

УДК 006.91

М.П. Сергиенко

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРОНИ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДСТВ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ТИПА

*В работе предложено расширение области применения метода наименьших квадратов Прони для идентификации переходных характеристик средств измерительной техники, описываемых динамическими звеньями колебательного типа. Исследованы погрешности данного метода при различных условиях проведения измерительного эксперимента, на основании чего разработаны рекомендации по оптимизации выбора количества отсчетов. Исследовано влияние времени измерения переходной характеристики на методическую погрешность предложенного метода. Рассмотрены достоинства и недостатки данного метода.*

**Ключевые слова:** средство измерительной техники, переходная характеристика, идентификация, метод Прони, метод наименьших квадратов, погрешность метода.

### Введение

**Постановка проблемы.** Исследование динамических свойств средств измерительной техники (СИТ), нашедших в настоящее время применение как для измерения изменяющихся во времени величин и процессов, так и для величин, считающихся постоянными, является необходимым для совершенствования современной техники и технологий с целью повышения их точности и быстродействия [1]. Динамические свойства СИТ проявляются в том, что уровень определенного переменного воздействия на СИТ в какой-либо момент времени обуславливает выходной сигнал СИТ в последующие моменты времени [2], и в общем случае влияют на результат измерений характеристик динамических объектов, из чего следует необходимость их изучения. Динамические свойства полностью могут быть описаны динамическими характеристиками (ДХ), являющимися одними из числа нормируемых метрологических характеристик СИТ [2 – 5]. Одной из полных ДХ, отражающих динамические свойства линейных СИТ, является переходная характеристика (ПХ), получаемая как реакция СИТ на ступенчатое воздействие. В ряде случаев ПХ является наиболее удобной для описания поведения СИТ в динамических режимах как с точки зрения возможности воспроизведения испытательного воздействия в виде единичной функции с достаточной точностью, что выполнимо для большинства электрических и неэлектрических величин, так и с точки зрения дальнейшего применения полученных при ее идентификации результатов.

В работе [6] был предложен и исследован метод Прони, нашедший широкое применение в теории и практике цифрового спектрального анализа

сигналов [7], для идентификации ПХ СИТ, моделируемых динамическими звеньями апериодического типа. В дальнейшем [8] был разработан алгоритм идентификации ПХ методом Прони с использованием метода наименьших квадратов, исследованы точностные параметры метода и возможности его применения.

**Целью данной работы** является адаптация метода наименьших квадратов Прони для идентификации ПХ СИТ, моделируемых динамическими звеньями колебательного типа и исследование его погрешностей для разработки рекомендаций по его оптимальному применению.

### Основной материал

**Описание ПХ СИТ, моделируемых колебательными звеньями.** Нормированная ПХ СИТ, моделируемого колебательным звеном, описывается выражением

$$h(t) = 1 - e^{-\lambda t} \left( \cos \omega t + \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega t \right), \quad (1)$$

где  $\lambda$  – показатель затухания;  $\omega$  – угловая частота колебаний.

Показатель затухания и угловая частота колебаний связаны выражениями

$$\lambda = \frac{\xi}{T}; \quad \omega = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}, \quad (2)$$

где  $T$  – постоянная времени СИТ;  $\xi$  – коэффициент затухания.

После применения преобразований Эйлера [9]

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}; \quad \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

и ряда алгебраических преобразований ПХ приобретает вид

$$h(t) = 1 - \frac{\omega + j\lambda}{2\omega} e^{-(\lambda - j\omega)t} - \frac{\omega - j\lambda}{2\omega} e^{-(\lambda + j\omega)t}. \quad (3)$$

При дискретном измерении ПХ

$$h(n\Delta t) = 1 - \frac{\omega + j\lambda}{2\omega} e^{-(\lambda - j\omega)n\Delta t} - \frac{\omega - j\lambda}{2\omega} e^{-(\lambda + j\omega)n\Delta t}, \quad (4)$$

где  $n = 1, 2, \dots, N$  ( $N$  – количество дискретных отсчетов);  $\Delta t$  – период дискретизации ПХ СИТ.

**Метод Прони.** В рамках метода Прони [6, 7] после замен

$$1 - h(n\Delta t) = C_n; \quad (5)$$

$$e^{-(\lambda - j\omega)n\Delta t} = X_1^n; \quad e^{-(\lambda + j\omega)n\Delta t} = X_2^n; \quad (6)$$

$$\frac{\omega + j\lambda}{2\omega} = A_1; \quad \frac{\omega - j\lambda}{2\omega} = A_2 \quad (7)$$

система (4) преобразуется к виду

$$C_n = A_1 X_1^n + A_2 X_2^n. \quad (8)$$

Для определения параметров  $A_m$  и  $X_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ , где  $M$  – порядок моделирующего СИТ динамического звена – колебательное звено является звеном второго порядка, то есть  $M = 2$ ) методом Прони необходимо:

1). Измерить ПХ в  $N = 2M = 4$  точках через интервал дискретизации  $\Delta t$  и рассчитать параметры  $C_n$  согласно выражению (5);

2). Записать  $M \times M$  ( $2 \times 2$ ) матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} C_2 & C_1 \\ C_3 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

из которого вычислить вспомогательные параметры  $a_m$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) по формуле

$$a_m = \frac{D_m}{D}, \quad (10)$$

где  $D = \begin{vmatrix} C_2 & C_1 \\ C_3 & C_2 \end{vmatrix}$  – главный определитель системы

(9);  $D_m$  – определитель, образующийся путем замены  $m$ -го столбца главного определителя столбцом свободных членов;

3). Рассчитать  $X_m$  как корни характеристического уравнения

$$\Phi(X) = \sum_{m=0}^M a_m X^{M-m} = 0, \quad (11)$$

в котором  $a_0 = 1$ .

Для колебательного звена характеристическое уравнение будет иметь вид

$$\Phi(X) = X^2 + a_1 X + a_2 = 0,$$

а его корни соответственно

$$X_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}. \quad (12)$$

4). Рассчитать по формуле (6) показатель затухания  $\lambda$  и угловую частоту колебаний  $\omega$

$$\lambda = -\frac{\ln X_2 + \ln X_1}{2\Delta t}; \quad \omega = \frac{\ln X_1 - \ln X_2}{2j\Delta t}. \quad (13)$$

Исследования [7] показали, что в таком виде метод Прони имеет очень низкую точность и помехозащищенность, поэтому к нему необходимо применить метод наименьших квадратов (МНК).

**МНК Прони.** В этом случае необходимо увеличить количество отсчетов ПХ так, чтобы  $N \gg 2M$ .

Тогда система (9) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} C_2 & C_1 \\ C_3 & C_2 \\ C_4 & C_3 \\ \vdots & \vdots \\ C_{N-1} & C_{N-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ \vdots \\ C_N \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Система (14) является несовместной, однако, применив к ней метод наименьших квадратов и введя обозначение  $[C_{M+n-m}] = \sum_{n=1}^{N-M} C_{M+n-m}$ , можно

получить нормальную систему уравнений вместо системы (9)

$$\begin{pmatrix} [C_{1+n}^2] & [C_n C_{1+n}] \\ [C_n C_{1+n}] & [C_n^2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [C_{2+n} C_{1+n}] \\ [C_{2+n} C_n] \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Последующая обработка данных осуществляется по алгоритму, приведенному ранее.

**Исследование погрешностей МНК Прони.** Погрешности предложенного метода были исследованы на примере СИТ, ПХ которого показана на рис. 1, с коэффициентом затухания  $\xi = 0,25$  и постоянной времени  $T = 0,4$  с, то есть его показатель затухания  $\lambda = 0,625 \text{ с}^{-1}$ , а угловая частота колебаний  $\omega = 2,42 \text{ с}^{-1}$ .

**1. Погрешность, вызванная малым числом дискретных отсчетов ПХ.** Исследования показали, что при малом числе точек дискретизации МНК Прони обладает методической погрешностью определения угловой частоты колебаний (рис. 2), достигающей при  $N = 2M = 4$  ( $-96$ ) %.

**2. Погрешность, вызванная случайными отклонениями ПХ.** Дискретные значения измеренной ПХ на практике всегда будут обладать рассеянием, связанным со случайными факторами, вносимыми как самим СИТ, так и параметрами окружающей среды. По результатам численного моделирования были получены зависимости максимумов погреш-

ностей (из  $10^5$  выборок) параметров  $\lambda$  и  $\omega$  от количества точек дискретизации при разных среднеквадратических отклонениях (СКО)  $\sigma(h)$  дискретных значений ПХ (рис. 3, сплошной линией обозначены зависимости для  $\delta(\lambda)$ , штриховой – для  $\delta(\omega)$ ).

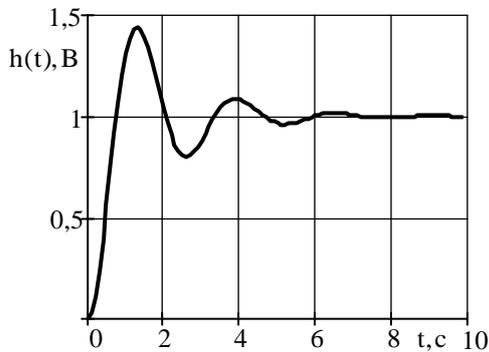


Рис. 1. ПХ СИТ, моделируемое колебательным звеном

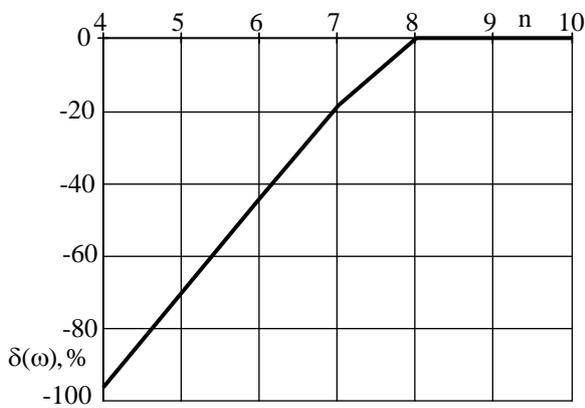


Рис. 2. Зависимость погрешности определения угловой частоты колебаний от числа наблюдений ПХ

Приведенные зависимости демонстрируют наличие минимумов погрешностей: для показателя затухания минимум погрешности его определения (не более 0,7% при СКО ПХ 0,0001 В и 0,001 В; не более 7,5% при СКО ПХ 0,01 В) соответствует количеству точек дискретизации  $n = (20...24)$ , для угловой частоты колебаний минимум погрешности (не более 0,03% при СКО ПХ 0,0001 В; не более 0,3% при СКО ПХ 0,001 В; не более 2,7% при СКО ПХ 0,01 В) соответствует  $n = (14...16)$ .

Наблюдаемое увеличение погрешности при увеличении количества дискретных точек, начиная с оптимальных, в отличие от классического МНК, объясняется нелинейными соотношениями в самом алгоритме МНК Прони. Этот эффект был исследован и в работе [10].

**3. Погрешность, вызванная ограничением времени измерения ПХ СИТ.** Эта погрешность появляется в случае, когда вместо всей ПХ до наступления установившегося режима измеряют какую-то

ее часть, что может случиться, если переходной процесс слишком долгий или отсутствует возможность априорной оценки длительности переходного процесса.

Исследования проводились на примере описанного выше СИТ для значений числа наблюдений, выбранных в качестве оптимальных при рассмотрении влияния рассеяния ПХ на точность метода, а именно  $n = 16; 20; 24$  и  $n = 50$  для получения информации о динамике роста погрешностей.

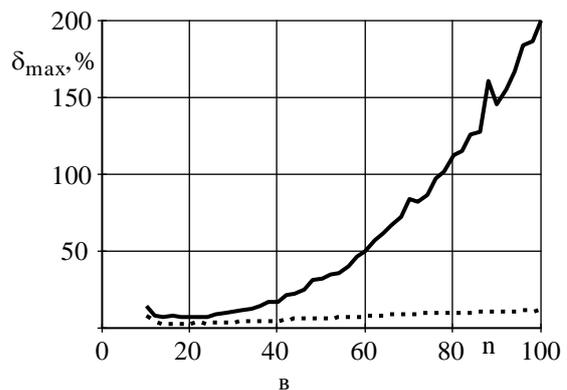
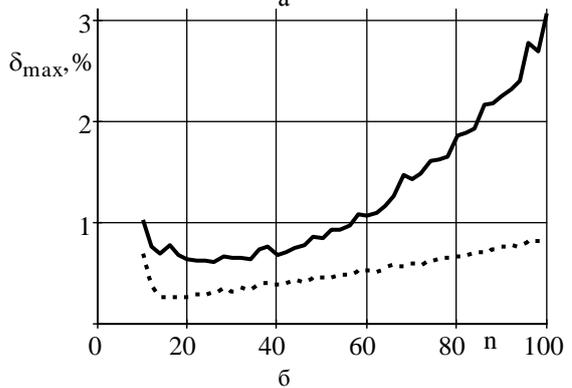
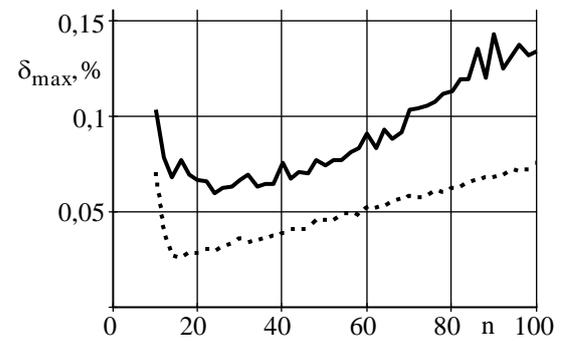


Рис. 3. Зависимости  $\delta(\lambda)$  и  $\delta(\omega)$  от  $n$  при  $\sigma(h) = 0,0001$  В (а);  $\sigma(h) = 0,001$  В (б);  $\sigma(h) = 0,01$  В (в)

Проведенные исследования позволили выявить ряд особенностей предлагаемого метода идентификации ПХ. Во-первых, идентификация данным методом невозможна при слишком малом времени измерения ПХ: для данного примера минимально возможное для измерения ПХ время составило

0,03 с при любом числе точек дискретизации. Вторых значения методической погрешности лежит в допустимых пределах ( $\delta(\lambda)$  не превышает 0,03%,  $\delta(\omega)$  не превышает 1,2%), начиная с времени измерения 0,04 с (рис. 4).

Полученные результаты позволяют сделать вывод о независимости точности идентификации ПХ СИТ с помощью МНК Прони от времени измерения ПХ. На практике это означает, что отсутствует необходимость априорного исследования процесса с целью получения информации о его длительности.

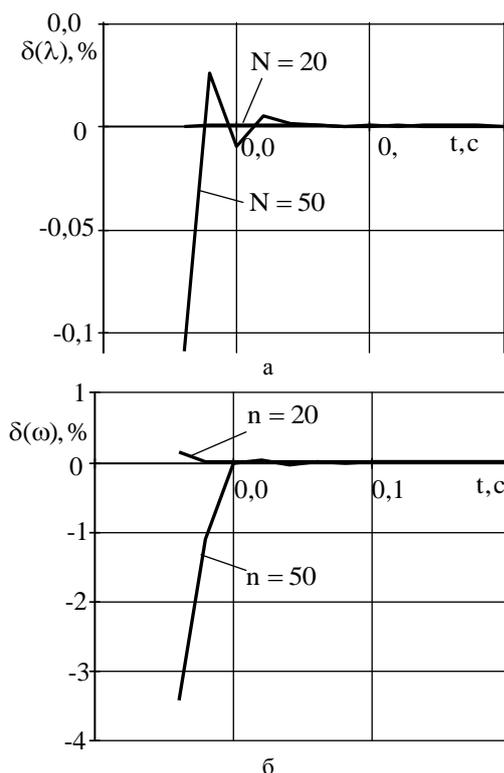


Рис. 4. Зависимости методических погрешностей  $\delta(\lambda)$  (а) и  $\delta(\omega)$  (б) от времени измерения ПХ СИТ

Однако следует иметь в виду, что эксперимент проводился при отсутствии шумов в измеряемом сигнале, поскольку речь шла об исследовании исключительно методической погрешности. В реальных условиях при наложении случайных факторов во избежание появления дополнительных погрешностей не следует сокращать время измерения ПХ, если это возможно, и исследовать ее до наступления установившегося режима.

### Выводы

В работе для идентификации ПХ СИТ, моделируемых колебательным звеном, адаптирован МНК Прони, что позволило расширить границы его применимости – МНК Прони может использоваться для СИТ, моделируемых любыми динами-

ческими звеньями, включая и модели с кратными корнями.

Значительная методическая погрешность МНК Прони присутствует при малом числе дискретных отсчетов (до 10) и достигает (-96)% для угловой частоты колебаний. При сокращении времени измерения ПХ (до 0,01 от времени установления процесса) также присутствует методическая погрешность, которая для угловой частоты колебаний может достигать до 1,2%. К тому же существует предел, меньше которого время измерения быть не может для использования описываемого метода идентификации.

Исследования метода при условии появления шумов при дискретном измерении ПХ показали, что при выборе количества точек дискретизации ПХ  $n = (20 \dots 24)$  и  $n = (14 \dots 16)$  соответственно для показателя затухания  $\lambda$  и угловой частоты колебаний  $\omega$  можно добиться значительной минимизации погрешности их определения (погрешность может быть уменьшена в (2...30) раз для  $\lambda$  и в (2...5) раз для  $\omega$ ).

### Список литературы

1. Бугаков И.А. Использование метода динамических измерений физических величин для построения быстродействующих средств измерений / И.А. Бугаков // Измерительная техника. – 2001. – № 10. – С. 6-9.
2. ГОСТ 8.009-84 ГСИ. Нормирование и использование метрологических характеристик средств измерений. – М.: Изд-во стандартов, 1988. – 38 с.
4. МИ 02-001-96 ГСИ. Методика оценивания погрешностей измерения динамических характеристик линейных средств измерений. – Львов: ГНИИ «Система», 1996. – 77 с.
5. МИ 1951-88 ГСИ. Динамические измерения. Термины и определения. – М.: Изд-во стандартов, 1990. – 17 с.
7. МИ 2090-90 Определение динамических характеристик линейных аналоговых средств измерений с сосредоточенными параметрами. Общие положения. – М.: Изд-во стандартов, 1991. – 64 с.
8. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / С.Л. Марпл-мл.. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
9. Захаров И.П. Исследование погрешностей идентификации переходных характеристик апериодических измерительных преобразователей методом Прони / И.П. Захаров, М.П. Сергиенко // Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – № 1 (26). – С.44-47.
10. Захаров И.П. Идентификация переходных характеристик средств измерительной техники методом наименьших квадратов Прони / И.П. Захаров, М.П. Сергиенко // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил ім. І. Кожедуба. – Х., 2007. – Вип.. 2 (14). – С. 142-145.
11. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1981. – 718 с.

Поступила в редколлегию 19.08.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.П. Захаров, Харьков-  
ский национальный университет радиозлектроники, Харьков, Украина.

### ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ПРОНІ ДЛЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПЕРЕХІДНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗАСОБІВ ВИМІРЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ КОЛИВАЛЬНОГО ТИПУ

М.П. Сергієнко

*В роботі запропоновано розширення сфери застосування методу найменших квадратів Проні для ідентифікації перехідних характеристик засобів вимірювальної техніки, що описуються динамічними ланками коливального типу. Досліджено похибки цього методу за різних умов проведення вимірювального експерименту, на підставі чого розроблено рекомендації з оптимізації вибору кількості дискретних відліків. Досліджено вплив часу вимірювання перехідної характеристики на методичну похибку запропонованого методу. Розглянуті переваги та недоліки цього методу.*

**Ключові слова:** засіб вимірювальної техніки, перехідна характеристика, ідентифікація, метод Проні, метод найменших квадратів, похибка методу.

### THE APPLICATION OF A PRONY'S METHOD FOR AN IDENTIFICATION OF TRANSFER CHARACTERISTICS OF MEASURING DEVICES OF OSCILLATORY TYPE

M.P. Sergienko

*This work suggests a broadening for an application of a Prony's least-squares method in case of applying it for an identification of measuring devices transfer characteristics which could be described by oscillatory links. The errors of this method which appear while it is applied in different conditions of a measuring experiment are investigated in this work as well. The recommendations for a number of readings optimization are worked out based on aforesaid. Here is investigated a transfer characteristic measuring time influence on an error of the suggested method. Highs and lows of a suggested method are considered in this work as well.*

**Keywords:** measuring device, transfer characteristic, identification, Prony's method, least-squares method, error of a method.