УДК 62-50

М.Л. Любчик, М.Д. Махфуз

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

РЕКУРРЕНТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПЕРЕХОДНОЙ МАТРИЦЫ АГРЕГИРОВАННОЙ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ

Рассмотрена задача оценивания переходной матрицы агрегированной марковской цепи, которая сводится к эквивалентной задаче идентификации дискретной стохастической динамической системы при наличии ограничений. На основе использования сочетания регуляризованного метода штрафных функций и метода множителей Лагранжа получена оценка переходной матрицы по последовательности наблюдений за состояниями агрегированной марковской цепи и рекуррентные алгоритмы оценивания, обеспечивающие получение оценок в реальном масштабе времени.

Ключевые слова: *агрегированные марковские цепи, переходная матрица, регуляризованная функция Лагранжа, рекуррентные алгоритмы, штрафные функции.*

Введение

Марковские цепи находят широкое применение в задачах математического моделирования технических, социальных и экономических систем [1]. Управляемые марковские цепи используются в качестве моделей динамических процессов принятия решений [2]. Особый класс моделей образуют так называемые агрегированные марковские цепи [3], описывающие поведение большой совокупности однородных объектов, случайным образом переходящих из состояния в состояние в соответствии с некоторым случайным механизмом. Подобные модели находят широкое применение в задачах исследования процессов популяционной и социальной динамики, развития эпидемий, процессов страхования.

Построение марковских моделей включает в себя нахождение их переходных матриц, которые далеко не всегда удается найти аналитически. В этом случае необходимой предпосылкой использования марковских моделей является оценивание переходных матриц по экспериментальным данным. Указанная задача особенно усложняется в случае рассмотрения агрегированных марковских моделей, когда наблюдениям в дискретные моменты времени доступны лишь так называемые агрегированные данные – общее количество объектов, находящихся в каждом из состояний.

В настоящей работе задача оценивания переходной матрицы сводится к эквивалентной задаче идентификации дискретной стохастической динамической системы при наличии ограничений.

Анализ состояния проблемы

Задача оценивания переходных матриц марковских цепей рассматривалась в большом количестве работ. В [3] получены оценки переходных матриц на основе метода максимального правдоподобия. В вычислительном плане проблема сводится к решению специфической задачи математического программирования. Однако реализация такого похода для построения рекуррентных алгоритмов, обеспечивающих получение оценок в реальном масштабе времени, наталкивается на определенные затруднения.

Наиболее просто задача рекуррентного оценивания переходных матриц решается для марковской цепи с непосредственно наблюдаемыми состояниями. Идея рекуррентного оценивания переходных матриц впервые была предложена в [4] и подробно разработана в [5]. Впоследствии различные модификации алгоритмов рекуррентного оценивания переходных матриц неоднократно рассматривалась в литературе, в основном в связи с задачами адаптивного управления марковскими цепями [6, 7, 8]. Особенностью предложенных алгоритмов является их проекционный характер, связанный с необходимостью обеспечения выполнения ограничений на получаемые оценки, обусловленные стохастичностью переходных матриц, условия сходимости проекционных алгоритмов подробно изучались в [9].

Пре решении задачи оценивания переходных матриц агрегированных марковских цепей отсутствует информация о пребывании объекта в конкретном состоянии и наблюдению доступно лишь общее количество объектов в различных состояниях. При этом эффективные алгоритмы оценивания могут быть получены на основе представления модели агрегированной марковской цепи в виде эквивалентной дискретной динамической системы [10]. Однако применению стандартных алгоритмов идентификации препятствует вырожденность ковариационной матрицы ее вектора состояния, что требует применения дополнительной регуляризации задачи оценивания.

Постановка задачи

Рассматривается совокупность M независимых однородных эргодических марковских цепей с N состояниями и одинаковыми переходными матрицами:

$$\Pi = \left\|\pi_{ij}\right\|, \; i, j = \overline{1, N}, \qquad (1)$$
$$\pi_{ij} = \mathbf{P}\{s_{n+1}^{m} = j \,\big|\, s_{n}^{m} = i\}, \; m = \overline{1, M}, \; n = 0, 1, \ldots$$

© М.Л. Любчик, М.Д. Махфуз

где s_n^m – состояние m-й марковской цепи на n-м шаге; π_{ij} – условные вероятности перехода. Элементы переходной матрицы удовлетворяют вероятностным ограничениям

$$\pi_{ij} \ge 0,\ \sum_{j=1}^{N} \pi_{ij} = 1, \quad i,j = \overline{1,N}. \tag{2}$$

Указанную совокупность будем называть агрегированной марковской цепью.

Введем вектор $x_n^T = (x_n^1, x_n^2, ..., x_n^N)$, каждая компонента которого x_n^i имеет смысл количества цепей, находящихся в момент времени n в состоянии с номером i. Таким образом, вектор x_n является случайным вектором и в каждый момент времени n удовлетворяет очевидным «балансным» ограничениям, т.е. принадлежит фиксированной гиперплоскости

$$M \ge x_n^i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{N} x_n^i = M,\ \forall n = 0,1.... \tag{3}$$

Задача оценивания переходной матрицы агрегированной марковской цепи состоит в нахождении оценки неизвестной переходной матрицы $\hat{\Pi}_n$ по заданной последовательности агрегированных наблюдений $\{x_k\}_{k=0}^n$.

Указанная последовательность может рассматриваться как последовательность состояний некоторой линейной дискретной динамической системы со случайным воздействием ξ_n [10]:

$$x_{n+1} = \Pi^T x_n + \xi_{n+1},\ \xi_{n+1} = x_{n+1} - \mathbf{M}\{x_{n+1} \mid x_n\}, \tag{4}$$

где $\mathbf{M}\{\cdot\}$ – символ математического ожидания.

Действительно, в силу независимости переходов каждой цепи

$$\mathbf{M}\{x_{n+1}^j \mid x_n\} = \sum_{i=1}^{N} \pi_{ij} x_n^i,\ j = \overline{1,N}, \tag{5}$$

откуда и следует (4).

Очевидно, что последовательность $\{\xi_n\}$ является последовательностью центрированных случайных векторов с ограниченными ковариационными матрицами

$$M\{\xi_{n+1}\} = 0, M\{\xi_{n+1}\xi_{n+1}^T \mid x_n\} = Q(\Pi, x_n) \le \infty. \tag{6}$$

Рекуррентной оценкой переходной матрицы будем называть оценку, формируемую в соответствии с алгоритмом

$$\hat{\Pi}_{n+1} = f(\hat{\Pi}_n, x_n, x_{n+1})\ . \tag{7}$$

При этом соответствующие оценки в каждый момент времени должны удовлетворять стохастическим ограничениям (2).

Таким образом, задача оценивания переходной матрицы агрегированной марковской цепи сводится к эквивалентной задаче идентификации дискретной динамической системы (4) по последовательности наблюдений $\{x_k\}_{k=0}^n$. Особенностью рассматриваемой задачи идентификации является необходимость учета ограничений на искомую переходную матрицу (2), а также наличие «балансных» ограничений (3) на вектор состояния системы (4). Следствием наличия последних является вырождение ковариационной матрицы вектора состояния системы x_n, что затрудняет получение устойчивых оценок матрицы Π.

Оценка переходной матрицы

Наиболее просто задача оценивания переходной матрицы решается в случае, когда возможно наблюдение за состоянием каждой марковской цепи. Представим переходную матрицу в строчной форме:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi^1 \\ \pi^2 \\ ... \\ \pi^N \end{pmatrix},\quad \pi^i = (\pi_{i1}, \pi_{i2} \quad ... \quad \pi_{iN}) \tag{8}$$

где $\pi^i, i = \overline{1,N}$ – строки переходной матрицы.

Пусть $s_n = \alpha, s_{n+1} = \beta$. Тогда рекуррентный алгоритм оценивания переходной матрицы имеет следующий вид [4]:

$$\pi_{n+1}^\alpha = \pi_n^\alpha - \frac{1}{\delta_n^\alpha}(\pi_n^\alpha - e^\beta),$$
$$\pi_{n+1}^i = \pi_n^i,\ i \ne \alpha, \tag{9}$$
$$\delta_n^i = \delta_{n-1}^i + 1 \text{ при } i = \alpha,\ \delta_n^i = \delta_{n-1}^i \text{ при } i \ne \alpha,$$

где $e^r = (0,0...,1,0,..,0)^T$ – единичный r–орт.

Очевидно, что оценки (9) в каждый момент времени n удовлетворяют ограничениям (2).

Непосредственное применение алгоритма (9) для агрегированных марковских цепей оказывается невозможным, поскольку в каждый момент времени состояние каждой цепи неизвестно и наблюдениям доступно лишь суммарное число объектов, находящихся в каждом состоянии.

Рассмотрим задачу нахождения оценки переходной матрицы $\hat{\Pi}_n$ агрегированной цепи на основе полной выборки наблюдений $\{x_k\}_{k=0}^n$. С учетом особенностей задачи, связанных с наличием специфических ограничений, для нахождения оценок воспользуемся сочетанием регуляризованного метода штрафных функций и метода неопределенных множителей Лагранжа [1]. В соответствии с этим методом для получения оценки переходной матрицы на основе системы (4) и последовательности агрегированных наблюдений $\{x_k\}_{k=0}^{n+1}$ с учетом ограничений (2) введем регуляризованную функцию Лагранжа вида

$$\begin{gathered} L(\Pi,\lambda) = \frac{\gamma}{2}\sum_{k=0}^{n}\ \sum_{j=1}^{N}(x_k^T\pi^j - x_{k+1}^T e^j)^2 + \\ +\lambda^T(\sum_{j=1}^{N}\pi^j - e^N) + \frac{\mu}{2}\sum_{j=1}^{N}(\pi^j - \bar{\pi}^j)^T Q_j^{-1}(\pi^j - \bar{\pi}^j), \end{gathered} \tag{10}$$

где $\pi^j, j=\overline{1,N}$ – столбцы переходной матрицы; $\overline{\pi}^j, j=\overline{1,N}$ – априорные значения столбцов переходной матрицы; λ – вектор множителей Лагранжа; e^j – единичный вектор, $e^N=(1,1,...,1)^T$, γ,μ – весовые коэффициенты; $\{Q_j>0, j=\overline{1,N}\}$ – набор весовых матриц.

Последнее слагаемое в (8), «штрафующее» за отклонение оценок от априорных оценок, при соответствующем выборе параметров $\mu, \{Q_j>0, j=\overline{1,N}\}$ обеспечивает выполнение ограничений $\pi^j \ge 0$ и устойчивость вычислений при вырождении ковариационной матрицы вектора x_n.

Выпишем условия, определяющие седловую точку функции Лагранжа (10), вычисляя ее градиенты по соответствующим векторам:

$$\nabla_{\pi^r} L(\Pi,\lambda)=(\mu Q_r^{-1}+\gamma X_n)\pi^r-\gamma X_{n-1,n}e^r+$$
$$+\lambda-\mu Q_r^{-1}\overline{\pi}^r=0,\ r=\overline{1,N}, \quad (11)$$
$$\nabla_{\lambda} L(\Pi,\lambda)=(\sum_{j=1}^{N}\pi^j-e^N)=0,$$

где $\quad X_n=\sum_{k=1}^{n}x_k x_k^T,\ X_{n,n+1}=\sum_{k=1}^{n}x_k x_{k+1}^T.$

Заметим, что в силу наличия линейной связи (3) между компонентами вектора состояния x_n, матрица X_N, пропорциональная оценке его ковариационной матрицы, плохо обусловлена.

Из первого уравнения системы линейных алгебраических уравнений (11) следует, что

$$\pi^r=R_r^{-1}(\gamma X_{n,n+1}e^r-\lambda+\mu Q_r^{-1}\overline{\pi}^r), \quad (12)$$

причем в результате введения регуляризации матрица $R_r=\mu Q_r^{-1}+\gamma X_n$ всегда хорошо обусловлена.

Подставляя полученные выражения для векторов π^r во второе уравнение системы (11), получим выражение для вектора множителей Лагранжа:

$$\lambda=\overline{\Phi}_{n,n}^{-1}(\gamma\overline{d}_{n,n+1}+\mu\overline{p}_n-e^N), \quad (13)$$

где

$$\overline{\Phi}_{n,n}=\sum_{r=1}^{N}R_r^{-1},\ \overline{d}_{n,n+1}=\sum_{r=1}^{N}R_r^{-1}X_{n,n+1}e^r,$$
$$\overline{p}_n=\sum_{r=1}^{N}R_r^{-1}Q_r^{-1}\overline{\pi}^r. \quad (14)$$

Окончательно получаем следующие выражения для оценок столбцов переходной матрицы:

$$\hat{\pi}^j=R_j^{-1}[\gamma(X_{n,n+1}e^j-\overline{\Phi}_{n,n}^{-1}\overline{d}_{n,n=1})+$$
$$+\mu(Q_j^{-1}\overline{\pi}^j-\overline{\Phi}_{n,n}^{-1}\overline{p}_n)+\overline{\Phi}_{n,n}^{-1}e^N],\ j=\overline{1,N}. \quad (15)$$

Легко видеть, что при $\mu\to\infty$ имеем $\pi^j\to\overline{\pi}^j$, что соответствует использованию в качестве оценок столбцов переходной матрицы их соответствующих априорных значений. При проведении вычислений в качестве значения весового параметра μ целесообразно использовать такое минимальное положительное число μ^*, при котором все $\pi_{ij}(\mu^*)\ge 0$.

Алгоритм рекуррентного оценивания

Полученную оценку переходной матрицы (15) нетрудно преобразовать к рекуррентной форме. Пусть к моменту времени n на основе последовательности агрегированных наблюдений $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ получены оценки столбцов переходной матрицы $\hat{\pi}_n^j, j=\overline{1,N}$.

Примем их в качестве априорных значений, и сформируем соответствующую регуляризованную функцию Лагранжа с использованием очередного $n+1$-го наблюдения x_{n+1}:

$$L_{n+1}(\Pi,\lambda)=\frac{\gamma_{n+1}}{2}\sum_{j=1}^{N}(x_n^T\pi^j-x_{n+1}^T e^j)^2+$$
$$+\lambda^T(\sum_{j=1}^{N}\pi^j-e^N)+\frac{\mu}{2}\sum_{j=1}^{N}(\pi^j-\hat{\pi}_n^j)^T Q_j^{-1}(\pi^j-\hat{\pi}_n^j). \quad (16)$$

Здесь весовой коэффициент γ_n играет роль коэффициента шага рекуррентного алгоритма, а соотношение между параметрами γ_{n+1} и μ определяет степень влияния текущих измерений по сравнению с предыдущими оценками, полученными на основе накопленной информации.

Как и ранее, получим выражения для нахождения седловой точки регуляризованной функции Лагранжа (16):

$$\nabla_{\pi^r} L_{n+1}(\Pi,\lambda)=(\mu Q_r^{-1}+\gamma_{n+1}x_n x_n^T)\pi^r-$$
$$-\gamma_{n+1}x_n x_{n+1}^T e^r+\lambda-\mu Q_r^{-1}\hat{\pi}_n{}^r=0,\ r=\overline{1,N}, \quad (17)$$
$$\nabla_{\lambda} L_{n+1}(\Pi,\lambda)=(\sum_{j=1}^{N}\pi^j-e^N)=0.$$

Решение системы линейных уравнений (17) может быть получено в явном виде.

Действительно, из системы линейных уравнений (17) следует, что

$$\pi^r=R_{r,n}^{-1}(\gamma_{n+1}x_n x_{n+1}^T e^r-\lambda+\mu Q_r^{-1}\hat{\pi}_n{}^r), \quad (18)$$

где $R_{r,n}=\mu Q_r^{-1}+\gamma_{n+1}x_n x_n^T$ – невырожденная и хорошо обусловленная матрица для любого $\mu>0$.

В свою очередь, вектор множителей Лагранжа определятся как

$$\lambda=\Phi_{n,n}^{-1}(\gamma_{n+1}d_{n,n+1}+\mu\hat{p}_n-e^N), \quad (19)$$

где

$$\Phi_{n,n}=\sum_{r=1}^{N}R_{r,n}^{-1},\ d_{n,n+1}=\sum_{r=1}^{N}R_r^{-1}x_n x_{n+1}^T e^r,$$
$$\hat{p}_n=\sum_{r=1}^{N}R_{r,n}^{-1}Q_r^{-1}\hat{\pi}_n^r. \quad (20)$$

Окончательно алгоритм рекуррентного оценивания переходной матрицы приобретает вид

$$\hat{\pi}_{n+1}^{j} = \gamma_{n+1} R_{j,n}^{-1}(x_n x_{n+1}^T e^j - \Phi_{n,n}^{-1} \sum_{r=1}^{N} R_{r,n}^{-1} x_n x_{n+1}^T e^r) +$$

$$+\mu R_{j,n}^{-1}(Q_j^{-1} \hat{\pi}_n^{\,j} - \Phi_{n,n}^{-1} \sum_{r=1}^{N} R_{r,n}^{-1} Q_r^{-1} \hat{\pi}_n^r) + R_{j,n}^{-1} \Phi_{n,n}^{-1} e^N, \quad (21)$$

$$\hat{\pi}_o^j = \overline{\pi}_o^j, \; j = \overline{1, N}.$$

или в эквивалентной форме

$$\hat{\pi}_{n+1}^{j} = \gamma_{n+1} \sum_{r=1}^{N} (\delta_{jr} I_N - \Phi_{n,n}^{-1}) R_{r,n}^{-1} x_n x_{n+1}^T e^r) +$$

$$+\mu \sum_{r=1}^{N} (\delta_{jr} I_N - \Phi_{n,n}^{-1}) R_{r,n}^{-1} Q_r^{-1} \hat{\pi}_n^r) + R_{j,n}^{-1} \Phi_{n,n}^{-1} e^N, \quad (22)$$

$$\hat{\pi}_o^j = \overline{\pi}_o^j, \; j = \overline{1, N},$$

где δ_{jr} – символ Кронекера; I_N – единичная матрица размерностью $N \times N$.

Сходимость алгоритма (22) определяется выбором последовательности параметров шага $\{\gamma_n\}$. Очевидно, что при выполнении условия $\gamma_n \to 0$ последовательность оценок $\{\pi_n^j\}$ стремится к постоянным значениям π_∞^j. Для получения оценок (22), минимизирующих эмпирический риск, параметры шага можно выбирать в соответствии с известными условиями стохастической аппроксимации

$$\gamma_n > 0, \; \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \infty, \; \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^2 < \infty. \quad (23)$$

Для повышения вычислительной устойчивости алгоритма оценивания целесообразно в процессе вычислений осуществлять проецирование строк получаемых оценок переходной матицы $\{\hat{\pi}_n^i, i = \overline{1, N}\}$ на N-мерный симплекс, определяемый как

$$S_N(p) = \{p \left| \sum_{i=1}^{N} p_i = 1, \; p_i \ge 0, \; i = \overline{1, N} \right\}. \quad (24)$$

Оператор проектирования $\Omega_{S_N}\{\cdot\}$ на симплекс (24), действующий по правилу

$$\left\| \Omega_{S_N}\{q\} - q \right\| = \min_{p \in S_N} \left\| p - q \right\|, \quad (25)$$

подробно описан в [5].

Алгоритм (22) позволяет получать оценки переходной матрицы агрегированной марковской цепи в темпе поступающей информации.

Выводы

Предложенный подход позволяет получать устойчивые в вычислительном отношении оценки переходной матрицы марковской цепи по агрегированным данным. При построении рекуррентной модификации алгоритма оценивания существенным является выбор величины шаг алгоритма, обеспечивающего более высокую скорость сходимости оценок, а также учет априорной информации. Представляет также интерес рассмотрение целесообразности применения критериев качества оценивания, отличных от квадратичного, поскольку закон распределения случайного воздействия для используемой модели агрегированной цепи (4) очевидно отличается от нормального.

Список литературы

1. *Баруча-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения / А.Т. Баруча-Рид. – М.: Наука, 1969. – 511 с.*
2. *Майн Х. Марковские процессы принятия решений / Х. Майн, С. Осаки. – М.: Наука, 1977. – 176 с.*
3. *Ли Ц. Оценивание параметров марковских моделей по агрегированным временным рядам / Ц. Ли, Д. Джадж, А. Зельнер. – М.: Статистика, 1977. – 224 с.*
4. *Riordan J.S. An adaptive automation controller for discrete time Markov process / J.S. Riordan // Automatica. – 1969. – V. 5. – P. 721-730.*
5. *Любчик Л.М. Обучающиеся автоматы в задачах управления стохастическими объектами / Л.М. Любчик, А.С. Позняк // Автоматика и телемеханика. – 1974. – № 5. – С. 95-109.*
6. *El-Fattach Y.M. Recursive algorithms for adaptive control of finite Markov chains / Y.M. El-Fattach // IEEE Trans. Systems Man Cybernet. SMC-11. – 1981. – No. 2. – P. 135-144.*
7. *Poznyak A.S. Self-Learning Control of Finite Markov Chains / A.S. Poznyak, K. Najim, E. Gomez-Ramirez. – Marcel Dekker, NY, 2000. – 234 p.*
8. *Maeda Y. A note on estimation of states in HMM with unknown parameters / Y. Maeda, F. Masui, M. Suzuki // International Journal of Computer Science and Network Security. – 2011. – Vol. 11, No.4. – P. 63-67.*
9. *Назин А.В. Адаптивный выбор вариантов / А.В. Назин, А.С. Позняк. – М.: Наука, 1999. – 343 с.*
10. *Ford J. Adaptive Estimation of HMM Transition Probabilities / J. Ford, J. Moore // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1998. – Vol. 46, No. 5. – P. 1374-1385.*

Поступила в редколлегию 7.03.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Е.В. Бодянский, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

РЕКУРЕНТНЕ ОЦІНЮВАННЯ ПЕРЕХІДНОЇ МАТРИЦІ АГРЕГОВАНОГО МАРКІВСЬКОГО ЛАНЦЮГА

М.Л. Любчик, М.Д. Махфуз

Розглядається методика побудови регулярізованих оцінок перехідної матриці марківського ланцюга за агрегованими даними з урахуванням стохастичних обмежень.

Ключові слова: *агреговані марківські ланцюги, перехідна матриця, регуляризована функція Лагранжа, рекурентні алгоритми, штрафні функції.*

RECURRENT ESTIMATION OF TRANSFER MATRIX OF AGGREGATED MARKOV CHAIN

M.L. Lyubchyk, M.D. Mahfouz

The method of Markov chain transfer matrix regularized estimation is considered taking into account stochastic constrains.

Keywords: *aggregated Markov chains, transitional matrix, regularized Langrangian, recurrent algorithms, penalty functions.*