предмет отдельных исследований.

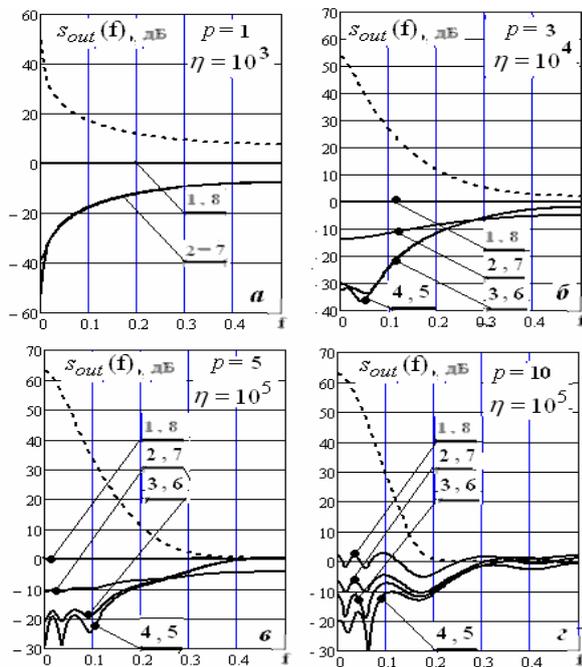


Рис. 10. Спектры процессов AP – p на входе и выходе фильтров с ИХ – строками матриц (37) (M = 8, ρ1 = 0.99)

**М.** При всем разнообразии СФ рассматриваемых методов СО их общей чертой является комби-

нирование квадратов модулей элементов векторов (40), способ которого и отличает один метод от другого. На этапе раскрытия сущности этих комбинаций, их корректировки и обоснования новых вариантов мы для краткости без специальных оговорок полагаем, что свойства соответствующих элементов этих векторов совпадают со свойствами (28б, г), (33б) (колонка 3 табл. 1) векторов (28в, д), (33в) в условиях, указанных в последней строке колонки 1. Отличия от них мы отнесем к факторам рассогласования фильтра со входным процессом (п.п. **З, К, Л**), влияние которых должно анализироваться отдельно.

**Н.** Базовыми для всех рассматриваемых методов СО являются метод "**линейного предсказания (LP)**" [5, 8, 10, 12, 19] со спектральной функцией (СФ)

$$s_{LP}(f) = 1 / |r_\ell(f)|, \quad \ell = [(M+1)/2] \quad (41,а)$$

и две его разновидности с СФ

$$s_{ME1}(f) = \Psi_{MM} / |r_M(f)|^2,$$

$$s_{ME2}(f) = \Psi_{11} / |r_1(f)|^2,$$

имеющие отдельное название – метод "**максимальной энтропии (МЕ)**" Берга [2, 5, 8, 11, 19].

Поскольку в силу (37), (40)

$$r_M(f) = \sqrt{\Psi_{MM}} \cdot p_M(f),$$

$$r_1(f) = \sqrt{\Psi_{11}} \cdot q_1(f),$$

эти СФ можно записать и в более простом виде

$$s_{ME1}(f) = 1 / |p_M(f)|^2, \quad (41,б)$$

$$s_{ME2}(f) = 1 / |q_1(f)|^2.$$

Сущность этих СФ очевидна - в соответствии со свойствами (28), (33) они представляют собой спектр входного процесса, формируемый ОАС рис. 1 с различными ИХ – центральной ( $\ell = [(M+1)/2]$ ) строкой матрицы  $\mathbf{\Psi}$  и "крайними" ( $\ell = M, \ell = 1$ ) строками матриц  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{N}^*$  (37).

Заметим, что в задачах квазигармонического СО под СФ метода LP обычно понимается более просто вычисляемый квадрат СФ  $s_{LP1}(f)$  (41а) [14].

Для этих задач такое представление, увеличивающее контраст между пиками спектра анализируемых гармоник, вполне допустимо, но оно неприемлемо в задаче воспроизведения непрерывных спектров отражений от МО, поскольку потенциально соответствует не спектру, а квадрату искомого спектра входного процесса.

Рассмотрим теперь комбинации базовых СФ. Наиболее известен метод "**минимальной диспер-**

сии (МД)" Кейпона [5, 8, 12, 15, 21 и др.] с СФ

$$s_{MD}(f) = \frac{M}{\mathbf{x}^*(f) \cdot \Psi \cdot \mathbf{x}(f)},$$

в силу (37), (40) допускающей представления

$$s_{MD}(f) = \frac{1}{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M |p_m(f)|^2} = \frac{1}{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M |q_{M+1-m}(f)|^2}. \quad (41,в)$$

Знаменатели этих СФ представляют собой среднее арифметическое ЭЧХ фильтров с ИХ – всеми строками треугольных матриц  $\mathbf{H}$  или  $\mathbf{N}^*$ . Тем самым здесь усредняются ЭЧХ не только обесцвечивающих ( $m \in p+1, M$ ), но и "недообесцвечивающих" ( $m \in 1, p$ ) фильтров. В связи с этим СФ (41в) не совпадет со спектром входного процесса и, следовательно, воспроизводит его потенциально хуже, чем предыдущие СФ. Это, однако, не означает, что такое же соотношение между ними сохранится и в "адаптивной" ситуации использования оценок КМ, формируемых по выборкам конечного объема [15].

Аналогично можно охарактеризовать и метод "теплового шума (ТШ)" [9, 12, 18] с СФ

$$s_{IN}(f) = \frac{M}{\mathbf{x}^*(f) \cdot \Psi^2 \cdot \mathbf{x}(f)}.$$

Ее скорректированные для задач воспроизведения непрерывных спектров варианты имеют вид

$$s_{IN1}(f) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M |r_m(f)|^2}}, \quad (41,г)$$

$$s_{IN2}(f) = \frac{1}{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M |r_m(f)|}. \quad (41,д)$$

В знаменателе первой из них (41г) стоит корень из среднего арифметического ЭЧХ фильтров с ИХ – всеми строками матрицы  $\Psi$ .

Поскольку при этом усредняются ЭЧХ обрабатывающих ( $m \in p+1, M-p$ ), "недообрабатывающих" ( $m \in 2, p, m \in M-p+1, M-1$ ) и обесцвечивающих ( $m = 1, m = M$ ) фильтров, подкоренное выражение отличается от ЭЧХ обрабатывающего, а корень из него – от ЭЧХ обесцвечивающего фильтра, так что СФ (41г) в целом потенциально воспроизведет входной спектр хуже, чем базовые СФ (а, б).

Знаменатель второй СФ (41д) как среднее арифметическое ЭЧХ обесцвечивающих ( $m \in p+1, M-p$ ) и "недообесцвечивающих" фильтров, потенциально также

воспроизведет входной спектр хуже базовых СФ. Для метода Боржотти - Лагунаса (БЛ) [12, 14] с СФ

$$s_{BL}(f) = \frac{\mathbf{x}^*(f) \cdot \Psi \cdot \mathbf{x}(f)}{\mathbf{x}^*(f) \cdot \Psi^2 \cdot \mathbf{x}(f)} = \frac{s_{IN}(f)}{s_{MD}(f)}$$

в силу (37), (40), (41в, г) допустимы представления

$$s_{BL}(f) = \frac{\sum_{m=1}^M |p_m(f)|^2}{\sum_{m=1}^M |r_m(f)|^2} = \frac{\sum_{m=1}^M |q_m(f)|^2}{\sum_{m=1}^M |r_m(f)|^2}. \quad (41,е)$$

Здесь с точностью до множителя  $M$  числитель приближенно аппроксимирует ЭЧХ обесцвечивающего фильтра (обратную искомого спектру), а знаменатель – ЭЧХ обрабатывающего фильтра (обратную квадрату этого спектра), поэтому дробь в целом также аппроксимирует искомый спектр, но с качеством, потенциально уступающим качеству базовых СФ.

Более высокого качества потенциально можно ожидать от "модифицированного алгоритма Кейпона (МАК) [17]" с СФ

$$s_{MAC}(f) = \frac{s_{LP}^2(f)}{s_{MD}(f)} = \frac{\sum_{m=1}^M |p_m(f)|^2}{M \cdot |r_{(M+1)/2}(f)|^2}, \quad (41,ж)$$

числитель которой аппроксимирует ЭЧХ обесцвечивающего фильтра (обратную спектру входного процесса) с той же точностью, что и числитель СФ (41е) метода БЛ, тогда как знаменатель здесь теоретически точно совпадает с ЭЧХ обрабатывающего фильтра (обратной квадрату этого спектра).

II. Развитый выше подход, основанный на целенаправленном учете связей искомого спектра входного процесса и ЭЧХ фильтров с ИХ – строками матрицы, обратной КМ или ее треугольных сомножителей, ни в коей мере не противоречит, но дополняет известные подходы [5, 8 – 11, 14], позволяя единообразно и достаточно просто объяснить свойства различных СФ и, что более важно, "увидеть" их практически полезные модификации.

К их числу можно отнести, в частности, "промежуточные (intermediate)" [17] СФ

$$s_{1int}(f) = \frac{M_e}{\sum_{m=\chi \cdot M}^M |p_m(f)|^2}, \quad M_e = M \cdot (1-\chi) + 1; \quad (41,з)$$

$$s_{2int}(f) = \frac{M_e}{\sum_{m=\chi \cdot M}^M |q_{M+1-m}(f)|^2}, \quad M_e = M \cdot (1-\chi) + 1; \quad (41,и)$$

$$s_{3\text{intl}}(f) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{N_e} \sum_{m=\text{beg}}^{\text{end}} |r_m(f)|^2}},$$

$$\text{beg} = \left[ \tau \cdot \frac{M+1}{2} \right] \quad (41,к)$$

$$\text{end} = M - \text{beg} + 1$$

$$N_e = \text{end} - \text{beg} + 1.$$

Здесь  $M_e$  и  $N_e$  – число накапливаемых элементов векторов (40), регулируемое "коэффициентами использования размера пачки"

$$\chi \in 1/M, 1 \text{ и } \tau \in 2/(M+1), 1 \quad (42)$$

При минимальных значениях  $\chi = 1/M$  и  $\tau = 2/(M+1)$  значения  $M_e = N_e = M$ , так что СФ (41з), (41и) преобразуются в СФ (41в) метода МД Кейпона, а СФ (41к) – в СФ (41г) метода ТШ. При максимальных  $\chi = \tau = 1$   $M_e = 1$ , а  $N_e = 2$  (1) при четных (нечетных) значениях  $M$ . При этом СФ (41з), (41и) преобразуются в СФ (41в) метода МЭ Берга, а СФ (41к) – в СФ (41а) метода ЛП.

Аналогичным способом могут быть построены и "промежуточные" разновидности СФ (41,д)–(41,ж). Смысл "промежуточных" СФ заключается в увеличении относительной доли "однородных" ЭЧХ, формирующих итоговый спектр. За счет этого можно рассчитывать на более высокие "предельные" возможности СО, чем при максимальном числе суммируемых "разнородных" ЭЧХ, и меньший уровень флуктуаций, чем при их минимальном числе, в "адаптивной" ситуации.

Количественной иллюстрации этих возможностей, а также результатам сравнения классических и параметрических методов СО процессов с непрерывными спектрами, в том числе – отражений от МО, планируется посвятить отдельную статью.

## Выводы

1. Спектральные функции (СФ) известных и новых параметрических методов спектрального оценивания (СО) обратно пропорциональны соответствующим степеням энергетических частотных характеристик (ЭЧХ) обеслающих (обращающих) фильтров или их комбинациям различного вида.

2. Импульсные характеристики (ИХ) линейных обеслающих и обращающих фильтров процессов авторегрессии порядка  $p \geq 1$ , аппроксимирующих отражения от МО, определяются соответствующими строками (столбцами) матрицы  $\Omega$ , обратной корреляционной матрице (КМ)  $M$ -мерного вектора отсчетов МО или строками ее треугольных сомножителей Холецкого. Фильтры размера  $M > p$  с ИХ, пропорциональными строкам нижнего (верх-

него) правого треугольного сомножителя матрицы  $\Omega$  с номерами от  $p+1$  (1) до  $M$  ( $M-p$ ), "обеслают" входной спектр. Фильтры размера  $M > 2p$  с ИХ, пропорциональными первой или последней строкам матрицы  $\Omega$ , также "обеслают" входной спектр, а с номерами от  $p+1$  до  $M-p$  – "обращают" его. При других размерах фильтра или использовании в качестве ИХ фильтра других строк матрицы спектр МО "недообеслаивается" или "переобеслаивается" ("недообращается").

3. Различные процедуры параметрического СО сводятся к комбинированию квадратов модулей элементов вектора выходных сигналов обеслающего или обращающего фильтров с матричными импульсными характеристиками (МИХ), пропорциональными треугольному сомножителю Холецкого матрицы, обратной КМ, или самой этой матрице, «возбуждаемых» вектором отсчетов комплексной гармоники на частоте анализа. Отличие методов состоит в способе комбинирования элементов векторов выходных сигналов этих фильтров. В частности, при усреднении всех компонент вектора выходных сигналов обеслающего фильтра реализуется СФ метода "минимальной дисперсии" Кейпона, а при использовании только последней компоненты – метод максимальной энтропии Берга.

4. При полном согласовании параметров фильтра и входного процесса его спектр воспроизводится практически точно. Реально неизбежно рассогласование, порождаемое несоответствием размеров  $M$  фильтра и порядка  $p$  входных воздействий, наличием собственных шумов приемника, ошибками оценивания параметров КМ входных воздействий. Наиболее чувствительны к первым двум видам рассогласования фильтры, реализующие обращение спектра. Исследованию влияния наиболее важного вида рассогласования – ошибок оценивания параметров фильтра, обусловленных конечностью объема доступной для этого выборки, планируется посвятить отдельную публикацию.

## Список литературы

1. Довиак Р.Дж. Доплеровские радиолокаторы и метеорологические наблюдения / Р.Дж. Довиак, Д.С. Зрнич; пер. с англ. под ред. А.А. Черникова. – Л.: Гидрометеиздат, 1988. – 281 с.
2. Дженкинс Г. Спектральный анализ и его приложения. Т. 2 / Г. Дженкинс, Д. Ваттс. – М.: Мир, 1972. – 177 с.
3. Караваев В.В. Статистическая теория пассивной локализации / В.В. Караваев, В.В. Сазонов. – М.: Радио и связь, 1987. – 120 с.
4. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций с примерами из метеорологии / А.М. Яглом. – Л.: Гидрометеиздат, 1991. – 170 с.
5. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / С.Л. Марпл-мл.; пер. с англ. под ред. И.С. Рыжачка. – М.: Мир, 1990. – 364 с.

6. Метеорологические автоматизированные радиолокационные сети / [Базлова Т.А., Бочарников Н.В., Брылев Г.Б. и др.]; отв. ред. Г.Б. Брылев. – СПб.: Гидрометеоиздат, 2002. – 332 с.
7. Автоматизированные метеорологические радиолокационные комплексы "Метеоячейка" / [Бочарников Н.В., Брылев Г.Б., Кузнецова Л.И. и др.]; отв. ред. Н.В. Бочарников. – СПб.: Гидрометеоиздат, 2007. – 238 с.
8. Stoica P. *Introduction to Spectral Analysis* / P. Stoica, R. Moses. – NJ.: Prentice Hall, Upper Saddle River, 1997. – 320 p.
9. Гершман А.Б. Взаимосвязь спектральных оценок максимальной энтропии и "теплого шума" / А.Б. Гершман, В.Т. Ермолаев // Радиотехника. – М., 1988. – № 9. – С. 18.
10. Гейбриел У. Спектральный анализ и методы сверхразрешения с использованием адаптивных антенных решеток / У. Гейбриел // ТИИЭР. – 1980. – № 6. – С. 19.
11. Джейнс Э.Т. О логическом обосновании методов максимальной энтропии / Э.Т. Джейнс // ТИИЭР. – 1982. – № 9. – С. 21-29.
12. Джонсон Д.Х. Применение методов спектрального оценивания к задачам определения угловых координат источников излучения / Д.Х. Джонсон // ТИИЭР. – 1982. – Т. 70, № 9. – С. 114-116.
13. Поляризационный доплеровский метеорологический радиолокатор С-диапазона со сжатием импульсов / В.С. Ефремов, Б.М. Вовшин, И.С. Вылегжанин, В.В. Лаврукевич, Р.М. Седлецкий // Радиолокация и радиосвязь: III Всероссийская конференция. – ИРЭ РАН, 15–18 октября 2009 г. – С. 233-242.
14. Мюнье Ж. Пространственный анализ в пассивных локационных системах с помощью адаптивных методов / Ж. Мюнье, Ж. Делль // ТИИЭР. – 1987. – Т. 75, N 11. – С. 10-17.
15. Статистический анализ «сверхразрешающих» методов пеленгации источников шумовых излучений в АР при конечном объеме обучающей выборки / Д.И. Леховицкий, Д.В. Атаманский, И.Г. Кириллов, П.М. Флексер // Антенны. – 2000. – № 2. – С. 11-18.
16. Извлечение метеоинформации на основе спектрального и корреляционного анализа отражений в импульсных доплеровских метеорологических РЛС / Д.И. Леховицкий, Г.А. Жуга, Б.М. Вовшин, В.В. Лаврукевич // Прикладная радиоэлектроника. – 2007. – Т. 6, № 4. – С. 281-290.
17. Леховицкий Д.И. Разновидности «сверхразрешающих» анализаторов пространственно-временного спектра случайных сигналов на основе обеляющих адаптивных решетчатых фильтров / Д.И. Леховицкий, Д.В. Атаманский, И.Г. Кириллов // Антенны. – 2000. – № 2. – С. 19-32.
18. Черемисин О.П. Эффективность адаптивных методов пеленгации помех / О.П. Черемисин // Радиотехника и электроника. – 1989. – Т. 22, N 9. – С. 1828-1839.
19. Krim H. Two Decades of Array Signal Processing Research / H. Krim, M. Viberg // IEEE Signal Processing Magazine. – 1996. – № 7. – P. 67-95.
20. Burg I.P. Maximum Entropy Spectral Analysis. Proc. 17th Meeting of the Society of Exploration Geophysicists / I.P. Burg. – Oklahoma City, Okla., October 1967.
21. Capon J. High Resolution Frequency – Wave number Spectrum Analysis / J. Capon // Proc. IEEE. – 1969. – 35. – P. 1198-1197.
22. Abramovich Y. Time-varying autoregressive (TVAR) models for multiple radar observations / Y. Abramovich, N. Spencer, M Turley // IEEE Trans. Sig. Proc. – Apr. 2007. – Vol. 33, № 4. – P. 1188-1191.
23. Bringi, V.N. Polarimetric Doppler Weather Radar: Principles and Applications / V.N. Bringi, V. Chandrasekar. – Cambridge University Press, 2001. – 624 p.
24. Gematronik Weather Radar Systems [Электронный ресурс]. – Режим доступа к ресурсу: <http://www.gematronik.com/products/>.
25. Dym H. Extensions of bandmatrices with band inverses / H. Dym and I. Gohberg. // Linear Algebra Appl. – Mar. 1981. – Vol. 36. – P. 1-24.

Поступила в редколлегию 10.08.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Р.Е. Пащенко, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

## ПАРАМЕТРИЧНІ МЕТОДИ ОЦІНЮВАННЯ СПЕКТРІВ ВІДБИТТІВ ВІД МЕТЕОУТВОРЕНЬ

Д.І. Леховицький, Д.С. Рачков, А.В. Семеняка, Д.В. Атаманський

Розглядаються параметричні методи спектрального аналізу (СА) у завданні оцінювання спектрів метеоутворень. Обґрунтовується єдиний підхід до синтезу й сутність відомих параметричних методів СА процесів авторегресії довільного цілого порядку. Пропонуються їхні модифікації й нові різновиди, перспективні для практичного використання.

**Ключові слова:** спектральне оцінювання, метеоутворення, авторегресійна модель, параметричні методи, що обіляють (що обертають) фільтри, спектральні функції.

## PARAMETRIC METHODS FOR SPECTRUM ESTIMATION OF REFLECTIONS FROM METEOROLOGICAL FORMATIONS

D.I. Lekhovytskyi, D.S. Rachkov, A.V. Semeniaka, D.V. Atamanskyi

We consider the parametric methods of spectral analysis (SA) concerning to the problem of meteorological formations spectra estimation. The unified approach to the synthesis and the essence of well-known parametric methods of SA of autoregressive processes of arbitrary integer order are proved. The modifications and new forms of these methods perspective for practical application are proposed.

**Keywords:** spectrum estimation, meteorological formations, autoregressive model, parametric methods, whitening (inverse) filters, spectral functions.