УДК 519.7

М.Ф. Бондаренко[1], С.Ю. Шабанов-Кушнаренко[1], Д.Э. Ситников[2], П.Э. Ситникова[3]

[1]*Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков*
[2]*Харьковская государственная академия культуры, Харьков*
[3]*Харьковский гуманитарный университет «Народная украинская академия», Харьков*

МЕТОДЫ ИСКЛЮЧЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ИЗ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ РАЗЛИЧНЫМИ ФОРМУЛАМИ АЛГЕБРЫ КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ

Описан общий метод исключения переменных. Разработаны методы исключения переменных из предикатов, представленных в виде конъюнктивной и дизъюнктивной нормальных форм. Введено понятие расщепляемых уравнений. Разработан метод исключения переменных из расщепляемых уравнений и пошаговый алгоритм его реализации.

Ключевые слова: *подстановочная операция, исключение переменных, расщепляемый предикат.*

Введение

Для формализации информации об объектах и процессах в базах знаний используются различные методы дискретной математики, в том числе логические уравнения с булевыми переменными. При исследованиях, связанных с логическими выводами в базах знаний возникают вопросы определения тесноты связей между признаками данных объектов, а также вопросы их существенности и несущественности.

Универсальным способом решения систем уравнений алгебры конечных предикатов является приведение предиката, заданного системой уравнений и начальными условиями к совершенной дизъюнктивной нормальной форме [1]. Однако такая процедура связана с перебором большого числа промежуточных решений и практическая ее реализация требует значительных затрат машинного времени. Для некоторых видов лингвистических уравнений при учете особенности их структуры возможна разработка более простых алгоритмов их решения. Так, более практичен эвристический алгоритм [3], который, однако, предполагает нахождение всех наборов значений семантических признаков, что замедляет процесс решения при увеличении числа признаков, когда время решения растет экспоненциально.

Во многих практических задачах, связанных со смысловой обработкой естественно-языковой информации, нет необходимости получать все наборы значений семантических признаков, а требуется получить на выходе один или несколько наборов значений признаков (целевых переменных), которые представляют интерес для пользователя. Часто необходимо найти значения целевых переменных при заданных начальных условиях, которые представляют собой фиксированный набор значений других признаков. При решении таких задач остальные переменные, которые не входят в начальные условия и не являются целевыми, исключаются из уравнения путем связывания их кванторами существования [1].

Цель статьи: разработать методы исключения переменных из некоторых форм предикатов.

1. Общий метод исключения переменных и достаточные условия для упрощения формулы алгебры конечных предикатов при действии на нее кванторной операции

Общий метод исключения переменных заключается в следующем [1]. Пусть имеется уравнение алгебры конечных предикатов вида

$$f(x_1, x_2, \dots x_q, x_{q+1}, \dots, x_g, x_{g+1}, \dots, x_n) = 1, \qquad (1)$$

где каждая из переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ имеет область значения $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik_i}\}, i = \overline{1, n}$, причем для системы признаков необходимо выполнение законов истинности:

$$x_i^{a_{i1}} \vee x_i^{a_{i2}} \vee \dots \vee x_i^{a_{ik}} = 1, i = \overline{1, n}$$

и ложности:

$$x_i^{a_{il}} \vee x_i^{a_{im}} = 0,\ \ l \neq m,\ \ l, m = \overline{1, k_i}.$$

Допустим также, что при заданных значениях переменных $x_1, x_2, \dots, x_q$ $\{a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{qj_q}\}$ необходимо вычислить значения переменных $x_{g+1}, \dots, x_n$ такие, что уравнение (1) будет верно при каких либо значениях переменных $x_{q+1}, \dots, x_g$.

Запишем данную постановку задачи математически:

$$\exists x_{q+1} \dots \exists x_g f(a_{1j_1}, \dots a_{qj_q}, x_{q+1}, \dots, x_g, x_{g+1}, \dots, x_n) = 1, \qquad (2)$$

что на языке алгебры конечных предикатов выглядит следующим образом:

$$\bigvee_{j=1}^{k_{q+1}} a_{q+1,j} \cdots \bigvee_{j=1}^{k_g} a_{gj} f(a_{1j_1}, \ldots a_{qj_q}, a_{q+1,j}, \ldots, a_{g,j}, x_{g+1}, \ldots, x_n) = 1,$$

где свободными являются лишь переменные $x_{g+1}, \ldots, x_n$, нахождение набора значений которых и является решением поставленной задачи.

Напомним также, что система лингвистических уравнений вида

$$y^{B_i} = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad i = \overline{1, n}, \tag{3}$$

удовлетворяющая условию

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \wedge g_j(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n} \tag{4}$$

может быть приведена к виду

$$\bigvee_{i=1}^{n} y^{B_i} \wedge g_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 1. \tag{5}$$

Однако сам процесс исключения переменных с помощью квантора существования обладает определенной сложностью в том случае, если уравнение имеет произвольную структуру.

Пусть предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ представлен как

$$P = P_1(x_{i_{11}}, x_{i_{12}}, \ldots, x_{i_{1n}}) P_2(x_{i_{21}}, x_{i_{22}}, \ldots, x_{i_{2n}}) \wedge \ldots \wedge P_n(x_{i_{n1}}, x_{i_{n2}}, \ldots, x_{i_{nn}}),$$

причем

$$\{x_{i_{11}}, x_{i_{12}}, \ldots, x_{i_{1n}}\} \cap \{x_{i_{21}}, x_{i_{22}}, \ldots, x_{i_{2n}}\} \cap \ldots \cap \{x_{i_{n1}}, x_{i_{n2}}, \ldots, x_{i_{nn}}\} = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}\} = A.$$

Допустим, необходимо связать квантором существования переменные из множества A.

Рассмотрим действие квантора существования по переменной x_{j_1} из множества A:

$$\exists x_{j_1}(P) = \bigvee_{i_1} P_1^{i_1} P_2^{i_1} \ldots P_n^{i_1},$$

где $P_g^{i_1} = a_{j_1 i_1}(P_g)$, $g = \overline{1, n}$.

Например, $P = P_1(x_1, x_2, x_3, x_4) P_2(x_2, x_3, x_5) \wedge \wedge P_1(x_2, x_3, x_6, x_7)$. Пусть область определения переменной x_2 состоит из трех значений, а переменной x_3 – из двух значений. Тогда

$$\exists x_2(P) = P_1(x_1, a_{21}, x_3, x_4) P_2(a_{21}, x_3, x_5) \wedge P_3(a_{21}, x_3, x_6, x_7) \vee P_1(x_1, a_{22}, x_3, x_4) P_2(a_{22}, x_3, x_5) P_3(a_{22}, x_3, x_6, x_7) \vee \vee P_1(x_1, a_{23}, x_3, x_4) P_2(a_{23}, x_3, x_5) P_3(a_{23}, x_3, x_6, x_7) = \bigvee_{i_1} P_1^{i_1}(x_1, x_3, x_4) P_2^{i_1}(x_3, x_5) P_3^{i_1}(x_3, x_6, x_7).$$

Далее, $\exists x_{j_2}(P)(\exists x_{j_1}(P)) = \bigvee_{i_2} \bigvee_{i_1} P_1^{i_1 i_2} P_2^{i_1 i_2} P_3^{i_1 i_2}$, где $P_g^{i_1 i_2} = a_{j_2 i_2}(a_{j_1 i_1}(P_g))$, $g = \overline{1, n}$.

Тогда для предыдущего примера

$$\begin{aligned}
&\exists x_3(P) \exists x_2(P) = \\
&= P_1(x_1, a_{21}, a_{31}, x_4) P_2(a_{21}, a_{31}, x_5) P_3(a_{21}, a_{31}, x_6, x_7) \vee \\
&\vee P_1(x_1, a_{22}, a_{31}, x_4) P_2(a_{22}, a_{31}, x_5) P_3(a_{22}, a_{31}, x_6, x_7) \vee \\
&\vee P_1(x_1, a_{23}, a_{31}, x_4) P_2(a_{23}, a_{31}, x_5) P_3(a_{23}, a_{31}, x_6, x_7) \vee \\
&\vee P_1(x_1, a_{21}, a_{32}, x_4) P_2(a_{21}, a_{32}, x_5) P_3(a_{21}, a_{32}, x_6, x_7) \vee \\
&\vee P_1(x_1, a_{22}, a_{32}, x_4) P_2(a_{22}, a_{32}, x_5) P_3(a_{22}, a_{32}, x_6, x_7) \vee \\
&\vee P_1(x_1, a_{23}, a_{32}, x_4) P_2(a_{23}, a_{32}, x_5) P_3(a_{23}, a_{32}, x_6, x_7) = \\
&= \bigvee_{i_2} \bigvee_{i_1} P_1(x_1, a_{2i_1}, a_{3i_2}, x_4) P_2(a_{2i_1}, a_{3i_2}, x_5) \wedge \\
&\wedge P_3(a_{2i_1}, a_{3i_2}, x_6, x_7) \\
&= \bigvee_{i_2} \bigvee_{i_1} P_1^{i_1 i_2}(x_1, x_4) P_2^{i_1 i_2}(x_5) P_3^{i_1 i_2}(x_6, x_7).
\end{aligned}$$

Из приведенного примера видно, что, применяя последовательно квантор существования по переменным из множества A (то есть по общим переменным для всех предикатов), общая формула исходного предиката усложняется с каждым шагом, и с каждым шагом нам приходится делать на n^n операций больше. Но существует ряд задач, в которых условие задано предикатом, имеющим такую структуру, что сложность решения задачи исключения переменных с помощью квантора существования и нахождения значений целевых переменных гораздо меньше, чем в общем случае. Существуют также случаи, когда можно упростить предикат, полученный на промежуточной стадии решения уравнения. Исследуем такие задачи.

Рассмотрим частный случай поставленной задачи, когда множество A состоит из одного элемента, то есть

$$P = P_1\left(x_1, \ldots, x_{k_1}, x_1\right) P_2\left(x_{k_1+1}, \ldots, x_{k_2}, x_1\right) \wedge \ldots \wedge P_n\left(x_{k_{n-1}+1}, \ldots, x_{k_n}, x_1\right), \tag{6}$$

где

$$\{x_1, \ldots, x_{k_1}, x_1\} \cap \{x_{k_1+1}, \ldots, x_{k_2}, x_1\} \cap \ldots \cap \{x_{k_{n-1}+1}, \ldots, x_{k_n}, x_1\} = \varnothing.$$

Тогда в результате действия квантора существования по переменной x_1 получим дизъюнкцию произведений предикатов, множества переменных которых не пересекаются:

$$\begin{aligned}
\exists x_1(P) &= \bigvee_{l} P_1\left(x_1, \ldots, x_{k_1}, a_{li}\right) \wedge \ldots \\
&\wedge P_n\left(x_{k_{n-1}+1}, \ldots, x_{k_n}, a_{li}\right) = \\
&= \bigvee_{i} P_1^i\left(x_1, \ldots, x_{k_1}\right) \ldots P_n^i\left(x_{k_{n-1}+1}, \ldots, x_{k_n}\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

Исследуем возможность минимизации полученного предиката.

Утверждение 1. Пусть

$P = P_1(x_1, \ldots, x_{k_1}) \wedge \ldots \wedge P_n(x_{k_{n-1}+1}, \ldots, x_{k_n})$,

$G = G_1(x_1, \ldots, x_{k_1}) \wedge \ldots \wedge G_n(x_{k_{n-1}+1}, \ldots, x_{k_n})$.

Соотношение $P \supset G$ (8)

выполняется тогда и только тогда, когда $\forall i = \overline{1, n}$ верно $P_i \supset G_i$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $P_i \supset G_i \ \forall i = \overline{1,n}$, т.е. $G_i = P_i \vee \lambda_i$. Тогда $G = \underset{i}{\wedge} G_i = \underset{i}{\wedge}(P_i \vee \lambda_i) = = \underset{i}{\wedge} P_i \vee \underset{i,j}{\wedge} P_i G_j \vee \underset{i}{\wedge} \lambda_i = P \vee \Lambda$, значит, выполняется соотношение (8).

Достаточность. Пусть выполняется соотношение (8). Предположим $\exists k \in \{1...n\}$ такое, что $P_k \supset G_k$. Тогда, если предикат P_k содержит такую элементарную конъюнкцию C_k, что в предикате G_k она отсутствует, то, так как множества определения предикатов не пересекаются, то предикат G также не будет содержать C_k, в то время как в предикате P она присутствует. Очевидно, что соотношение (8) не выполняется, что противоречит допущению.

Следствие. Пусть предикат P удовлетворяет условию (6), то есть действие оператора $\exists x_1(P)$ определяется формулой (7). Тогда, если $\forall k = \overline{1,n} \ \ P_k^{i_1} \supset P_k^{i_2}$, то слагаемое i_2 упрощается и формула (7) минимизируется.

Утверждение 2. Пусть $P_q = a_{lq}(P), P_g = a_{lg}(P)$. Соотношение

$$P_q \supset P_g \qquad (9)$$

верно тогда и только тогда, когда для предиката P выполняется одно из следующих условий:

a_{lq} – смещающий, а a_{lg} – расширяющий оператор;

a_{lq} – сужающий, а a_{lg} – расширяющий оператор;

a_{lq} – сужающий, а a_{lg} – смещающий оператор.

Доказательство. *Необходимость.* Допустим, выполняется соотношение (9). Предположим, что a_{lq} – расширяющий оператор, а a_{lg} – сужающий. Тогда $a_{lq}(P) \supset P, a_{lg}(P) \subset P$, что противоречит условию (9). Предположим, что a_{lq} – расширяющий оператор, а a_{lg} – смещающий. Следовательно, в разбиении предиката P, соответствующем действию оператора a_{lq}, отсутствуют слагаемые третьего и четвертого классов, а в разбиении предиката P, соответствующем действию оператора a_{lg}, присутствуют слагаемые третьего или четвертого классов. Так как операторы подстановки a_{lq} и a_{lg} действуют по одной и той же переменной x_l, то предикат P содержит слагаемые вида $x_l^{a_{lq}} A_i$ и $x_l^{a_{lg}} B_j$, где $\underset{j}{\vee} B_j \supset \underset{i}{\vee} A_i$. Тогда $a_{lq}(P) = \underset{i}{\vee} A_i \vee C$; $a_{lg}(P) = = \underset{j}{\vee} B_j \vee C$, где C не зависит от переменной x_l. Следовательно, $P_g \supset P_q$, что противоречит допущению.

Предположим, что a_{lq} и a_{lg} – смещающие операторы. Тогда, проведя аналогичные рассуждения, видим, что A_i и B_j отличаются и условие (9) не выполняется.

Пусть a_{lq} – смещающий, а a_{lg} – сужающий оператор. Тогда в ДНФ предиката P нет элементарных конъюнкций, содержащих узнавание $x_l^{a_{lg}}$, и предикат P можно представить в виде:

$$P = \underset{m}{\vee} x_l^{a_{lq}} A_m \vee \underset{l}{\vee} B_l \vee C,$$

где B_l содержат узнавания переменной x_l, кроме $x_l^{a_{lg}}$ и $x_l^{a_{lq}}$, а C не содержит узнаваний этой переменной. Тогда $a_{lq}(P) = \underset{m}{\vee} A_m \vee C$, $a_{lg}(P) = \underset{m}{\vee} A_m \vee C$ и $a_{lg}(P) \supset a_{lq}(P)$, что противоречит допущению.

Если оба оператора сужающие или расширяющие, то действие их на предикат P одинаково.

Достаточность. Следует из первой части доказательства теоремы.

Пример 1. Пусть $P = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{31}} \vee x_1^{a_{12}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{33}} \vee x_1^{a_{12}} x_2^{a_{22}} x_3^{a_{33}}$. Тогда $a_{21}(P) = x_1^{a_{11}} x_3^{a_{31}} \vee x_1^{a_{12}} x_3^{a_{33}}$ – расширяющий оператор подстановки, а $a_{22}(P) = x_1^{a_{12}} x_3^{a_{33}}$ – смещающий и $a_{21}(P) \supset a_{22}(P)$.

Пусть $P = x_1^{a_{12}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{33}} \vee x_1^{a_{12}} x_2^{a_{22}} x_3^{a_{33}} \vee x_3^{a_{31}}$. Тогда $a_{11}(P) = x_3^{a_{31}}$ – сужающий оператор подстановки, а $a_{12}(P) = x_1^{a_{12}} x_3^{a_{33}} \vee x_2^{a_{22}} x_3^{a_{33}} \vee x_3^{a_{31}}$ – смещающий и $a_{11}(P) \supset a_{12}(P)$.

Пусть $P = x_1^{a_{11}} \vee x_1^{a_{12}} x_2^{a_{22}} x_3^{a_{31}} \vee x_1^{a_{12}} x_2^{a_{22}} x_3^{a_{33}}$. Тогда $a_{32}(P) = x_1^{a_{11}}$ – сужающий оператор подстановки, а $a_{31}(P) = x_1^{a_{11}} \vee x_1^{a_{12}} x_2^{a_{22}}$ – расширяющий и $a_{32}(P) \supset a_{31}(P)$.

Следствие 1. Если $\forall k = \overline{1,n}$ P_k имеют расширяющий оператор подстановки a_{ij}, то j-е слагаемое в дизъюнкции (поглощает все остальные.

Пусть $P = P_1(x_1, x_2, x_3) P_2(x_2, x_4) =$

$$= (x_1^{a_{11}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{31}} \vee x_1^{a_{13}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{33}} \vee x_1^{a_{13}} x_2^{a_{22}} x_3^{a_{33}}) \wedge$$
$$\wedge (x_2^{a_{21}} x_4^{a_{41}} \vee x_2^{a_{21}} x_4^{a_{42}} \vee x_2^{a_{22}} x_4^{a_{41}}).$$

Оператор a_{21} является расширяющим оператором подстановки для предикатов P_1 и P_2.

$$\exists x_2(P) = P_1(x_1, a_{21}, x_3) \wedge P_2(a_{21}, x_4) \vee$$
$$\vee P_1(x_1, a_{22}, x_3) \wedge P_2(a_{22}, x_4) =$$
$$= (x_1^{a_{11}} x_3^{a_{31}} \vee x_1^{a_{13}} x_3^{a_{33}})(x_4^{a_{41}} \vee x_4^{a_{42}}) \vee (x_1^{a_{13}} x_3^{a_{33}})(x_4^{a_{41}}).$$

Следствие 2. Если $\forall k = \overline{1,n}$ P_k имеют сужающий оператор подстановки a_{ij}, то j-е слагаемое в дизъюнкции (сокращается.

Пусть

$$P = P_1(x_1, x_2, x_3)P_2(x_2, x_4) = (x_1^{a_{11}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{31}} \vee$$

$$\vee x_1^{a_{12}} x_2^{a_{22}} x_3^{a_{33}} \vee x_2^{a_{22}} x_3^{a_{31}}) \wedge (x_2^{a_{21}} x_4^{a_{42}} \vee x_2^{a_{22}} x_4^{a_{41}} \vee x_4^{a_{43}}).$$

Оператор a_{23} является сужающим оператором подстановки для предикатов P_1 и P_2.

$$\exists x_2(P) = \bigvee_i P_1(x_1, a_{2i}, x_3)$$

$$\wedge P_2(a_{2i}, x_4) = (x_1^{a_{11}} x_3^{a_{31}} \vee x_2^{a_{22}} x_3^{a_{31}})(x_4^{a_{42}} \vee x_4^{a_{43}}) \vee$$

$$\vee (x_1^{a_{12}} x_3^{a_{33}} \vee x_2^{a_{22}} x_3^{a_{31}}) \wedge (x_4^{a_{41}} \vee x_4^{a_{43}}) \vee (x_2^{a_{22}} x_3^{a_{31}})(x_4^{a_{43}}).$$

Очевидно, третье слагаемое сокращается.

2. Метод исключения переменных из предикатов, представленных в виде дизъюнктивной и конъюнктивной нормальных форм

Далее рассмотрим некоторые виды предикатных уравнений, которые имеют структуру, позволяющую существенно упростить процесс исключения переменных из этих уравнений.

Допустим, имеется модель, представленная в виде системы уравнений, каждое из которых имеет вид ДНФ и все попарные конъюнкции правых частей уравнений равны нулю. Проверка данного условия означает, что нулю должны быть равны конъюнкции любых двух элементарных конъюнкций из различных уравнений, то есть они должны содержать различные узнавания одинаковых переменных. Тогда, приводя исходную систему к одному ((3)-(5)), получаем уравнение также в форме ДНФ. Обозначив G_{ij} i-ю дизъюнкцию в уравнении, соответствующем описанию j-го объекта предметной области, получим уравнение вида

$$P = \bigvee_{i,j} G_{ij}. \quad (10)$$

Тогда $\exists x_1(P) = \bigvee_{i,j}(G_{ij})$. Но применение кванторa $\exists x_1(G_{ij})$ оставляет G_{ij} без изменений, если G_{ij} не содержит переменную x_1. В противном случае, если $G_{ij} = x_1^{a_{lm}} \wedge \bigwedge_{q \in \{1...n\}} x_q$, то $\exists x_1(G_{ij}) = \bigwedge_{q \in \{1...n\}} x_q$.

Таким образом, применение квантора эквивалентно вычеркиванию узнавания данной переменной из элементарной конъюнкции. Из приведенных выше свойств следует, что в случае представления модели в виде ДНФ исключение переменных из уравнения (5) путем связывания их кванторами приводит к упрощению данного уравнения, так как не уменьшается (по крайней мере, не увеличивается) общее количество узнаваний.

Пусть модель имеет вид КНФ, в которой каждая элементарная дизъюнкция представляет собой унарный предикат. Предположим также, что выполняется требование (4), то есть все попарные конъюнкции правых частей этой модели равны нулю. Выполнение этого условия в данном случае означает, что для любой пары КНФ в правых частях уравнений верно следующее утверждение: найдутся две элементарные дизъюнкции, взятые из различных КНФ, перемножение которых дает нуль, что возможно тогда и только тогда, когда они содержат узнавания одинаковых переменных, множества которых не пересекаются. Тогда для решения лингвистических уравнений такого вида также можно применить метод связывания кванторами существования промежуточных переменных с щелью из исключения. После преобразования данной системы уравнений в одно получим выражение, которое представляет собой дизъюнкцию КНФ с элементарными дизъюнкциями в виде унарных предикатов, что существенно упрощает процесс исключения промежуточных переменных.

Обозначим через $D_{ij}(j = \overline{1,k})$ элементарные дизъюнкции в виде унарных предикатов, соответствующие описанию i-го объекта предметной области. Отметим, что связывание квантором переменной в дизъюнкции КНФ сводится к связыванию этой переменной в каждой из КНФ Φ_i, для которой верно следующее уравнение:

$$\Phi_i = \bigwedge_{i=1}^{k} D_{ij}.$$

Каждая ДНФ D_{ij} содержит дизъюнкции определенного числа предикатов узнавания, в основании которых находится x_j. С учетом принятых обозначений можно записать следующее уравнение:

$$\exists x_j \Phi_i = D_{i1} D_{i2} ... D_{i(j-1)} (\exists x_j D_{ij}) D_{i(j+1)} ... D_{ik} \equiv$$

$$\equiv D_{i1} D_{i2} ... D_{i(j-1)} D_{i(j+1)} ... D_{ik},$$

где $i = \overline{1,T}$, T – размер предметной области. Если КНФ Φ_i не содержит некоторой переменной x_c, то связывание этой переменной квантором существования оставляет Φ_i неизменной.

Таким образом, связывание промежуточных переменных квантором существования не приводит к увеличению числа узнаваний. В некоторых случаях связывание переменных квантором существования оставляет уравнение без изменения. Однако, как правило, применение описанного метода влечет за собой уменьшение количества узнаваний. Следовательно, использование квантора существования при решении лингвистических задач либо оставляет КНФ неизменной, либо из нее исключаются несколько элементарных дизъюнкций.

Запишем обобщенный алгоритм решения систем лингвистических уравнений относительно целевых переменных с заданными начальными условиями.

1) Проверить равенство нулю конъюнкции любых двух предикатов в правых частях уравнений.

2) Представить исходную систему в виде одного уравнения.

3) Подставить в полученное уравнение начальные значения выбранных переменных.

4) Исключить все переменные, кроме целевых, путем связывания их кванторами существования.

5) Множество значений целевых переменных, удовлетворяющих уравнению, полученному на предыдущем шаге, соответствует решению поставленной задачи. Зафиксировать это множество.

Приведем пример решения системы лингвистических уравнений, правые части которых представляют собой ДНФ. Пусть имеется система уравнений:

$$\begin{cases} y^A = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{32}} \vee x_1^{a_{12}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{31}} \vee x_1^{a_{13}} x_2^{a_{23}} \\ y^B = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{22}} \vee x_2^{a_{21}} x_3^{a_{31}} \\ y^C = x_1^{a_{11}} x_2^{21} x_3^{a_{32}} \vee x_1^{a_{12}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{32}}, \end{cases} \quad (11)$$

где $y = \{A, B, C\}$, $x_1 \in \{a_{11}, a_{12}, a_{13}\}$, $x_2 \in \{a_{21}, a_{22}, a_{23}\}$, $x_3 \in \{a_{31}, a_{32}, a_{33}\}$.

Требуется при начальном условии $x_2 = a_{21}$ найти значения целевого признака x_1.

Решим задачу пошагово в соответствии с алгоритмом.

1) Проверим равенство нулю конъюнкций правых частей уравнения.

$x_1^{a_{11}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{32}} \wedge x_1^{a_{11}} x_2^{a_{22}} = 0$, $x_1^{a_{12}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{33}} \wedge x_1^{a_{11}} x_2^{a_{22}} = 0$,

$x_1^{a_{13}} x_2^{a_{23}} \wedge x_1^{a_{11}} x_2^{a_{22}} = 0$,

$x_1^{a_{11}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{32}} \wedge x_2^{a_{21}} x_3^{a_{31}} = 0$,

$x_1^{a_{12}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{33}} \wedge x_2^{a_{21}} x_3^{a_{31}} = 0$, $x_1^{a_{13}} x_2^{a_{23}} \wedge x_2^{a_{21}} x_3^{a_{31}} = 0$.

Значит, конъюнкция правых частей первого и второго уравнений равна нулю. Далее,

$$x_1^{a_{11}} x_2^{a_{22}} \wedge x_1^{a_{11}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{32}} = 0,$$

$$x_2^{a_{21}} x_3^{a_{31}} \wedge x_1^{a_{11}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{32}} = 0,$$

$$x_1^{a_{11}} x_2^{a_{22}} \wedge x_1^{a_{12}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{32}} = 0,$$

$$x_2^{a_{21}} x_3^{a_{31}} \wedge x_1^{a_{12}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{32}} = 0,$$

то есть конъюнкция правых частей второго и третьего уравнений равна нулю. Аналогично, конъюнкция правых частей первого и третьего уравнений равна нулю.

2) Представим систему (11) в виде одного уравнения:

$$y^A \wedge (x_1^{a_{11}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{32}} \vee x_1^{a_{12}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{33}} \vee x_1^{a_{13}} x_2^{a_{23}}) \vee$$
$$\vee y^B \wedge (x_1^{a_{11}} x_2^{a_{22}} \vee x_2^{a_{21}} x_3^{a_{31}}) \vee y^C \wedge (x_1^{a_{11}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{32}} \vee$$
$$\vee x_1^{a_{12}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{32}}) = 1.$$

3) Подставим в полученное уравнение начальное значение переменной $x_2 = a_{21}$. Получим следующий результат:

$$y^A \wedge (x_1^{a_{11}} x_3^{a_{32}} \vee x_1^{a_{12}} x_3^{a_{33}}) \vee y^B \wedge (x_3^{a_{31}}) \vee$$
$$\vee y^C \wedge (x_1^{a_{11}} x_3^{a_{32}} \vee x_1^{a_{12}} x_3^{a_{32}}) = 1.$$

4) Используем кванторы существования для последовательного исключения из последнего уравнения переменных y и x_3.

$$\exists y (y^A \wedge (x_1^{a_{11}} x_3^{a_{32}} \vee x_1^{a_{12}} x_3^{a_{33}}) \vee y^B \wedge x_3^{a_{31}} \vee y^C \wedge$$
$$\wedge (x_1^{a_{11}} x_3^{a_{32}} \vee x_1^{a_{12}} x_3^{a_{32}})) = (x_1^{a_{11}} x_3^{a_{32}} \vee x_1^{a_{12}} x_3^{a_{33}}) \vee$$
$$\vee x_3^{a_{31}} \vee (x_1^{a_{11}} x_3^{a_{32}} \vee x_1^{a_{12}} x_3^{a_{32}}) = 1.$$

$$\exists x_3 \exists y (x_1^{a_{11}} x_3^{a_{32}} \vee x_1^{a_{12}} x_3^{a_{33}}) \vee x_3^{a_{31}} \vee \Big(x_1^{a_{11}} x_3^{a_{32}} \vee$$
$$\vee x_1^{a_{12}} x_3^{a_{32}} \Big) = (x_1^{a_{11}} \vee x_1^{a_{12}}) \vee 1 \vee (x_1^{a_{11}} \vee x_1^{a_{12}}) = 1.$$

Получаем тождество $1 = 1$. Это означает, что при данном начальном условии признак x_1 может принимать любое значение из области определения.

Приведем пример решения системы лингвистических уравнений, правые части которых представляют собой КНФ. Пусть имеется система уравнений:

$$\begin{cases} y^A = (x_1^{a_{11}} \vee x_1^{a_{12}})(x_2^{a_{21}} \vee x_2^{a_{23}}) x_3^{a_{31}} \\ y^B = (x_1^{a_{11}} \vee x_1^{a_{13}})(x_2^{a_{21}} \vee x_2^{a_{22}}) x_3^{a_{32}} \\ y^C = x_1^{a_{13}} x_2^{a_{23}}, \end{cases} \quad (12)$$

где $y = \{A, B, C\}$, $x_1 \in \{a_{11}, a_{12}, a_{13}\}$, $x_2 \in \{a_{21}, a_{22}, a_{23}\}$, $x_3 \in \{a_{31}, a_{32}, a_{33}\}$.

Требуется при начальном условии $x_3 = a_{31}$ найти значения целевого признака x_2.

Решение поставленной задачи проведем в соответствии с предложенным алгоритмом:

1) Проверим равенство нулю всех попарных конъюнкций правых частей уравнений (12). Конъюнкция правых частей первого и второго уравнений равна нулю, так как $x_3^{a_{31}} \wedge x_3^{a_{32}} = 0$. Конъюнкция правых частей первого и третьего уравнений равна нулю, так как $(x_1^{a_{11}} \vee x_1^{a_{12}}) \wedge x_1^{a_{13}} = 0$. Наконец, конъюнкция правых частей второго и третьего уравнений равна нулю, так как $(x_2^{a_{21}} \vee x_2^{a_{22}}) x_2^{a_{23}} = 0$.

2) Представим систему (12) в виде одного уравнения:

$$y^A (x_1^{a_{11}} \vee x_1^{a_{12}})(x_2^{a_{21}} \vee x_2^{a_{23}}) x_3^{a_{31}} \vee$$
$$\vee y^B (x_1^{a_{11}} \vee x_1^{a_{13}})(x_2^{a_{21}} \vee x_2^{a_{22}}) x_3^{a_{32}} \vee y^C x_1^{a_{13}} x_2^{a_{23}} = 1.$$

3) Подставим в полученное уравнение начальное значение переменной $x_3 = a_{31}$. Получим следующий результат:

$$y^A (x_1^{a_{11}} \vee x_1^{a_{12}})(x_2^{a_{21}} \vee x_2^{a_{23}}) \vee y^C x_1^{a_{13}} x_2^{a_{23}} = 1.$$

4) Используем кванторы существования для последовательного исключения из последнего уравнения переменных y и x_1.

$$\exists y (y^A (x_1^{a_{11}} \vee x_1^{a_{12}})(x_2^{a_{21}} \vee x_2^{a_{23}}) \vee y^C x_1^{a_{13}} x_2^{a_{23}}) =$$
$$= (x_1^{a_{11}} \vee x_1^{a_{12}})(x_2^{a_{21}} \vee x_2^{a_{23}}) \vee x_1^{a_{13}} x_2^{a_{23}} = 1,$$

$$\exists x_1 \exists y(x_1^{a_{11}} \vee x_1^{a_{12}})(x_2^{a_{21}} \vee x_2^{a_{23}}) \vee x_1^{a_{13}} x_2^{a_{23}} =$$
$$= (x_2^{a_{21}} \vee x_2^{a_{23}}) \vee x_2^{a_{23}} = 1.$$

Применение тождества алгебры конечных предикатов $a \vee a = a$ дает возможность получить следующее уравнение:

$$x_2^{a_{21}} \vee x_2^{a_{23}} = 1. \tag{13}$$

Из (13) непосредственно находится x_2:

$$x_2 \in \{a_{21}, a_{23}\}.$$

3. Метод исключения переменных из расщепляемых предикатов

Перейдем к рассмотрению класса задач, описываемых уравнениями, имеющими более сложную структуру. В книге [3] рассматривается задача о математическом описании морфологии русского языка, а также описан общий подход к решению этой проблемы, который иллюстрируется на примере решения задачи о математическом описании склонения имен существительных. Для однозначного задания первой буквы окончания основных словоформ субстантивного склонения (первая буква может принимать одно из значений {а, е, ё, и, о, у, ы, ю, я, _}) определен полный и несократимый набор признаков, который включает в себя следующие восемь: x_1 – падеж со значениями ***и, р, д, в, т, п*** (именительный, …, предложный); x_2 – род со значениями ***м, ж, с***; x_3 – число со значениями ***е*** и ***м***; x_4 – признак одушевленности со значениями ***о*** и ***н***; x_5 – признак ударности со значениями ***у*** и ***б***; x_6 – требование простановки знака над буквой *е* со значениями ***с*** и ***н***; x_7 – последняя буква основы словоформы со значениями ***а, б, в, г, д, е, ж, з, и, й, к, л, м, н, о, п, р, с, т, у, ф, х, ц, ч, ш, щ, ы, ю, я***; x_8 – вид основы словоформы со значениями ***т*** – твердый, ***м*** – мягкий.

Таким образом, постановка задачи сводится к тому, чтобы связать отношением

$$L(x_1, x_2, ..., x_8, y_1) = 1$$

первую букву окончания y_1 и восемь семантических признаков $x_1, x_2, ..., x_8$. Так как набор признаков является полным, данное уравнение задает некоторую функцию

$$y_1^{\sigma} = F_{\sigma}(x_1, x_2, ..., x_8). \tag{14}$$

Предикат F_{σ} записываются в виде формул алгебры конечных предикатов и задают всевозможные узнавания переменной y_1 из множества {а, е, ё, и, о, у, ы, ю, я, _}.

Проиллюстрируем на примере общую постановку задачи. Окончание начинается на букву ***я*** в словоформах с мягкой основой, оканчивающейся на ***б, в, д, ж, л, м, н, п, р, с , т, ф***, и с основой, оканчивающейся на ***а, е, и, й, о, у, ы, ю, я***, 1) при единственном числе а) в именительном падеже с женским родом, б) в родительном падеже с мужским и средним родом и одушевленностью, 2) при множественном числе а) в именительном падеже и в винительном падеже с неодушевленностью при среднем роде, б) в дательном, творительном и предложном падежах. Данные правила записываются с помощью формул АКП следующим образом:

$$y_1^{я} = (x_8^{м}(x_7^{б} \vee x_7^{в} \vee x_7^{д} \vee x_7^{з} \vee x_7^{л} \vee x_7^{м} \vee x_7^{н} \vee$$
$$\vee x_7^{п} \vee x_7^{р} \vee x_7^{с} \vee x_7^{т} \vee x_7^{ф}) \vee x_7^{а} \vee x_7^{е} \vee x_7^{и} \vee x_7^{й} \vee x_7^{о} \vee$$
$$\vee x_7^{у} \vee x_7^{ы} \vee x_7^{ю} \vee x_7^{я}) \wedge x_3^{е}(x_1^{и} x_2^{ж} \vee x_1^{р}(x_2^{м} \vee x_2^{с}) \vee$$
$$\vee x_1^{в} x_2^{м} x_4^{о}) \vee x_3^{м}((x_1^{и} \vee x_1^{в} x_4^{н}) x_2^{с} \vee x_1^{д} \vee x_1^{т} \vee x_1^{п})).$$

Из приведенного примера и способа построения уравнения можно проследить следующую его структуру: каждое слагаемое данного предиката состоит из сомножителей, области переменных которых не пересекаются, причем каждый из этих сомножителей имеет либо вид дизъюнктивной нормальной формы, либо ту же структуру, что и весь предикат, т.е. его можно разбить на слагаемые, которые в свою очередь состоят также из сомножителей, области переменных которых не пересекаются. Математически можем записать предикат F_{σ} в виде

$$F_{\sigma} = A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n, \tag{15}$$

где каждый из предикатов A_i, $i = \overline{1, n}$ имеет вид:

$$A_i = A_i^1(x_1, ..., x_{k_1}) \wedge A_i^2(x_{k_1+1}, ..., x_{k_2}) \wedge ...$$
$$\wedge A_i^l(x_{k_{l-1}+1}, ..., x_{k_l}). \tag{16}$$

Предикаты A_i^j, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, l}$ имеют либо вид ДНФ, либо могут быть разложены по формулам (15), (16). Такие предикаты будем называть *расщепляемыми.*

Указанное свойство предикатов значительно упрощает процедуру исключения переменных, при применении которой будем использовать следующие свойства квантора существования:

1) свойство аддитивности, т.е.

$$\exists x_i (A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_k) = \exists x_i A_1 \vee \exists x_i A_2 \vee ... \vee \exists x_i A_k;$$

2) применение квантора существования к конъюнкции предикатов, из которых лишь один зависит от данной переменной, тождественно применению этого квантора к данному предикату, в то время, как остальные остаются без изменения:

$$\exists x_i (A_1(x_1, ..., x_{k_1}) \wedge ... \wedge A_l(x_{k_{l-1}+1}, ... x_i, ..., x_{k_l}) \wedge ...$$
$$\wedge A_n(x_{k_{n-1}+1}, ..., x_{k_n})) =$$
$$= (A_1(x_1, ..., x_{k_1}) \wedge ... \wedge A_n(x_{k_{n-1}+1}, ..., x_{k_n})) \wedge$$
$$\wedge \exists x_i A_l(x_{k_{l-1}+1}, ... x_i, ..., x_{k_l}).$$

Таким образом, благодаря описанной структуре расщепляемых предикатов и указанным свойствам квантора существования, алгоритм исключения переменных значительно упрощается и состоит в следующем:

Шаг 1. Разбиваем исходный предикат на слагаемые.

Шаг 2. Каждое из полученных слагаемых разделяем на сомножители.

Шаг 3. Из полученных сомножителей выбираем тот, который зависит от исключаемой переменной.

Шаг 4. Если этот сомножитель имеет вид дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ), то производим исключение переменной из данного сомножителя. Этот процесс сводится к выполнению следующих операций:

a) находим узнавание данной переменной в каждой элементарной конъюнкции ДНФ;

b) если элементарная конъюнкция состоит только лишь из узнавания данной переменной, то вся ДНФ обращается в единицу;

c) в противном случае производим замену данного узнавания на единицу, что тождественно простому вычеркиванию узнавания из элементарной конъюнкции.

Шаг 5. Если сомножитель представлен не в виде ДНФ, а имеет сложную структуру, то выполняем для него все действия, начиная с шага 1.

Проиллюстрируем на примере действие данного алгоритма. Пусть

$$P = (x_8^{\text{м}}(x_7^{\text{б}} \vee x_7^{\text{в}} \vee x_7^{\text{д}} \vee x_7^{\text{з}} \vee x_7^{\text{л}} \vee x_7^{\text{м}} \vee x_7^{\text{н}} \vee x_7^{\text{п}} \vee x_7^{\text{р}} \vee$$
$$\vee x_7^{\text{с}} \vee x_7^{\text{т}} \vee x_7^{\text{ф}}) \vee x_7^{\text{а}} \vee x_7^{\text{е}} \vee x_7^{\text{и}} \vee x_7^{\text{й}} \vee x_7^{\text{о}} \vee x_7^{\text{у}} \vee x_7^{\text{ы}} \vee$$
$$\vee x_7^{\text{ю}} \vee x_7^{\text{я}}) \wedge x_3^{\text{е}}(x_1^{\text{и}} x_2^{\text{ж}} \vee x_1^{\text{р}}(x_2^{\text{м}} \vee x_2^{\text{с}}) \vee x_1^{\text{в}} x_2^{\text{м}} x_4^{\text{о}}) \vee$$
$$\vee x_3^{\text{м}}((x_1^{\text{и}} \vee x_1^{\text{в}} x_4^{\text{н}}) x_2^{\text{с}} \vee x_1^{\text{д}} \vee x_1^{\text{т}} \vee x_1^{\text{п}})).$$

Найдем $\exists x_2(P)$.

1) Выделим в предикате P все слагаемые (в данном примере имеем одно слагаемое)

$$(x_8^{\text{м}}(x_7^{\text{б}} \vee x_7^{\text{в}} \vee x_7^{\text{д}} \vee x_7^{\text{з}} \vee x_7^{\text{л}} \vee x_7^{\text{м}} \vee x_7^{\text{н}} \vee x_7^{\text{п}} \vee$$
$$\vee x_7^{\text{р}} \vee x_7^{\text{с}} \vee x_7^{\text{т}} \vee x_7^{\text{ф}}) \vee x_7^{\text{а}} \vee x_7^{\text{е}} \vee x_7^{\text{и}} \vee x_7^{\text{й}} \vee x_7^{\text{о}} \vee$$
$$\vee x_7^{\text{у}} \vee x_7^{\text{ы}} \vee x_7^{\text{ю}} \vee x_7^{\text{я}}) \wedge x_3^{\text{е}}(x_1^{\text{и}} x_2^{\text{ж}} \vee x_1^{\text{р}}(x_2^{\text{м}} \vee x_2^{\text{с}}) \vee$$
$$\vee x_1^{\text{в}} x_2^{\text{м}} x_4^{\text{о}}) \vee x_3^{\text{м}}((x_1^{\text{и}} \vee x_1^{\text{в}} x_4^{\text{н}}) x_2^{\text{с}} \vee x_1^{\text{д}} \vee x_1^{\text{т}} \vee x_1^{\text{п}})).$$

2) В этом слагаемом выделим сомножители:

$$(x_8^{\text{м}}(x_7^{\text{б}} \vee x_7^{\text{в}} \vee x_7^{\text{д}} \vee x_7^{\text{з}} \vee x_7^{\text{л}} \vee x_7^{\text{м}} \vee x_7^{\text{н}} \vee x_7^{\text{п}} \vee x_7^{\text{р}} \vee$$
$$\vee x_7^{\text{с}} \vee x_7^{\text{т}} \vee x_7^{\text{ф}}) \vee x_7^{\text{а}} \vee x_7^{\text{е}} \vee x_7^{\text{и}} \vee x_7^{\text{й}} \vee x_7^{\text{о}} \vee x_7^{\text{у}} \vee x_7^{\text{ы}} \vee$$
$$\vee x_7^{\text{ю}} \vee x_7^{\text{я}}) \quad (x_3^{\text{е}}(x_1^{\text{и}} x_2^{\text{ж}} \vee x_1^{\text{р}}(x_2^{\text{м}} \vee x_2^{\text{с}}) \vee x_1^{\text{в}} x_2^{\text{м}} x_4^{\text{о}}) \vee$$
$$\vee x_3^{\text{м}}((x_1^{\text{и}} \vee x_1^{\text{в}} x_4^{\text{н}}) x_2^{\text{с}} \vee x_1^{\text{д}} \vee x_1^{\text{т}} \vee x_1^{\text{п}})).$$

3) Очевидно, лишь второй сомножитель зависит от x_2. Он имеет сложную структуру, поэтому разделим его в свою очередь на слагаемые:

$$x_3^{\text{е}}(x_1^{\text{и}} x_2^{\text{ж}} \vee x_1^{\text{р}}(x_2^{\text{м}} \vee x_2^{\text{с}}) \vee x_1^{\text{в}} x_2^{\text{м}} x_4^{\text{о}}),$$
$$x_3^{\text{м}}((x_1^{\text{и}} \vee x_1^{\text{в}} x_4^{\text{н}}) x_2^{\text{с}} \vee x_1^{\text{д}} \vee x_1^{\text{т}} \vee x_1^{\text{п}}).$$

4) Разделим слагаемые на сомножители:

1.1) $x_3^{\text{е}}$;

1.2) $(x_1^{\text{и}} x_2^{\text{ж}} \vee x_1^{\text{р}}(x_2^{\text{м}} \vee x_2^{\text{с}}) \vee x_1^{\text{в}} x_2^{\text{м}} x_4^{\text{о}})$;

2.1) $x_3^{\text{м}}$;

2.2) $((x_1^{\text{и}} \vee x_1^{\text{в}} x_4^{\text{н}}) x_2^{\text{с}} \vee x_1^{\text{д}} \vee x_1^{\text{т}} \vee x_1^{\text{п}})$.

5) От переменной x_2 не зависят сомножители 1.2 и 2.2. Разделим их на слагаемые:

1.2.1) $x_1^{\text{и}} x_2^{\text{ж}}$;

1.2.2) $x_1^{\text{р}}(x_2^{\text{м}} \vee x_2^{\text{с}})$;

1.2.3) $x_1^{\text{в}} x_2^{\text{м}} x_4^{\text{о}}$;

2.2.1) $(x_1^{\text{и}} \vee x_1^{\text{в}} x_4^{\text{н}}) x_2^{\text{с}}$;

2.2.2) $x_1^{\text{д}} \vee x_1^{\text{т}} \vee x_1^{\text{п}}$.

6) Слагаемые 1.2.1, 1.2.3 имеют вид ДНФ. Применяя операцию $\exists x_2(P)$, получим

1.2.1) $\exists x_2(x_1^{\text{и}} x_2^{\text{ж}}) = x_1^{\text{и}}$;

1.2.3) $\exists x_2(x_1^{\text{в}} x_2^{\text{м}} x_4^{\text{о}}) = x_1^{\text{в}} x_4^{\text{о}}$.

7) Слагаемые 1.2.2 и 2.2.1 делим на сомножители:

1.2.2.1) $x_1^{\text{р}}$;

1.2.2.2) $(x_2^{\text{м}} \vee x_2^{\text{с}})$;

2.2.1.1) $(x_1^{\text{и}} \vee x_1^{\text{в}} x_4^{\text{н}})$;

2.2.1.2) $x_2^{\text{с}}$.

8) Применяем операцию $\exists x_2$:

1.2.2.2) $\exists x_2\ (x_2^{\text{м}} \vee x_2^{\text{с}}) = 1$;

2.2.1.2) $\exists x_2\ (x_2^{\text{с}}) = 1$.

9) Принимая во внимание то, что все остальные сомножители и слагаемые остались без изменения, получим результат в следующем виде

$$\exists x_2(P) = (x_8^{\text{м}}(x_7^{\text{б}} \vee x_7^{\text{в}} \vee x_7^{\text{д}} \vee x_7^{\text{з}} \vee x_7^{\text{л}} \vee x_7^{\text{м}} \vee x_7^{\text{н}} \vee x_7^{\text{п}} \vee$$
$$\vee x_7^{\text{р}} \vee x_7^{\text{с}} \vee x_7^{\text{т}} \vee x_7^{\text{ф}}) \vee x_7^{\text{а}} \vee x_7^{\text{е}} \vee x_7^{\text{и}} \vee x_7^{\text{й}} \vee x_7^{\text{о}} \vee$$
$$\vee x_7^{\text{у}} \vee x_7^{\text{ы}} \vee x_7^{\text{ю}} \vee x_7^{\text{я}}) \wedge x_3^{\text{е}}(x_1^{\text{и}} \vee x_1^{\text{р}} \vee x_1^{\text{в}} x_4^{\text{о}}) \vee$$
$$\vee x_3^{\text{м}}((x_1^{\text{и}} \vee x_1^{\text{в}} x_4^{\text{н}}) \vee x_1^{\text{д}} \vee x_1^{\text{т}} \vee x_1^{\text{п}})).$$

Очевидно, что исключение переменных из расщепляемых предикатов ведет к упрощению их структуры.

Итак, обобщенный алгоритм нахождения набора значений целевых переменных при заданных начальных условиях из системы уравнений вида (3), где предикаты, стоящие в правой части, являются расщепляемыми, сводится к выполнению следующей последовательности шагов:

Шаг 1. Проверяем корректность записи модели, то есть выполнение условия (4) для правых частей уравнений системы.

Шаг 2. Приводим систему уравнений к одному уравнению по формуле (5).

Шаг 3. Подставляем начальные условия.

Шаг 4. Исключаем промежуточные переменные путем связывания их кванторами существования, используя алгоритм, приведенный выше.

Шаг 5. Находим значения целевых переменных, удовлетворяющие полученному уравнению.

Приведем пример. Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} y_1^{ы} = (x_8^{т}(x_7^{б} \vee x_7^{в} \vee x_7^{д} \vee x_7^{з} \vee x_7^{л} \vee x_7^{м} \vee x_7^{н} \vee \\ \vee x_7^{п} \vee x_7^{р} \vee x_7^{с} \vee x_7^{т} \vee x_7^{ф}) \vee x_7^{ц}) \\ \wedge(x_3^{е}x_1^{р}x_2^{ж} \vee x_3^{м}(x_1^{и} \vee x_1^{в}x_4^{н})(x_2^{м} \vee x_2^{ж})) \\ y_1^{ю} = (x_8^{м}(x_7^{б} \vee x_7^{в} \vee x_7^{д} \vee x_7^{з} \vee x_7^{л} \vee x_7^{м} \vee x_7^{н} \vee x_7^{п} \vee \\ x_7^{р} \vee x_7^{с} \vee x_7^{т} \vee x_7^{ф}) \vee x_7^{а} \vee x_7^{е} \vee x_7^{и} \vee x_7^{й} \vee x_7^{о} \vee \\ \vee x_7^{у} \vee x_7^{ы} \vee x_7^{ю} \vee x_7^{я}) \wedge x_3^{е}(x_1^{д}(x_2^{м} \vee x_2^{с}) \vee x_1^{в}x_2^{ж}) \end{cases}$$

Найдем значение целевой переменной x_2 при начальных условиях: 1) $x_3 = е$; 2) $x_1 = в$.

Убеждаемся в корректности записи модели и преобразуем данную систему уравнений в одно:

$$(y_1^{ы}) \wedge ((x_8^{т}(x_7^{б} \vee x_7^{в} \vee x_7^{д} \vee x_7^{з} \vee x_7^{л} \vee x_7^{м} \vee x_7^{н} \vee$$
$$\vee x_7^{п} \vee x_7^{р} \vee x_7^{с} \vee x_7^{т} \vee x_7^{ф}) \vee x_7^{ц}) \wedge$$
$$\wedge(x_3^{е}x_1^{р}x_2^{ж} \vee x_3^{м}(x_1^{и} \vee x_1^{в}x_4^{н})(x_2^{м} \vee x_2^{ж}))) \vee$$
$$\vee(y_1^{ю}) \wedge ((x_8^{м}(x_7^{б} \vee x_7^{в} \vee x_7^{д} \vee x_7^{з} \vee x_7^{л} \vee x_7^{м} \vee x_7^{н} \vee x_7^{п} \vee$$
$$\vee x_7^{р} \vee x_7^{с} \vee x_7^{т} \vee x_7^{ф}) \vee x_7^{а} \vee x_7^{е} \vee x_7^{и} \vee x_7^{й} \vee x_7^{о} \vee$$
$$\vee x_7^{у} \vee x_7^{ы} \vee x_7^{ю} \vee x_7^{я}) \wedge x_3^{е}(x_1^{д}(x_2^{м} \vee x_2^{с}) \vee x_1^{в}x_2^{ж})) = 1.$$

Подставляем начальные условия, получаем:

$$(y_1^{ю}) \wedge ((x_8^{м}(x_7^{б} \vee x_7^{в} \vee x_7^{д} \vee x_7^{з} \vee x_7^{л} \vee x_7^{м} \vee x_7^{н} \vee$$
$$\vee x_7^{п} \vee x_7^{р} \vee x_7^{с} \vee x_7^{т} \vee x_7^{ф}) \vee x_7^{а} \vee x_7^{е} \vee x_7^{и} \vee x_7^{й} \vee$$
$$\vee x_7^{о} \vee x_7^{у} \vee x_7^{ы} \vee x_7^{ю} \vee x_7^{я}) \wedge (x_2^{ж})) = 1.$$

Исключаем все промежуточные переменные, то есть переменные y_1, x_7, x_8:

$$\exists y((y_1^{ю}) \wedge ((x_8^{м}(x_7^{б} \vee x_7^{в} \vee x_7^{д} \vee x_7^{з} \vee x_7^{л} \vee$$
$$\vee x_7^{м} \vee x_7^{н} \vee x_7^{п} \vee x_7^{р} \vee x_7^{с} \vee x_7^{т} \vee x_7^{ф}) \vee x_7^{а} \vee x_7^{е} \vee$$
$$\vee x_7^{и} \vee x_7^{й} \vee x_7^{о} \vee x_7^{у} \vee x_7^{ы} \vee x_7^{ю} \vee x_7^{я}) \wedge (x_2^{ж}))) =$$
$$= ((x_8^{м}(x_7^{б} \vee x_7^{в} \vee x_7^{д} \vee x_7^{з} \vee x_7^{л} \vee x_7^{м} \vee x_7^{н} \vee x_7^{п} \vee$$
$$\vee x_7^{р} \vee x_7^{с} \vee x_7^{т} \vee x_7^{ф}) \vee x_7^{а} \vee x_7^{е} \vee x_7^{и} \vee x_7^{й} \vee$$
$$\vee x_7^{о} \vee x_7^{у} \vee x_7^{ы} \vee x_7^{ю} \vee x_7^{я}) \wedge (x_2^{ж})) = 1.$$

$$\exists x_7(((x_8^{м}(x_7^{б} \vee x_7^{в} \vee x_7^{д} \vee x_7^{з} \vee x_7^{л} \vee x_7^{м} \vee x_7^{н} \vee x_7^{п} \vee$$
$$\vee x_7^{р} \vee x_7^{с} \vee x_7^{т} \vee x_7^{ф}) \vee x_7^{а} \vee x_7^{е} \vee x_7^{и} \vee x_7^{й} \vee x_7^{о} \vee$$
$$\vee x_7^{у} \vee x_7^{ы} \vee x_7^{ю} \vee x_7^{я}) \wedge (x_2^{ж}))) = ((x_8^{м}) \wedge (x_2^{ж})) = 1.$$

$$\exists x_8((x_8^{м}) \wedge (x_2^{ж})) = (x_2^{ж}) = 1.$$

Получаем уравнение $x_2^{ж} = 1$. Значит, при данных начальных условиях переменная x_2 принимает значение $\{ж\}$.

Заключение

Уравнения алгебры конечных предикатов позволяют оперировать с произвольными признаковыми переменными, определенными на конечных множествах. Для построения логических выводов в базах знаний с целью расширения возможностей методов распознавания объектов следует использовать такие уравнения. Метод исключения переменных позволяет определить силу взаимного влияния дискретных признаков и тесноту их связи. Таким образом, разработанные методы исключения переменных из предикатов различной структуры имеют большое значение для исследований в данном направлении.

Список литературы

1. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Теория интеллекта. Матем. средства / Ю.П. Шабанов-Кушнаренко. – Х., 1984. – 144 с.*
2. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Теория интеллекта. Техн. средства / Ю.П. Шабанов-Кушнаренко. – Х., 1986. – 176 с.*
3. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Теория интеллекта. Проблемы и перспективы / Ю.П. Шабанов-Кушнаренко. – Х., 1987. – 210 с.*
4. *Бондаренко М.Ф. Применение подстановочных операций к предикатам, представленным формулами алгебры логики предикатов / М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Д.Э. Ситников, П.Э. Ситникова, А.И. Коваленко // Біоніка інтелекту. – 2012. – № 1 978). – С. 3 – 12.*
5. *Бондаренко М.Ф. Свойства подстановочных операций, применяемых к формуле алгебры конечных предикатов / М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Д.Э. Ситников, П.Э. Ситникова, С.А. Марьин // Системи управління, навігації та зв'язку. – К.:ЦНДІ НіУ, 2012. – Вип. 1(21), том 2. – С. 174 – 182..*

Поступила в редколлегию 1.03.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.Ф. Чалый, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

МЕТОДИ ВИКЛЮЧЕННЯ ЗМІННИХ ІЗ ПРЕДИКАТІВ, ПРЕДСТАВЛЕНИХ РІЗНИМИ ФОРМУЛАМИ АЛГЕБРИ СКІНЧЕННИХ ПРЕДИКАТІВ

М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Д.Е. Ситніков, П.Е. Ситнікова

Описано загальний метод виключення змінних. Розроблено методи виключення змінних із предикатів, представлених у вигляді кон'юнктивної і диз'юнктивної нормальних форм. Введено поняття рівнянь, що розщеплюються. Розроблено метод виключення змінних з рівнянь, що розщеплюються, і покроковий алгоритм його реалізації.

Ключові слова: *підстановочна операція, виключення змінних, предикат, що розщеплюється.*

METHODS FOR VARIABLES ELIMINATION FROM PREDICATES REPRESENTED BY FINITE PREDICATES ALGEBRA FORMULAE

M.F. Bondarenko, S.Yu. Shabanov-Kushnarenko, D.E. Sytnikov, P.E. Sytnikova

The general method of variables exception is described. Methods of variables exception from the predicates presented in the form of conjunctive and disjunctive normal forms are developed. The concept of the split equations is entered. The method of variables exception from the split equations and step-by-step algorithm of its realization is developed.

Keywords: *substitution operation, exception of the variables, split predicate.*