УДК 681.3

В.И. Барсов

Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков

РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕДУРЫ ОБНАРУЖЕНИЯ И ИСПРАВЛЕНИЯ ОДНОКРАТНЫХ ОШИБОК ИНФОРМАЦИИ В МСС С ВЗАИМНО ПОПАРНО НЕ ПРОСТЫМИ ОСНОВАНИЯМИ

Рассматриваются алгоритмы и схемные решения устройств, реализующих процедуры обнаружения и исправления однократных ошибок информации в модулярной системе счисления с взаимно попарно не простыми основаниями.

Ключевые слова: *система обработки информации и управления, модулярная система счисления, взаимно попарно не простые основания.*

Введение

Постановка задачи. В настоящее время продолжаются поиски новых аспектов повышения эффективности систем обработки информации и управления (СОИУ), использующих непозиционные системы счисления [1 – 2]. Это относится, в частности к изучению свойств и целесообразности применения модулярной системы счисления (МСС), основания которой не являются взаимно попарно простыми числами для построения устройств обработки информации (УОИ). Необходимо отметить, что значительное влияние на структуру и принципы функционирования технических устройств СОИУ реального времени, функционирующих в МСС, оказывают следующие её основные свойства.

1. Свойство малоразрядности остатков МСС, позволяющее использовать множество различных принципов реализации модульных операций, что значительно расширяет перечень вариантов системотехнических решений применяемых при создании СОИУ.

2. Свойство независимости остатков МСС, позволяющее создавать технические устройства СОИУ в виде набора независимых, параллельно работающих трактов обработки информации (ТОИ), функционирующих по своему определенному модулю m_i, независимо друг от друга. Ошибки, возникающие за счет отказов (сбоев) схем двоичных разрядов в произвольном ТОИ, не «размножаются» в соседние тракты (остаются в пределах одного остатка), что дает возможность повысить достоверность обработки информации в МСС.

3. Свойство равноправности остатков, заключается в том, что любой остаток a_i числа $A=(a_1,a_2, \;\; , a_n)$ несёт информацию обо всем исходном числе, что даёт возможность программными методами заменить отказавший ТОИ, по модулю m_i, на работоспособный тракт по модулю m_j ($m_i < m_j$) не прерывая решение задачи. Одно и то же УОИ, в зависимости от предъявляемых требований может иметь различную надёжность, точность вычислений и быстродействие в динамике процесса обработки информации.

Однако до настоящего времени системные исследования, связанные с изучением влияния основных свойств МСС, основания которой не являются взаимно попарно простыми числами, на структуру и функционирование устройств реализующих модульные операции ещё не завершены. Следовательно, вполне логично предположить, что углубленное и всестороннее изучение вопроса связанного с созданием устройств, функционирующих в МСС, основания которой не являются взаимно попарно простыми числами, которые реализуют некоторую прикладную информационную технологию, представляется актуальной задачей.

Цель работы – показать возможность синтеза устройства, позволяющего относительно просто реализовать процедуру обнаружения и исправления однократных ошибок информации циркулирующей в СОИУ, функционирующей в модулярной системе счисления с взаимно попарно не простыми основаниями.

Основная часть

Рассмотрим процедуру обнаружения и исправления однократных ошибок в МСС с взаимно попарно не простыми основаниями [2], позволяющую исправлять ошибки, кратные одному из делителей $d_{i-1\ i}$ или d_{ii+1}, и составим алгоритм, её реализующий.

Пусть задана МСС с взаимно попарно не простыми основаниями, т.е. НОД $(m_1, m_2, ..., m_n) \geq 2$. И пусть задано число в МСС $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$. При этом для любого целого числа $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ в МСС с основаниями $m_i (i = \overline{1, n})$ и для любой пары оснований m_i и m_j должно выполняться условие

$(a_i - a_j) \equiv 0(\mathrm{mod}\, d_{ij})$, где $d_{ij}(m_i, m_j)$ – наибольший общий делитель оснований m_i и m_j, а $i, j = \overline{1,n}$; $i \neq j$. Для обнаружения ошибок в остатке по произвольному основанию $m_i (i = \overline{1,n})$ числа $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, заданного в МСС с основаниями $m_1, ..., m_n$, необходимо, чтобы основание m_i имело хотя бы один, отличный от единицы, общий делитель с остальными основаниями $m_i (i \neq j)$. Иными словами, ошибка Δa_i не должна быть кратна делителям d_{ij} и $d_i = (d_{i1}, d_{i2}, ..., d_{in})$, где d_i – НОД делителей $d_{i1}, d_{i2}, ..., d_{in}$. При этом должно выполняться условие:

$$(d_{ik} - 1)(d_{ij} - 1) \geq m_i - 1 - (K_{d_{ik}} + K_{d_{ij}} - K_{[d_{ik}, d_{ij}]}),$$

где $d_{ik} = (m_i, m_k)$, $d_{ij} = (m_i, m_j)$; $K_{d_{ik}}$ – количество делителей, кратных d_{ik}; K_{d_j} – количество делителей, кратных d_{ij}; $K_{[d_{ik}, d_{ij}]}$ – количество делителей, кратных наименьшему общему кратному (НОК) $[d_{ik}, d_{ij}]$ делителей d_{ik} и d_{ij}, $i \neq j$.

Определим все значения $a_{k\ k+1}$. Не нарушая общности рассуждений, примем, что $a_{i\ i+1} \neq 0$, а все остальные значения $a_{k\ k+1} = 0$.

Так как $a_{i\ i+1} = (a_i - a_{i+1}) \mathrm{mod}\, d_{i\ i+1} \neq 0$, то ошибка может присутствовать только в остатках по основаниям m_i или m_{i+1}.

Будем считать, что если в упорядоченной $(m_{i-1} < m_i; i = \overline{1,n})$ МСС с основаниями $m_1, ..., m_n$ задано неправильное (искаженное в одном остатке) число $\tilde{A} = (a_1, a_2, ..., a_{i-1}, \tilde{a}_i, a_{i+1}, ..., a_n)$ и при этом $\Delta a_i = \tilde{a}_i - a_i = k_i d_{i-1i}$, то в совокупности значений $a_{ik_i} = (\tilde{a}_i - k_i d_{i-1i}) \mathrm{mod}\, m_i$ существует такое единственное значение $a_{i\rho}$, при котором число $A^{(\rho)} = (a_1, a_2, a_{i\rho}, ..., a_n)$ является правильным числом, где $d_{i-1\ i}(m_{i-1}, m_i)$ НОД оснований m_i и m_{i-1}, а k_i может принимать значения $k_i = 1, 2, ..., m_i / d_{i-1\ i} - 1$.

Возможны две гипотезы:

– ошибка присутствует в остатке a_i;

– ошибка присутствует в остатке a_{i+1}.

Рассмотрим первую гипотезу. Так как $a_{i-1\ i} = 0$, то ошибка кратна делителю $d_{i-1\ i}$. Поэтому ошибка по основанию может принимать значения $\Delta a_i = k d_{i-1i}$, для $k_i = 1, 2, ..., m_i / d_{i-1i} - 1$.

Вычислим совокупность значений $a_{ik_i} = (a_i - k_i d_{i-1i}) \mathrm{mod}\, m_i$.

Если в этой совокупности найдется такое значение a_{im}, при котором $A^{(m)} = (a_1, a_2, ..., a_{im}, ..., a_n)$ правильное число, то первая гипотеза справедлива, т.е. ошибка присутствует в остатке по основанию m_i. В этом случае исправленным числом является $A_{исп} = A^{(m)}$, где $a_{im} = (a_i - md_{i-1i}) \mathrm{mod}\, m_i$.

Если при всех значения a_{ik_i} число $A^{(k_i)}$ неправильное, то значение a_i истинно, а ошибка произошла в остатке по основанию m_{i+1}. Так как $d_{i+1\ i+2} = 0$, то ошибка по основанию m_{i+1} кратна делителю $d_{i+1\ i+2}$, т.е. $\Delta a_{i+1} = k_{i+1} d_{i+1\ i+2}$, где $k_{i+1} = 1, 2, ..., m_{i+1} / d_{i+1\ i+2} - 1$.

Определим совокупность значений $a_{i+1k_{i+1}} = (a_{i+1} - k_{i+1} d_{i+1\ i+2}) \mathrm{mod}\, m_{i+1}$. В этой совокупности обязательно найдется такое единственное число a_{i+1N}, при котором $A^{(N)} = (a_1, a_2, ..., a_{i+1\ N}, ..., a_n)$ правильное число.

Отметим, что очередность проверки гипотез произвольная и не влияет на вероятность коррекции ошибок. Однако с целью сокращения времени определения номера искаженного остатка, в первую очередь необходимо проверить гипотезу, для которой значение $m_k / d_{k-1\ k} (k = i, i+1)$ будет наименьшим.

Рассмотрим пример реализации разработанной процедуры исправления ошибок.

Пусть задана МСС основаниями $m_1 = 4, m_2 = 6, m_3 = 12, m_4 = 18$. При этом $M = 36$, $d_{12} = 2$, $d_{23} = 6$, $d_{34} = 6$, $d_{41} = 2$. Объем кодовых слов представлен в табл. 1.

Необходимо определить правильность числа $A = (3, 5, 7, 7)$ и в случае искажения его исправить. Для этого выполняется следующий алгоритм.

1. Определяется значения $a_{12} = 0$, $a_{23} = 2$, $a_{34} = 0$, $a_{41} = 0$. Так как $a_{23} \neq 0$, то число А неправильное, и ошибка произошла во втором либо в третьем остатках.

2. Так как $m_2 / d_{12} > m_3 / d_{34}$, то первая гипотеза состоит в том, что ошибка предполагается в остатке по основанию m_3.

3. Вычисляются значения $a_{3k_3} = a_3 - k_3 d_{23}$ для $k_3 = 1$. Получаем $a_{3k3} = a_3 - k_3 d_{23} = 7 - 1 \cdot 6 = 1$. При этом полученное число $A^{(1)} = (3, 5, 1, 7)$ не являются кодовым словом (табл. 1), т. е. первая гипотеза ошибочна. Ошибка произошла в остатке по основанию m_2.

4. Исправим число $\tilde{A}$. Для этого по значениям $k_3 = 1, 2$ определим искомое значение $a_{2k_2} = a_2 - k_2 d_{21}$, $k_2 = 1$, $a_{2k_2} = a_2 - k_2 d_{21} = 5 - 1 \cdot 2 = 3$, $k_2 = 3$, $a_{2k_2} = a_2 - k_2 d_{21} = 5 - 2 \cdot 2 = 2$.

Таким образом, получим два кодовых слова: $A^{(1)} = (3,3,7,7)$ и $A^{(2)} = (3,1,7,7)$. Из табл. 1 видно, что единственно правильным кодовым словом является значение $A^{(2)}$, т.е. $A_{исп} = A^{(2)} = (3,1,7,7)$.

Рассмотрим вариант работы устройства, позволяющего обнаруживать ошибки, используя рассмотренный выше алгоритм. Данное устройство содержит входной регистр, сумматоры по модулю m_i и $d_{1L}\,(i=\overline{2,n})$ и $(n-1)$ – входной элемент ИЛИ (рис. 1).

Пусть МСС задана основаниями $m_1 = 4,\ m_2 = 6,\ m_3 = 12$. При этом $\prod_{t=1}^{3} m_i = 288$, $L = M = [4,6,12] = 12$, $d_{12} = 2,\ d_{13} = 4$. Определим правильность числа $A = ((11),(001),(0111))$.

Таблица 1

Таблица кодовых слов

Число А (десятичный код)	Число А (МСС)			
	m_1	m_2	m_3	m_4
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	0	4	4	4
5	1	5	5	5
6	2	0	6	6
7	3	1	7	7
8	0	2	8	8
9	1	3	9	9
10	2	4	10	10
11	3	5	11	11
12	0	0	0	12
13	1	1	1	13
14	2	2	2	14
15	3	3	3	15
16	0	4	4	16
17	1	5	5	17
18	2	0	6	0
19	3	1	7	1
20	0	2	8	2
21	1	3	9	3
22	2	4	10	4
23	3	5	11	5
24	0	0	0	6
25	1	1	1	7
26	2	2	2	8
27	3	3	3	9
28	0	4	4	10
29	1	5	5	11
30	2	0	6	12
31	3	1	7	13
32	0	2	8	14
33	1	3	9	15
34	2	4	10	16
35	3	5	11	17

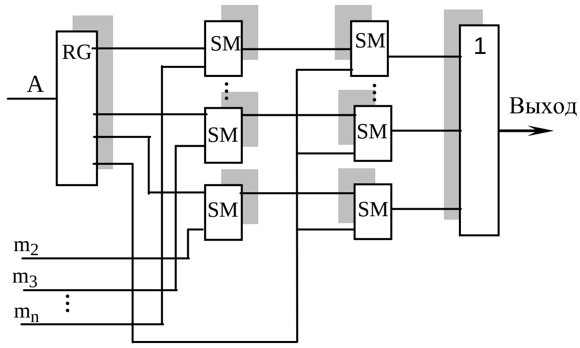

Рис. 1. Устройство обнаружения ошибок в МСС

На выходе сумматора по модулю m_2 получим $\bar{a}_2 = m_2 - a_2 = 0101$, на выходе сумматора по модулю $m_3 - \overline{a_3} = m_3 - a_3 = 0101$. На выходе сумматора по модулю d_{12} получим $(a_1 + \bar{a}_2) = 0(\mathrm{mod}\, d_{12})$, а на выходе сумматора d_{13} $(a_1 + \bar{a}_3) = 0(\mathrm{mod}\, d_{13})$.

Таким образом, поскольку на выходе устройства отсутствует сигнал – число А правильное (табл. 2).

Пусть число А искажено по основанию m_2 и пусть $\Delta a_2 = 011$, т.е. $\tilde{A} = ((0011),(0100),(0111))$.

Таблица 2

Таблица кодовых слов

A_i	Кодовые числа А в МСС		
	m_1	m_2	m_3
0000	00	000	0000
0001	01	001	0001
0010	10	010	0010
0011	11	011	0011
0100	00	100	0100
0101	01	101	0101
0110	10	000	0110
0111	11	001	0111
1000	00	010	1000
1001	01	011	1001
1010	10	100	1010
0101	11	101	1011

Тогда на выходе сумматора по модулю m_2 получим число $\bar{a}_2 = m_2 - \tilde{a}_2 = 010$, а на выходе сумматора по модулю m_3 число $\bar{a}_3 = m_3 - a_3 = 0101$. На выходе сумматора по модулю d_{12} получим $a_1 + \bar{a}_2 = 1(\mathrm{mod}\, d_{12})$, а по модулю d_{13} – $a_1 + \bar{a}_3 = 0(\mathrm{mod}\, d_{13})$. На выходе устройства получим операнд 0001, т.е. число неправильное.

Как видно из рассмотренных примеров, время обнаружения ошибок для МСС, заданной любой системой оснований, всегда равно трём условным временным тактам и не зависит (как это наблюдается для R-кодов) от числа n информационных оснований.

Рассмотренную структуру устройства для обнаружения ошибок можно упростить. Для этого вначале необходимо доказать соотношение $(a_1 + \bar{a}_i) = (\bar{a}_1 + a_i)\,\mathrm{mod}\, d_{1i}$, на основании которого будет составлен модифицированный алгоритм исправления ошибок. Пусть в операнде $A=(a_1,a_2,...,a_n)$ искажен остаток m_j, т.е. $\tilde{a}_j=(a_j+\Delta a_j)\bmod m_j$. Запишем систему равенств:

$$k_1=a_i-\tilde{a}_j=a_i+(m_j-\tilde{a}_j)=(a_i-a_j+m_j-\Delta a_j)\bmod m_j,$$

$$k_2=\tilde{a}_j-a_i=a_j+\Delta a_j-a_i=(a_j-a_i+\Delta a_j)\bmod m_j.$$

Сложим эти равенства и получим $k_1+k_2=m_j(\bmod m_j)$ или $k_1+k_2=0(\bmod d_{ij})$. Таким образом, видно, что $(a_1+\bar{a}_i)=(\bar{a}_1+a_i)\bmod d_{1i}$, следовательно, в устройстве для обнаружения ошибок (рис. 1) вместо $n-1$ сумматоров по модулю m_i достаточно иметь всего один сумматор по модулю m_1.

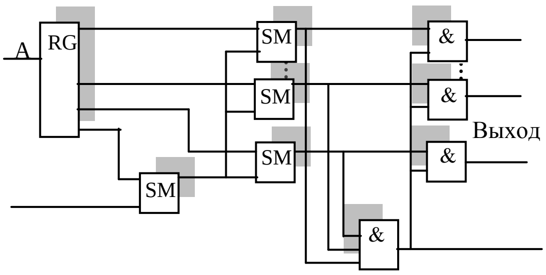

Рис. 2. Модифицированное устройство для обнаружения ошибок в МСС

Разработанный алгоритм реализации процесса обнаружения ошибок определяется следующими соотношениями:

$$a_2+m_1-a_1=(a_2+\bar{a}_1)\bmod d_{12},$$

$$a_3+m_1-a_1=(a_3+\bar{a}_1)\bmod d_{13}.$$

Вышерассмотренные варианты устройств позволяют гарантированно обнаружить факт искажения числа А, однако при этом не определяется номер основания, по которому произошло искажение остатка.

Рассмотрим вариант модификации алгоритма функционирования устройства, позволяющий устранить указанный недостаток. Пусть МСС задана основаниями $m_1=4, m_2=6, m_3=12, m_4=18$. При этом, $d_{12}=2, d_{23}=6, d_{34}=6, d_{41}=2$, $A=(0,2,8,2)$. И пусть число А искажено по основанию m_4, т.е. $\tilde{a}_4=(a_4+\Delta a_4)\bmod m_4$, а $\Delta a_4=5$.

Тогда на выходе сумматора по модулю m_2 получим значение $\bar{a}_2=m_2-a_2=4$, на выходе сумматора по модулю m_3 получим – $\bar{a}_3=m_3-a_3=4$, а на выходе сумматора по модулю m_4 получим - $\bar{a}_4=m_4-a_4=11$. И, соответственно на выходе сумматора по модулю d_{12} получим $(a_1+\bar{a}_2)=0(\bmod d_{12})$, по модулю d_{23} – $(a_2+\bar{a}_3)=0(\bmod d_{23})$, по модулю d_{34} – $(a_3+\bar{a}_4)=0(\bmod d_{34})$, по модулю d_{41} – $(a_4+\bar{a}_1)=1(\bmod d_{41})$.

На входах сумматоров по модулю d_{34} и d_{41} присутствует ненулевой результат операции $(a_m+\bar{a}_j)\bmod m_j$, поэтому открыт четвертый элемент И, т.е. на четвертой выходной шине присутствует сигнал. Отсюда следует, что ошибка произошла в четвертом остатке a_4.

Выводы

1. Предложенные алгоритмы позволяют относительно просто реализовать процедуру обнаружения и исправления однократных ошибок в МСС с взаимно попарно не простыми основаниями.
2. Полученные схемные решения устройств обнаружения и исправления однократных ошибок позволяют локализовать ошибочное основание и исправить ошибку в одном остатке всего за три условных временных такта, для любого числа оснований МСС.

Список литературы

1. *Акушский И.Я. Машинная арифметика в остаточных классах / И.Я. Акушский, Д.И. Юдицкий. – М.: Сов. радио, 1968. – 440 с.*
2. *Методы многоверсионной обработки информации в модулярной арифметике: моногр. / [Барсов В.И., Краснобаев В.А., Сиора А.А., Авдеев И.В.]. – Х.: МОН, УИПА, 2008. – 460 с.*
3. *Барсов В.И. Методология параллельной обработки информации в модулярной системе счисления: моногр. / В.И. Барсов, Л.С. Сорока, В.А. Краснобаев. – Х.: МОН, УИПА, 2009. –288 с.*

Поступила в редколлегию 6.08.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.А. Краснобаев, Полтавский национальный технический университет им. Юрия Кондратюка, Полтава.

РЕАЛІЗАЦІЯ ПРОЦЕДУРИ ВИЯВЛЕННЯ Й ВИПРАВЛЕННЯ ОДНОКРАТНИХ ПОМИЛОК ІНФОРМАЦІЇ У МСЧ ІЗ ВЗАЄМНО ПОПАРНО НЕ ПРОСТИМИ ОСНОВАМИ

В.І. Барсов

Розглядаються алгоритми й схемні рішення пристроїв, що реалізують процедури виявлення й виправлення однократних помилок інформації у модулярній системі числення із взаємно попарно не простими основами.

Ключові слова: *система обробки інформації й управління, модулярна система числення, взаємно попарно не прості основи.*

REALIZATION OF PROCEDURE OF DISCOVERY AND CORRECTION OF SINGLE ERRORS OF INFORMATION IN MSS WITH MUTUALLY IN PAIRS BY NOT SIMPLE GROUNDS

V.I. Barsov

Algorithms and schematics of devices, realizing procedures of discovery and correction of single errors of information in the modular number system with mutually in pairs by not simple grounds are examined.

Keywords: *system of treatment of information and management, modular number system, mutually in pairs not simple grounds.*