

УДК 519.81:681.51

А.С. Мазманишвили, Т.Е. Александрова

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

## СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТОВ БРОНЕТАНКОВОЙ ТЕХНИКИ

Рассмотрена задача моделирования случайных поверхностей движения объектов бронетанковой техники. Показано, что такая поверхность представляет собой нормальное марковское двумерное поле, любое ортогональное сечение которого представляет собой стационарный процесс Орнштейна-Уленбека.

**Ключевые слова:** случайная поверхность движения, объект бронетанковой техники, нормальное марковское двумерное поле.

### Литературный обзор и постановка задачи

Для оценки подвижности колесных и гусеничных объектов бронетанковой техники (ОБТ) широко используется математическое моделирование движения ОБТ в различных дорожных условиях и по пересеченной местности. В работах Н. И. Груздева [1], С. С. Бузова [2], В. А. Балдина [3], А. А. Дмитриева [4], Н. А. Забавникова [5], В. П. Аврамова [8], В. П. Писарева [9], В. В. Душенко [10] рассматривается возмущенное прямолинейное движение ОБТ по поверхности синусоидального профиля, при этом основной упор делается на исследование резонансных явлений, в которых возмущения, действующие на подрессоренную часть ОБТ, достигают максимума.

В работах А. А. Силаева [11], А. Н. Туренко и Н. Я. Говорущенко [12], Е. Е. Александрова [13] рассматриваются задачи стохастического моделирования поверхности движения колесных и гусеничных ОБТ в их прямолинейном движении. В этих работах получены значения коэффициентов корреляции для различных дорожных условий (асфальтобетон, мостовая, грунтовая дорога, пересеченная местность) в предположении, что профиль поверхности движения под правым и левым бортами ОБТ одинаков.

В работе [14] авторами рассмотрена задача стохастического моделирования поверхности движения ОБТ при различных профилях поверхности по правому и левому бортам. Однако в рассмотренной задаче эти профили предполагаются некоррелированными, а движение ОБТ прямолинейным.

При рассмотрении криволинейного движения ОБТ необходимо решить задачу пространственного моделирования двумерного поля на плоской поверхности с заданными стохастическими характеристиками. Из всего многообразия возможных вариантов и моделей двумерных случайных поверхностей при отсутствии дополнительных априорных факто-

ров нормальное марковское двумерное поле (НМД-поле)  $H(x, y)$  является наиболее предпочтительным, поскольку является удобным объектом анализа, и любое его ортогональное сечение является стационарным процессом Орнштейна-Уленбека [15].

### Описание движения ОБТ на плоскости

Рассмотрим три системы координат, представленные на рис. 1: неподвижную  $oxy$ ; подвижную  $o_n x_n y_n$ , начало которой связано с центром масс ОБТ, а оси параллельны осям неподвижной системы; связанную  $o_c x_c y_c$ , начало которой связано с центром масс ОБТ, а оси  $o_c x_c$  и  $o_c y_c$  совпадают с главными центральными осями инерции ОБТ.

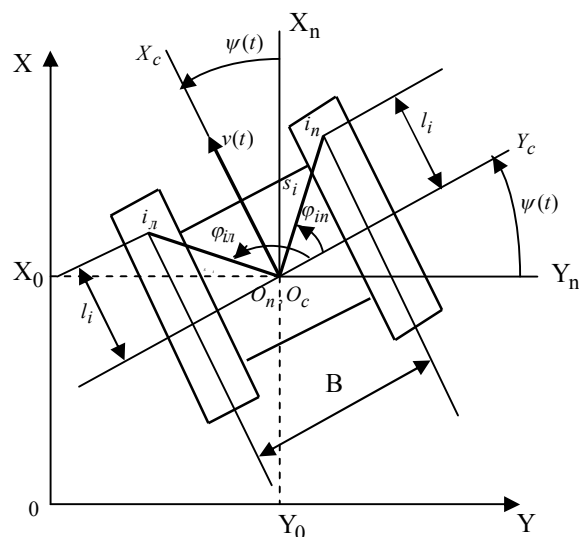


Рис. 1. Системы координат:  $oxy$  – неподвижная;  $o_n x_n y_n$  – подвижная;  $o_c x_c y_c$  – связанная;  $l_i$  – расстояние точки контакта  $i$ -го опорного катка от поперечной связанной оси ОБТ;  $S_i$  – расстояние в горизонтальной плоскости от центра масс ОБТ до точки контакта  $i$ -го опорного катка;  $B$  – ширина колеи ОБТ

Координаты точек контактов опорных катков ОБТ с поверхностью грунта обозначим  $x_{in}, y_{in}$  по правому борту и  $x_{il}, y_{il}$  по левому борту ОБТ, где  $i$  – номер опорного катка при начале отсчета от переднего катка. Расстояния  $l_i$  в горизонтальной плоскости от точки контакта  $i$ -го опорного катка до поперечной связанной оси  $ou_c$  положительно для опорных катков, расположенных впереди центра масс, и отрицательно для опорных катков, расположенных позади центра масс ОБТ. Расстояние  $S_i$  в горизонтальной плоскости от центра масс ОБТ до точки контакта  $i$ -го опорного катка с грунтом определяется соотношением

$$S_i = \sqrt{\frac{B^2}{4} + l_i^2}, \quad (i = \overline{1, n}), \quad (1)$$

где  $n$  – число опорных катков по одному из бортов ОБТ, а углы  $\varphi_{in}$  и  $\varphi_{il}$  в горизонтальной плоскости составляют:

$$\varphi_{in} = \arctg \frac{2l_i}{B}; \quad \varphi_{il} = \pi - \arctg \frac{2l_i}{B}, \quad (i = \overline{1, n}). \quad (2)$$

Криволинейное движение ОБТ характеризуется текущей скоростью движения центра масс  $v(t)$  и текущим углом поворота корпуса ОБТ относительно вертикальной оси  $\psi(t)$ . Текущий радиус поворота ОБТ при этом определяется формулой

$$R(t) = \frac{v(t)}{\dot{\psi}(t)},$$

а координаты центра масс изменяются в соответствии с формулами:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t) \cos \psi(t) dt, \quad (3)$$

$$y(t) = y_0 - \int_0^t v(t) \sin \psi(t) dt, \quad (4)$$

где  $x_0, y_0$  – координаты начальной точки отсчета.

Из рассмотрения рис. 1 можно записать соотношения для текущих координат точек контакта опорных катков правого и левого бортов в процессе криволинейного движения ОБТ:

$$x_{in}(t) = x(t) + S_i \sin \left[ \psi(t) + \arctg \frac{2l_i}{B} \right], \quad (i = \overline{1, n}); \quad (5)$$

$$y_{in}(t) = y(t) + S_i \cos \left[ \psi(t) + \arctg \frac{2l_i}{B} \right], \quad (i = \overline{1, n}); \quad (6)$$

$$x_{il}(t) = x(t) + S_i \cos \left[ \psi(t) + \pi - \arctg \frac{2l_i}{B} \right], \quad (i = \overline{1, n}); \quad (7)$$

$$y_{il}(t) = y(t) + S_i \sin \left[ \psi(t) + \pi - \arctg \frac{2l_i}{B} \right], \quad (i = \overline{1, n}). \quad (8)$$

Поверхность грунта, по которому происходит криволинейное движение ОБТ, характеризуется пространственными неровностями, иными словами, представляют собой искомое поле  $H(x, y)$ , которое в

каждой фиксированной точке  $(x^*, y^*)$  характеризует- ся высотой неровности  $h(x^*, y^*)$

Определяющим свойством рассматриваемого нормального марковского двумерного поля является его корреляционный функционал

$$K_{xy} = K_{xy}(x, y | x', y') = M[H(x, y)H(x', y')] = \rho q \sigma^2, \quad (9)$$

с парциальными корреляторами

$$\rho = \exp(-v_x |x - x'|), \quad q = \exp(-v_y |y - y'|), \quad (10)$$

где  $h = h(x, y)$  – реализация гауссового двумерного поля  $H(x, y)$  на плоскости  $хоу$  в прямоугольной области  $\{x \in [0, a], y \in [0, b]\}$ ;  $\sigma^2 = M[H^2(x, y)]$  – интенсивность НМД-поля,  $v_x$  и  $v_y$  – декременты затухания поля по оси  $x$  и  $y$  соответственно.

Переходная плотность распределения вероятностей для амплитуды  $h(x, y)$  НМД-поля  $H(x, y)$  определяется формулой

$$f_H(h(x, y) | h(x', y), h(x, y'), h(x', y')) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p^2)(1-q^2)\sigma^2}} \exp\{-Q[h(x, y)]\}, \quad (11)$$

где  $Q[h(x, y)]$  – квадратичная форма относительно полевых переменных

$$Q(x, y) = \frac{[h(x, y) - \rho h(x', y) - q h(x, y') + \rho q h(x', y')]^2}{2(1-p^2)(1-q^2)\sigma^2}.$$

Устремляя  $x' \rightarrow -\infty$  или  $y' \rightarrow -\infty$ , получим граничные переходные плотности распределения вероятностей

$$f_H(h(x, y) | h(x', y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p^2)\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{[h(x, y) - \rho h(x', y)]^2}{2(1-p^2)\sigma^2}\right\}, \quad (12)$$

$$f_H(h(x, y) | h(x, y')) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-q^2)\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{[h(x, y) - q h(x, y')]^2}{2(1-q^2)\sigma^2}\right\}, \quad (13)$$

которые служат переходными плотностями для парциальных процессов, а при  $x' \rightarrow -\infty$  или  $y' \rightarrow -\infty$  получим вершинную плотность распределения вероятностей равновесного вида

$$f_H(h(x, y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{[h(x, y)]^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (14)$$

для случайной величины – реализации  $h = h(x, y)$  поля  $H(x, y)$  в точке с координатами  $(x, y)$ , и поэтому из соотношений (10) – (14) следует корреляционная функция (9).

Из явного вида квадратичной формы  $Q(x, y)$  в формуле (11) для переходной плотности  $f_H(h(x, y) | h(x', y), h(x, y'), h(x', y'))$  поля  $H(x, y)$

можно видеть, что статистическая зависимость в выбранной точке  $(x, y)$  связана со значениями в точках  $(x', y)$ ,  $(x, y')$ , параллельных осям координат, а также и со значением в точке  $(x', y')$ , находящейся в четвертой вершине прямоугольника с вершинами  $((x, y); (x', y); (x, y'); (x', y'))$ . Таким образом, переходная плотность позволяет учесть корреляции значений нормального поля первого порядка  $H(x, y)$  по переменной  $x$ , переменной  $y$ , а также их совместные корреляции.

### Генерация НМД-поля первого и второго порядков

Случайное НМД-поле первого порядка  $H_1(x, y)$  в прямоугольнике  $\{x \in [0, a], y \in [0, b]\}$  можно описать уравнением Ланжевена для процесса Орнштейна-Уленбека [16]

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + v_x\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + v_y\right)h(x, y) = \sigma u(x, y), \quad (15)$$

где  $u(x, y)$  – случайное поле, обладающее свойствами гауссовского двумерного “белого шума” единичной интенсивности,  $v_x, v_y$  – декременты затухания поля по осям  $x$  и  $y$ .

В качестве граничных условий в (15) используем два нормальных стохастических процесса, описываемых уравнениями Ланжевена:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + v_x\right)h(x, 0) = \sigma u(x, 0), \quad (16)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + v_y\right)h(0, y) = \sigma u(0, y), \quad (17)$$

и реализующихся вдоль осей  $ox$  и  $oy$  с начальными условиями

$$h(0, 0) = \sigma u(0, 0) \quad (18)$$

Решения уравнений (16), (17) и (15) с начальным условием (12) имеют следующий вид:

$$h(x, 0) = \exp(-v_x x)h(0, 0) + \sigma \int_0^x \exp[-v_x(x-x')]u(x', 0)dx', \quad (19)$$

$$h(0, y) = \exp(-v_y y)h(0, 0) + \sigma \int_0^y \exp[-v_y(y-y')]u(0, y')dy', \quad (20)$$

$$h(x, y) = \exp(-v_x x - v_y y)h(0, 0) + \sqrt{2v_x} \sigma \int_0^x \exp[-v_x(x-x')]u(x', 0)dx' + \sqrt{2v_y} \sigma \times \int_0^y \exp[-v_y(y-y')]u(0, y')dy' + \sqrt{4v_x v_y} \sigma \times \int_0^x \int_0^y \exp[-v_x(x-x') - v_y(y-y')]u(x', y')dx'dy'. \quad (21)$$

Уравнение (15) вместе с решением (21) описывает НМД-поле первого порядка  $H_1(x, y)$ , порождающим полем для которого является поле “белого шума”  $u(x, y)$ .

Случайное НМД-поле второго порядка  $H_2(x, y)$  в прямоугольнике  $\{x \in [0, a], y \in [0, b]\}$  можно описать уравнением [16]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\beta_x \frac{\partial}{\partial x} + \Omega_x^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\beta_y \frac{\partial}{\partial y} + \Omega_y^2\right)h(x, y) = \sigma u(x, y). \quad (22)$$

Пусть  $\gamma_{1x}, \gamma_{2x}$ , а также  $\gamma_{1y}, \gamma_{2y}$  – решения уравнений

$$\gamma^2 + 2\beta_x \gamma + \Omega_x^2 = 0;$$

$$\gamma^2 + 2\beta_y \gamma + \Omega_y^2 = 0.$$

Тогда уравнение (22) можно записать в виде системы двух уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_{1x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + \gamma_{1y}\right)h_1(x, y) = \sigma u(x, y); \quad (23)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_{2x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + \gamma_{2y}\right)h_2(x, y) = h_1(x, y). \quad (24)$$

Структура уравнений (23), (24) и (15) совпадают, следовательно, решения уравнений (23) и (24) в соответствии с (19) – (21) записываются:

$$h_1(x, 0) = \exp(-\gamma_{1x} x)h_1(0, 0) + \sigma \int_0^x \exp[-\gamma_{1x}(x-x')]u(x', 0)dx', \quad (25)$$

$$h_1(0, y) = \exp(-\gamma_{1y} y)h_1(0, 0) + \sigma \int_0^y \exp[-\gamma_{1y}(y-y')]u(0, y')dy', \quad (26)$$

$$h_1(x, y) = \exp(-\gamma_{1x} x - \gamma_{1y} y)h_1(0, 0) + \sqrt{2\gamma_{1x}} \sigma \int_0^x \exp[-\gamma_{1x}(x-x')]u(x', 0)dx' + \sqrt{2\gamma_{1y}} \sigma \times \int_0^y \exp[-\gamma_{1y}(y-y')]u(0, y')dy' + \sqrt{4\gamma_{1x}\gamma_{1y}} \sigma \times \int_0^x \int_0^y \exp[-\gamma_{1x}(x-x') - \gamma_{1y}(y-y')]u(x', y')dx'dy'. \quad (27)$$

а также

$$h_2(x, 0) = \exp(-\gamma_{2x} x)h_1(0, 0) + \sigma \int_0^x \exp[-\gamma_{2x}(x-x')]h_1(x', 0)dx', \quad (28)$$

$$h_2(0, y) = \exp(-\gamma_{2y} y)h_1(0, 0) + \sigma \int_0^y \exp[-\gamma_{2y}(y-y')]h_1(0, y')dy', \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
 h_2(x, y) = & \exp(-\gamma_{2x}x - \gamma_{2y}y)h_1(0, 0) + \\
 & + \sqrt{2\gamma_{2x}}\sigma \int_0^x \exp[-\gamma_{2x}(x-x')]h_1(x', 0)dx' + \sqrt{2\gamma_{2y}}\sigma \times \\
 & \times \int_0^y \exp[-\gamma_{2y}(y-y')]h_1(0, y')dy' + \sqrt{4\gamma_{2x}\gamma_{2y}}\sigma \times \\
 & \times \int_0^x \int_0^y \exp[-\gamma_{2x}(x-x') - \gamma_{2y}(y-y')]h_1(x', y')dx'dy'. \quad (30)
 \end{aligned}$$

Из соотношений (25) – (30) следует, что для НМД-поля второго порядка  $H_2(x, y)$  производящим генератором является НМД-поле  $H_1(x, y)$  первого порядка, а для НМД-поля  $H_1(x, y)$  первого порядка производящим генератором является поле “белого шума”  $H_0(x, y) = u(x, y)$  нулевого порядка. Таким образом, соотношение (30) определяет случайную поверхность  $h(x, y) = h_2(x, y)$  движения ОБТ.

При решении практических задач, связанных с определением возмущений, действующих на корпус ОБТ со стороны грунта требуется не только знание случайной функции  $h(x, y)$ , но и ее производной по времени, причем

$$\dot{h}(x, y) = \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \dot{x}(t) + \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} \dot{y}(t). \quad (31)$$

Для отыскания величин

$h(x_{in}, y_{in}), h(x_{il}, y_{il}), \dot{h}(x_{in}, y_{in}), \dot{h}(x_{il}, y_{il}),$   
( $i = \overline{1, n}$ ) в формулы (30) и (31) следует подставить соотношения (3) – (8).

### Выводы

Исследование динамики криволинейного движения ОБТ по пересеченной местности требует решения задачи моделирования случайной поверхности  $h(x, y)$ , в качестве которой рекомендуется выбирать нормальное марковское двумерное поле (НМД-поле); построение НМД-поля второго порядка на плоской поверхности двух переменных основано на иерархическом принципе, причем на нижнем уровне иерархии используется стандартный генератор нормального единичного “белого шума”.

### Список литературы

1. Груздев Н.И. Танки, теория / Н.И. Груздев. – М.: Машигиз, 1944. – 402 с.
2. Буров С.С. Конструкция и расчет танков / С.С. Буров. – М.: АБТВ, 1973. – 602 с.
3. Балдин В.А. Теория и конструкция танков / В.А. Балдин. – М.: АБТВ, 1972. – 782 с.
4. Дмитриев А.А. Теория и расчет нелинейных систем поддресоривания гусеничных машин / А.А. Дмитриев, В.А. Чобиток, А.В. Тельминов. – М.: Машиностроение, 1975. – 448 с.
5. Забавников Н.А. Теория транспортных гусеничных машин / Н.А. Забавников. – М.: Машиностроение, 1974. – 442 с.
6. Аврамов В.П. Динамика гусеничной транспортной машины при прямолинейном движении по неровностям / В.П. Аврамов. – Х.: ХПИ, 1992. – 62 с.
7. Аврамов В.П. Проходимость, поворот и потери в ходовой системе транспортной гусеничной машины / В.П. Аврамов. – Х.: ХПИ, 1992. – 98 с.
8. Аврамов В.П. Динамика гусеничной транспортной машины при установившемся движении по неровностям / В.П. Аврамов, Н.Б. Калейчев. – Х.: Вища школа, 1989. – 112 с.
9. Писарев В.П. Проектирование ходовых систем быстроходных гусеничных машин / В.П. Писарев. – Х.: НТУ “ХПИ”, 2002. – 218 с.
10. Дуценко В.В. Математическое моделирование колебаний поддресоренного корпуса многоопорной колесной машины / В.В. Дуценко, И.И. Якименко // Механіка та машинобудування. – 2004. – № 2. – С. 139-147.
11. Силаев А.А. Спектральная теория поддресоривания транспортных машин / А.А. Силаев. – М.: Машиностроение, 1972. – 192 с.
12. Туренко А.Н. Системотехника транспорта / А.Н. Туренко, Н.Я. Говоруценко. – Х.: ХНАДУ, 1998. – 255 с.
13. Александров Е.Е. Динамика транспортно-тяговых колесных и гусеничных машин / Е.Е. Александров, А.Т. Лебедев, А.Н. Туренко и др. – Х.: ХНАДУ, 2001. – 642 с.
14. Александрова Т.Е. Имитационное моделирование внешних возмущений, действующих на танковую пушку / Т.Е. Александрова, И.Е. Александрова, С.Н. Беляев // Механіка та машинобудування. – 2011. – № 1. – С. 43-50.
15. Мазманішвілі А.С. Моделирование марковских случайных последовательностей и алгоритм генерации однородного двумерного марковского поля / А.С. Мазманішвілі, В.Е. Щербань // Электронное моделирование. – 1996. – Т. 18. – № 2. – С. 93-95.

Поступила в редколлегию 1.02.2012

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. М.Л. Подригало, Харьковский национальный автомобильный университет, Харьков.

### СТОХАСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПОВЕРХОНЬ РУХУ ОБ'ЄКТІВ БРОНЕТАНКОВОЇ ТЕХНІКИ

О.С. Мазманішвілі, Т.Є. Александрова

Розглянуто завдання моделювання випадкових поверхонь руху об'єктів бронетанкової техніки. Показано, що така поверхня є нормальним марківським двовимірним полем, будь-яким ортогональним перетином якого є стаціонарний процес Орнштейна-Уленбека.

**Ключові слова:** випадкова поверхня руху, об'єкт бронетанкової техніки, нормальне марківське двовимірне поле.

### STOCHASTIC DESIGN OF CASUAL SURFACES OF ARMOURED TECHNIQUE OBJECTS MOTION

A.S. Mazmanishvili, T.E. Aleksandrova

The task of design of casual surfaces of motion of armoured technique objects is considered. It is rotined that such surface is the normal markovian two-dimensional field any ortogonal section of which is a stationary process of Ornshiteyn-Ulenbek.

**Keywords:** casual surface of motion, armoured technique object, normal markovian two-dimensional field.