

УДК519.21:519.23

В.Ю. Дубницкий, Л.Д. Филатова

Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ, Харьков

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УСЕЧЁННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ РЭЛЕЯ И МАКСВЕЛЛА

Для односторонне и двусторонне усечённых распределения Рэлея и Максвелла получены выражения для первых двух начальных моментов.

Ключевые слова: усечённые распределения, распределение Рэлея, усечённое распределение Рэлея, усечённое распределение Максвелла, распределение Максвелла, моменты усечённых распределений.

Введение

Рассмотрим непрерывную случайную величину X , для которой известны функция и плотность распределения. Примем, что возможные значения этой случайной величины расположены на положительной полуоси, то есть $0 \leq X < \infty$. Предположим, что для данной случайной величины плотность распределения такова, что её первый начальный и второй центральный моменты конечны. Пусть исходя из физического смысла задачи интерес представляют значения математического ожидания и дисперсии (среднеквадратического отклонения) случайной величины X не на всей области её определения, а в некоторых подобластях:

$$0 \leq X \leq u < \infty, \quad (1)$$

$$u \leq X < \infty, \quad (2)$$

$$u \leq X \leq w < \infty. \quad (3)$$

В случае справедливости условия (1) будем говорить об усечённом справа распределении, в случае (2) будем говорить об усечённом слева распределении и в случае (3) – общем случае, будем говорить о двустороннем усечённом распределении случайной величины X .

Анализ литературы. Пусть на интервале (A, B) , возможно бесконечном, задана функция распределения $F(x)$ и плотность распределения $f(x)$ случайной величины X . Примем, что двусторонне усечённая функция распределения задана условием:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin (u, w); \\ CF(x), & \text{если } x \in (u, w). \end{cases} \quad (4)$$

Плотность распределения в этом случае имеет вид:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin (u, w); \\ cf(x), & \text{если } x \in (u, w). \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{При этом } A \leq u \leq x \leq w \leq B. \quad (6)$$

В работе [1], которая вышла в свет на языке оригинала в 1952 г., была поставлена и решена задача определения функций распределения и плотности случайной величины (BV) X при условии нормальности исходного распределения и интервала усечения. В работе [2], опубликованной в 1962 г., но вы-

полненной приблизительно в одно время с работой [1], приведена общая теория решения поставленной задачи. В работе [3] приведено подробное решение задачи определения числовых характеристик усечённого нормального распределения при условии, что интервал усечения имеет вид $-\infty \leq X < \infty$. В справочнике [4] приведен результат решения поставленной задачи для интервала усечения вида $-\infty < u \leq x \leq w < \infty$.

Следуя работе [2], приведем основные этапы решения поставленной задачи.

Нормирующий множитель, присутствующий в уравнениях (4) и (5), определим из условия:

$$C \int_u^w f(x) dx = 1 \quad (7)$$

$$\text{или } C = [F(w) - F(u)]^{-1}. \quad (8)$$

Функция распределения вероятности усечённого распределения:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [u, w]; \\ C \int_u^x f(x) dx = C[F(x) - F(u)], & \text{если } x \in [u, w]. \end{cases} \quad (9)$$

Математическое ожидание усечённого распределения определяют по формуле:

$$M[X_{u,w}] = C \int_u^w xf(x) dx, \quad (10)$$

второй начальный момент определяют по формуле

$$\alpha_{u,w}^2 = C \int_u^w x^2 f(x) dx. \quad (11)$$

В этом случае дисперсия составит:

$$D[X_{u,w}] = \alpha_{(u,w)}^2 - (M[X_{u,w}])^2. \quad (12)$$

В работе [5] получены выражения для определения математического ожидания и дисперсии для двусторонне усечённого экспоненциального распределения, гамма-распределений и распределения Вейбулла. Применение числовых характеристик усечённых распределений при решении экономических задач подробно рассмотрено в работах [6 – 8].

Цель работы. Для усечённых слева, усечённых справа и двусторонне усечённых распределений Рэлея и Максвелла определить математическое ожидание и второй начальный момент.

Полученные результаты

1. Определение числовых характеристик усечённых распределений Рэлея.

Плотность этого распределения приведена в работе [9]:

$$f_1(x) = \frac{x}{a^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right), \quad (13)$$

его функция распределения имеет вид:

$$F_1(x) = 1 - \exp\left(-x^2 / (2a^2)\right), \quad x > 0, a > 0. \quad (14)$$

1.1. Рассмотрим правосторонне усечённое распределение, то есть распределение, определенное условием (1).

В соответствии с [5] нормирующий множитель $C_{1п}$ определим из условия:

$$C_{1п} = [F_1(u) - F_1(0)]^{-1} = [F_1(u)]^{-1} = [1 - \exp(-u^2 / (2a^2))]^{-1}. \quad (15)$$

Определим математическое ожидание для усечённого справа распределения Рэлея. Для этого, воспользовавшись условием (10), вычислим интеграл I_1 :

$$I_1 = \int_0^u x \frac{x}{a^2} \exp\left(-x^2 / (2a^2)\right) dx = a\sqrt{\pi/2} \operatorname{erf}\left(u\sqrt{2} / (2a)\right) - u \exp\left(-u^2 / (2a^2)\right), \quad (16)$$

после чего получим искомый результат:

$$M_1[X_{\infty,u}] = [F_1(u)]^{-1} I_1 = a [1 - \exp(-u^2 / (2a^2))]^{-1} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{u\sqrt{2}}{2a}\right) - u \exp\left(-u^2 / (2a^2)\right). \quad (17)$$

В условии (17) и далее функция $\operatorname{erf}(t)$ – это интеграл ошибок или функция Крампа:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Эта функция связана с функцией нормального распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

условием

$$\operatorname{erf}(x) = 2\Phi(\sqrt{2}x) - 1.$$

Упростив выражение (14), получим, что

$$M_1[X_{\infty,u}] = \frac{\sqrt{2} \cdot \left[\sqrt{\pi} a \exp\left(u^2 / (2a^2)\right) \operatorname{erf}\left(u^2 / (2a^2)\right) - u\sqrt{2} \right]}{2 \cdot \left[\exp\left(u^2 / (2a^2)\right) - 1 \right]}. \quad (18)$$

Для определения дисперсии усечённого на интервале (1) распределения Рэлея вначале вычислим интеграл

$$I_2 = \int_0^u x^2 \frac{x}{a^2} \exp\left(-x^2 / (2a^2)\right) dx = 2a^2 - e^{-u^2 / 2a^2} (2a^2 + u^2). \quad (19)$$

Второй начальный момент для распределения Рэлея с усечением вида (1) получим из условия:

$$M_2[X_{0,u}] = [1 - \exp(-u^2 / (2a^2))]^{-1} \cdot I_2 = \frac{2a^2 \exp\left(u^2 / (2a^2)\right) - 2a^2 - u^2}{\exp\left(u^2 / (2a^2)\right) - 1}. \quad (20)$$

Дисперсию усечённого распределения Рэлея на участке, заданном условием (1), найдём из условия:

$$D_1[X_{0,u}] = M_2[X_{0,u}] - (M_1[X_{0,u}])^2. \quad (21)$$

Из-за громоздкости получаемых выражений опустим их аналитический вид, так как условие (18) позволяет вычислить дисперсию без особых осложнений.

1.2. Рассмотрим усечённое слева распределение, то есть распределение, определенное условием (1).

В соответствии с [5], нормирующий множитель $C_{1л}$ определим из условия:

$$C_{1л} = [F_1(\infty) - F_1(u)]^{-1} = [1 - (1 - \exp(-u^2 / (2a^2)))]^{-1} = \left(\exp(-u^2 / (2a^2))\right)^{-1}. \quad (22)$$

Определим математическое ожидание для усечённого справа распределения Рэлея. Для этого, воспользовавшись условием (10), вычислим интеграл I_2 :

$$I_2 = \int_u^{\infty} x \frac{x}{a^2} \exp\left(-x^2 / (2a^2)\right) dx = 2 \left(a\sqrt{\pi} + u \cdot \exp\left(-u^2 / (4a^2)\right) - a\sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(u / (2a)\right) \right), \quad (23)$$

умножив условие (22) на выражение (23), получим, что:

$$M_1[X_{u,\infty}] = 2 \left[a\sqrt{\pi} \exp\left(\frac{u^2}{4a^2}\right) \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{u}{2a}\right)\right) + u \right]. \quad (24)$$

Для определения второго начального момента для распределения Рэлея с усечением вида (2) вычислим интеграл вида:

$$I_3 = \int_u^{\infty} x^2 \frac{x}{a^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) dx = 2 \exp\left(-\frac{u^2}{4a^2}\right) \cdot (4a^2 + u^2). \quad (25)$$

Второй начальный момент определим по условию:

$$M_2[X_{u,\infty}] = C_{1л} I_3 = \left(\exp\left(-u^2 / (2a^2)\right)\right)^{-1} \times 2 \exp\left(-\frac{u^2}{4a^2}\right) \cdot (4a^2 + u^2). \quad (26)$$

Дисперсию распределения данного вида определим, используя условие (21).

1.3. Рассмотрим двусторонне усеченное распределение, то есть распределение, определенное условием (3).

Нормирующий множитель

$$C_{1дв} = (F_1(w) - F_1(u))^{-1} = \left[\exp(-u^2 / (2a^2)) - \exp(-w^2 / (2a^2)) \right]^{-1}. \quad (27)$$

Для определения математического ожидания $M_{дв}[X_u, w]$ рассмотрим вспомогательный интеграл

$$I_4 = \int_u^w x \frac{x}{a^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) dx = u e^{-u^2 / (2a^2)} - w e^{-w^2 / (2a^2)} - \frac{\sqrt{2\pi}}{2} a \left[\operatorname{erf}\left(\frac{u\sqrt{2}}{2a}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{w\sqrt{2}}{2a}\right) \right]. \quad (28)$$

Следовательно,

$$M_{дв}[X_u, w] = C_{дв} I_4 = A_3; \quad (29)$$

где

$$A_3 = \frac{\sqrt{2} \cdot (D_1 D_2 + w\sqrt{2}) - u\sqrt{2} \cdot \exp(w^2 / (2a^2))}{\exp(u^2 / (2a^2)) - \exp(w^2 / (2a^2))}; \quad (30)$$

$$D_1 = \exp(u^2 / (2a^2)) a \sqrt{\pi} \exp\left(\frac{w^2}{2a^2}\right); \quad (31)$$

$$D_2 = \operatorname{erf}\left(\frac{u\sqrt{2}}{2a}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{w\sqrt{2}}{2a}\right). \quad (31)$$

Для определения второго начального момента распределения Рэля с усечением вида (3) вычислим вспомогательный интеграл:

$$I_5 = \int_u^w x^2 \frac{x}{a^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) dx = e^{-u^2 / 2a^2} (2a^2 + u^2) - e^{-w^2 / 2a^2} (2a^2 + w^2). \quad (32)$$

Второй начальный момент и дисперсию определим, используя равенства:

$$M_2[X_u, w] = C_{дв} I_5,$$

$$D[X_u, w] = M_2[X_u, w] - (M_{дв}[X_u, w])^2. \quad (33)$$

2. Определение числовых характеристик усечённых распределений Максвелла.

Последовательность действий при решении поставленной в п.2 задачи аналогична решению задачи, сформулированной в п.1. Поэтому в данном разделе будут приведены только основные результаты.

Пусть плотность распределения Максвелла имеет вид, указанный в работе [9]:

$$f_M(x) = \frac{2x^2}{a^3 \sqrt{2\pi}} e^{-x^2 / (2a^2)}, \quad x > 0, a > 0. \quad (34)$$

Функцию распределения вероятности для плотности вида (34) определим так:

$$F_M(x) = \int_0^x \frac{2x^2}{a^3 \sqrt{2\pi}} e^{-x^2 / (2a^2)} dx = \operatorname{erf}\left(x\sqrt{2} / (2f)\right) - x\sqrt{2} \cdot \exp(-x^2 / (2a^2)) / (a\sqrt{\pi}). \quad (35)$$

Нормирующие множители для соответствующих видов усечения примут вид.

Для правосторонне усечённого распределения, соответствующего условию (1):

$$C_{2п} = (F_M(u) - F(0))^{-1} = \left(\operatorname{erf}\left(\frac{u\sqrt{2}}{2f}\right) - \frac{u\sqrt{2} \cdot \exp(-u^2 / (2a^2))}{a\sqrt{\pi}} \right)^{-1}. \quad (36)$$

Для двусторонне усечённого распределения, соответствующего условию (3):

$$C_{2дв} = (F(w) - F(u))^{-1} = \left(\left(\operatorname{erf}\left(\frac{w\sqrt{2}}{2f}\right) - \frac{w\sqrt{2} \cdot \exp(-w^2 / (2a^2))}{a\sqrt{\pi}} \right) - \left(\operatorname{erf}\left(\frac{u\sqrt{2}}{2f}\right) - \frac{u\sqrt{2} \cdot \exp(-u^2 / (2a^2))}{a\sqrt{\pi}} \right) \right)^{-1}. \quad (37)$$

Для левосторонне усечённого распределения, соответствующего условию (2):

$$C_{2л} = (1 - F(u))^{-1} = \left(1 - \left(\operatorname{erf}\left(\frac{u\sqrt{2}}{2f}\right) - \frac{u\sqrt{2} \cdot \exp(-u^2 / (2a^2))}{a\sqrt{\pi}} \right) \right)^{-1}. \quad (38)$$

2.1. Рассмотрим правосторонне усечённое распределение, то есть распределение, определенное условием (1).

Математическое ожидание на этом участке усечения найдем по условию:

$$M_1[X_{0,u}] = C_{2п} \int_0^u x \frac{2x^2}{a^3 \sqrt{2\pi}} e^{-x^2 / (2a^2)} dx = C_{2п} \sqrt{2 / \pi} (2a - \exp(-u^2 / 2a^2) \cdot (2a^2 + u^2) / a). \quad (39)$$

Второй начальный момент на этом участке усечения найдем по условию:

$$M_2[X_{0,u}] = C_{2п} \int_0^u x^2 \frac{2x^2}{a^3 \sqrt{2\pi}} e^{-x^2 / (2a^2)} dx = C_{2п} \times \left(3a^2 \operatorname{erf}\left(\frac{u\sqrt{2}}{2a}\right) - u\sqrt{2} \exp\left(-\frac{u^2}{2a^2}\right) (3a^2 + u^2) \right). \quad (40)$$

2.2. Рассмотрим двусторонне усечённое распределение, то есть распределение, определенное условием (3).

Математическое ожидание на этом участке усечения найдем по условию:

Выводы

$$M_1[X_{u,w}] = C_{2лв} \times \int_u^w x \frac{2x^2}{a^3 \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2a^2)} dx = C_{2лв} \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (A_4 - A_5), \quad (41)$$

где $A_4 = \exp(-u^2/(2a^2)) \cdot (2a^2 + u^2), \quad (42)$

$$A_5 = \exp(-w^2/(2a^2)) \cdot (2a^2 + w^2). \quad (43)$$

Второй начальный момент на этом участке усечения найдем по условию:

$$M_2[X_{u,w}] = C_{2лв} \times \int_u^w x^2 \frac{2x^2}{a^3 \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2a^2)} dx = C_{2лв} \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} [A_6 - A_7], \quad (44)$$

при условии, что:

$$A_6 = \left[u \exp(-u^2/2a^2)(3a^2 + u^2) \right], \quad (45)$$

$$A_7 = \left[w \exp(-w^2/2a^2)(3a^2 + w^2) \right]. \quad (46)$$

2.3. Рассмотрим левосторонне усечённое распределение, то есть распределение, определенное условием (2). Математическое ожидание на этом участке усечения найдем по условию:

$$M_1[X_{u,\infty}] = C_{3л} \int_u^\infty x \frac{2x^2}{a^3 \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2a^2)} dx = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-u^2/2a^2)(2a^2 + u^2). \quad (47)$$

Второй начальный момент на этом участке усечения найдем по условию:

$$M_2[X_{u,\infty}] = C_{3л} \int_u^\infty x^2 \frac{2x^2}{a^3 \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2a^2)} dx = A_8 - A_9, \quad (48)$$

где $A_8 = 3a^2 - 3\alpha^2 \operatorname{erf}\left(\frac{u\sqrt{2}}{2a}\right);$
 $A_9 = \frac{\sqrt{2}u \exp(-u^2/2a^2)(3a^2 + u^2)}{\alpha\sqrt{\pi}}. \quad (49)$

Знание первого и второго начального моментов позволяет, используя условие (21), вычислить математические ожидания для всех указанных в данной работе типов распределений.

ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗРІЗАНИХ РОЗПОДІЛІВ РЕЛЕЯ І МАКСВЕЛЛА

В.Ю. Дубницький, Л.Д. Філатова

Для однобічно і двобічно зрізаних розподілів Релея і Максвелла отримані вирази для перших двох початкових моментів.

Ключові слова: зрізані розподіли, розподіл Релея, розподіл Максвелла, зрізаний розподіл Релея, зрізаний розподіл Максвелла, моменти зрізаних розподілів.

NUMERICAL CHARACTERISTIC OF THE TRUNCATED DISTRIBUTION OF RAYLEIGH AND MAXWELL

V.Iu. Dubnitskyi, L.D. Filatova

For one-sided and bilaterally truncated distributions of Reyleigh and Maxwell are got expressions for the first of two initial moments.

Keywords: truncated distributions, distribution of Reyleigh, truncated distribution of Reyleigh, truncated distribution of Maxwell, distribution of Maxwell, moments of the truncated distributions.

1. Определены значения первого и второго начальных моментов левосторонне усечённых, правосторонне и двусторонне усечённых распределений Рэля и Максвелла.

2. Полученные результаты могут быть использованы при решении задач теории надёжности и оценивании риска финансовых операций.

Список литературы

1. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями / А. Хальд. – М.: Иностранная литература, 1956. – 595 с.
2. Шор Я.Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности / Я.Б. Шор. – М.: Сов. радио, 1962. – 527 с.
3. Жлуктенко В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика. Ч.1. Теорія ймовірностей / В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний. – К.: КНЕУ, 2000. – 304 с.
4. Переверзев Е.С. Случайные сигналы в задачах оценки состояния технических систем / Е.С. Переверзев, Ю.Ф. Даниев, Г.П. Филей. – К.: Наук. думка, 1992. – 252 с.
5. Дубницький В.Ю. Определение числовых характеристик двусторонне усечённого экспоненциального и гамма-распределения / В.Ю. Дубницький, С.В. Гадецькая // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2008. – Вип. 2(69). – С. 2-5.
6. Верченко П.І. Багатокритеріальність і динаміка економічного ризику (моделі та методи): Монографія / П.І. Верченко. – К.: КНЕУ, 2006. – 272 с.
7. Бублик Н.Д. Управление финансовыми и банковскими рисками: Учебное пособие / Н.Д. Бублик, С.В. Поченцов, А.Б. Секерин. – Уфа: альтернатива РИЦ, 1998. – 254 с.
8. Секерин А.Б. Анализ и оценка риска: Курс лекций / А.Б. Секерин, Т.М. Мамошина. – М.: ИИЦ МГУ ДТ, 2003. – 160 с.
9. Справочник по вероятностным расчётам / [Абезгауз А.А., Тронь А.П., Копенкин Ю.Н., Коровина И.А.]. – М.: Воениздат, 1966. – 407 с.
10. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям / Р.Н. Вадзинский. – СПб.: Наука, 2001. – 295 с.

Поступила в редколлегию 6.03.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.А. Гороховатский, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.