

УДК 514.753

И.В. Гребенник¹, Т.Е. Романова², С.Б. Шеховцов³, Г.Н. Яськов²¹ Харьковський національний університет радіоелектроніки, Харків² Інститут проблем машиностроєння ім. А.Н. Подгорного НАН України, Харків³ Харьковський національний університет внутрішніх дел, Харків

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОБЛАСТИ КОМПРОМИССА В ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ

Рассматривается задача построения достаточно плотных аппроксимаций области компромисса (множество Парето, множество Слейтера) для двухкритериальных задач в геометрическом проектировании. Приводятся пошаговые алгоритмы кусочно-линейных аппроксимаций и результаты тестовых примеров.

Ключевые слова: множество Парето, множество Слейтера, алгоритмы аппроксимации множества компромисса, геометрическое проектирование.

Введение

Создание интеллектуальных систем решения оптимизационных задач геометрического проектирования (задач размещения) является одной из актуальных проблем [1 – 3] данной предметной области.

Несмотря на разнообразие научных и практических приложений, оптимизационные задачи размещения, которые относятся к классу NP-сложных, можно описать в виде задач математического программирования, используя метод phi-функций Стояна [4]. В работе [3] приводится математическая модель основной оптимизационной задачи размещения.

Множество исходных данных X_0 порождает множество реализаций X_1 математической модели основной задачи размещения, для решения которых используется множество методов X_2 , алгоритмов X_3 , программ X_4 .

Концепция построения системы, предназначенной для решения задач геометрического проектирования, сводится к решению следующей оптимизационной задачи [2]:

$$f(x_0, x_R^*) = \text{extr}_{x_R \in X_R} (x_0, x_R), \quad \forall x_0 \in X_0, \quad (1)$$

где $x_R = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4 = X_R$, $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $x_3 \in X_3$, $x_4 \in X_4$.

Функционал $f(x_0, x_R)$ в общем случае является векторным, т. е. $f(x_0, x_R) = (f_1(x_0, x_R), f_2(x_0, x_R), \dots, f_k(x_0, x_R))$, где f_1, \dots, f_k – критерии “качества” решения оптимизационных задач размещения.

В общем случае каждому методу x_2 может соответствовать более чем один алгоритм x_3 , а каждому алгоритму x_3 – более чем одна программа x_4 .

Однако для удобства анализа и простоты полагаем, что между элементами множеств X_2 , X_3 , а также X_3 , X_4 задано инъективное отображение.

Таким образом, задача (1) сводится к решению следующей задачи [2, 5]:

$$f(x_0, x_p^*) = \text{extr}_{x_p \in X_p} (x_0, x_p), \quad \forall x_0 \in X_0, \quad (2)$$

где $x_p = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 = X_p$.

В данной работе под “качеством” решения оптимизационной задачи размещения понимается ее точность f_1 и быстродействие f_2 , т. е.

$$f(x_0, x_p) = (f_1(x_0, x_p), f_2(x_0, x_p)). \quad (3)$$

Поскольку в предлагаемом исследовании не учитываются погрешности алгоритмов X_3 и программ X_4 , связанные с точностью вычислительных процессов, то f_1 зависит от погрешности исходных данных, от вида исходных данных, влияющих на выбор $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$, а также непосредственно от точности метода $x_2 \in X_2$. При исследовании критерия f_2 не учитывается быстродействие алгоритмов X_3 и программ X_4 , связанных с быстродействием вычислительных процессов. Поэтому критерий f_2 зависит от исходных данных, влияющих на выбор $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$. Решение задачи (2)-(3) при $f_1 \neq 0$, $f_2 \neq 0$ предполагается осуществлять на множестве компромисса.

Приближенное построение множества компромисса (множество Парето или множество Слейтера [6, 7]) относится к числу важных и трудных задач численного анализа [8].

В данной статье приводятся алгоритмы, в основе которых лежат идеи, изложенные в [8], учитывающие особенности оптимизационных задач геометрического размещения.

Постановка задачи

Рассмотрим случай двухкритериальной задачи вида (2) – (3). Не теряя общности, введем следующие обозначения:

$$f_1(x) \rightarrow \max, x \in X$$

$$f_2(x) \rightarrow \max, x \in X.$$

Каждой точке $x \in X$ ставим в соответствие некоторую точку $f(f_1, f_2) \in G_f$, где $f_1 = f_1(x)$, $f_2 = f_2(x)$.

Пусть G_f – выпуклое множество, при этом граница множества G_f (в дальнейшем, frG_f) определяется уравнением $F(f) = 0$, причем F – выпуклая на G_f функция.

Целью данной работы является разработка алгоритмов достаточно плотной кусочно-линейной аппроксимации множества компромисса.

Приведенные ниже алгоритмы реализуют различные способы кусочно-линейной аппроксимации (множества Парето $P(G_f)$ и Слейтера $S(G_f)$) с наперед заданной точностью.

Алгоритм 1.

1. Строим множества A и B (рис. 1)

$$A = \text{Arg max}_{f \in G_f} F_2(f), \quad B = \text{Arg max}_{f \in G_f} F_1(f), \quad (4)$$

где $F_2(f) = f_2, F_1(f) = f_1$.

2. Определяем точки A_0 и B_0 (рис. 1), используя известные методы оптимизации

$$A_0 = (a_0^-, b_0^+) = \arg \max_{f \in A} F_1(f),$$

$$B_0 = (a_0^+, b_0^-) = \arg \max_{f \in B} F_2(f). \quad (5)$$

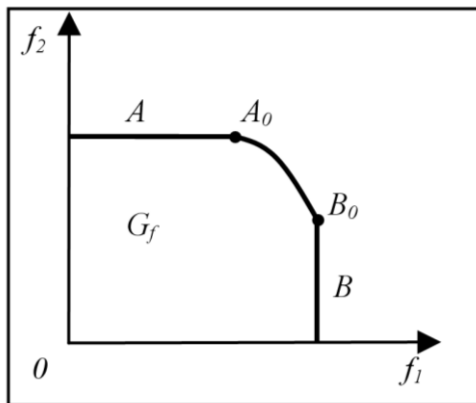


Рис. 1. Множества A и B , точки A_0 и B_0

Точка A_0 – решение системы

$$\begin{cases} F(f_1, f_2) = 0; \\ \tau^a = \tau_2^a; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, \end{cases} \quad (6)$$

где
$$\tau^a = -\frac{\frac{\partial F}{\partial f_1}}{\frac{\partial F}{\partial f_2}}, \quad \tau_2^a = -\frac{\frac{\partial F_2}{\partial f_1}}{\frac{\partial F_2}{\partial f_2}}.$$

С учетом того, что $\frac{\partial F_2}{\partial f_1} = 0$ и $\frac{\partial F_2}{\partial f_2} = 1$, система

(6) примет вид

$$\begin{cases} F(f_1, f_2) = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial f_1} = 0; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0. \end{cases}$$

Точка B_0 – решение системы

$$\begin{cases} F(f_1, f_2) = 0; \\ \tau^b = \tau_1^b; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, \end{cases} \quad (7)$$

где
$$\tau^b = \frac{1}{\tau^a}, \quad \tau_1^b = -\frac{\frac{\partial F_1}{\partial f_2}}{\frac{\partial F_1}{\partial f_1}}.$$

Поскольку $\frac{\partial F_1}{\partial f_1} = 1$ и $\frac{\partial F_1}{\partial f_2} = 0$, система (7) примет вид

$$\begin{cases} F(f_1, f_2) = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial f_2} = 0; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0. \end{cases}$$

3. Определяем значение параметра t (количество частей, на которые разбиваются отрезки $[a_0^-, a_0^+]$ и $[b_0^-, b_0^+]$).

4. Вычисляем параметры

$$\Delta^1 = \frac{a_0^+ - a_0^-}{t}, \quad \Delta^2 = \frac{b_0^+ - b_0^-}{t}.$$

5. Полагаем $i = 1$.

6. $a_i^- = a_0^- + \Delta^1 \cdot i, b_i^- = b_0^- + \Delta^2 \cdot i$.

7. Определяем точку A_i :

$$A_i = (a_i^-, b_i^*) = \arg \max_{f \in G_f, f_1 = a_i^-} F_2(f).$$

Точка A_i – решение системы

$$\begin{cases} F(f_1, f_2) = 0; \\ f_1 = a_i^-; \\ f_2 \geq 0. \end{cases}$$

8. Находим точку B_i :

$$B_i = (a_i^*, b_i^-) = \arg \max_{f \in G_f, f_2 = b_i^-} F_1(f).$$

Точка B_i – решение системы

$$\begin{cases} F(f_1, f_2) = 0; \\ f_2 = b_i^-; \\ f_1 \geq 0. \end{cases}$$

9. Если $a_i^* > a_i^-$ и $b_i^* > b_i^-$, то полагаем $i = i + 1$ и переходим к пункту 6. В противном случае переходим к пункту 10.

10. Считаем, что ломаная $L = P(G_f)$, $L = A_0A_1...A_{i-1}B_{i-1}...B_1B_0$ – аппроксимация множества Парето $P(G_f)$, а множество $\hat{S}(G_f) = L \cup A \cup B$ – аппроксимация множества Слейтера $S(G_f)$ (рис. 2).

Алгоритм 2.

Задаем достаточно малое значение параметра $\Delta \in (0,1)$.

1. Решаем задачу (4) алгоритма 1.

2. Определяем $t = \left\lfloor \frac{1}{\Delta} \right\rfloor + 1$.

3. Полагаем $i = 1$.

4. Вычисляем $\lambda_i = \frac{i}{t}$.

5. Определяем точку B_i :

$$B_i = \arg \max_{f \in G_f} \Phi_i(f), \tag{8}$$

где

$$\Phi_i(f) = \lambda_i f_1 + (1 - \lambda_i) f_2. \tag{9}$$

Точка B_i – решение системы

$$\begin{cases} F(f_1, f_2) = 0; \\ \tau^a = \tau_i; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, \end{cases} \tag{10}$$

где

$$\tau_i = - \frac{\frac{\partial \Phi_i}{\partial f_1}}{\frac{\partial \Phi_i}{\partial f_2}}.$$

Учитывая $\frac{\partial \Phi_i}{\partial f_1} = \lambda_i$, $\frac{\partial \Phi_i}{\partial f_2} = 1 - \lambda_i$, система (10)

примет вид

$$\begin{cases} F(f_1, f_2) = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial f_1} = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_i}; \\ \frac{\partial F}{\partial f_2} \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0. \end{cases}$$

6. Если $i < t - 1$, то полагаем $i = i + 1$ и переходим к пункту 3. В противном случае переходим к пункту 7.

7. Считаем, что ломаная $A_0B_1B_2...B_1B_0$ – приближение к области Парето.

Пусть множество G_f задается композицией выпуклых на G_f функций $g_l(f_1, f_2)$, таких что $g_l(f_1, f_2) \geq 0$, $l = 1, 2, \dots, m$.

Рассмотрим метод решения задачи

$$A = \arg \max_{f \in G_f} \Phi_1(f),$$

где $\Phi_1(f)$ определяется по формуле (9).

Максимум линейной функции цели находится либо в одной из точек $\text{Fr } G_f$, в которой угловые коэффициенты касательных к кривым, определяемым уравнениями $F(f_1, f_2) = 0$ и $g_1(f_1, f_2) = 0$, $l \in \{1, 2, \dots, m\}$, совпадают, либо в одной из точек пересечения пар кривых, определяемых уравнениями $g_p(f_1, f_2) = 0$ и $g_q(f_1, f_2) = 0$, $p \neq q \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Пусть точка f^1 – решение системы

$$\begin{cases} g_1(f_1, f_2) = 0; \\ \tau_i = \tau^1; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, \end{cases}$$

где $\tau^1 = - \frac{\partial g_1}{\partial f_1} : \frac{\partial g_1}{\partial f_2}$, $l = 1, 2, \dots, m$,

точка f^{pq} – решение системы уравнений

$$\begin{cases} g_p(f_1, f_2) = 0; \\ g_q(f_1, f_2) = 0; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, \end{cases}$$

$p < q = 1, 2, \dots, m$.

Тогда

$$A = \arg \max \{ \Phi(f^1) \mid f^1 \in G_f, l = 1, 2, \dots, m,$$

$$\Phi(f^{pq}) \mid f^{pq} \in G_f, p < q = 1, 2, \dots, m \}.$$

Рассмотрим пример построения области компромисса, используя алгоритм 1.

$$F(f_1, f_2) = (f_1 - 2)^2 + (f_2 - 3)^2 - 5^2.$$

1–2. Определяем точки A_0, B_0 (рис. 2):

$$A_0 = (a_0^-, b_0^-) = \arg \max_{f \in A} f_1(x), \tag{11}$$

$$B_0 = (a_0^+, b_0^+) = \arg \max_{f \in B} f_2(x).$$

Имеем

$$\tau^a = - \frac{\frac{\partial F}{\partial f_1}}{\frac{\partial F}{\partial f_2}}, \quad \tau_2^a = - \frac{\frac{\partial F_2}{\partial f_1}}{\frac{\partial F_2}{\partial f_2}}, \quad \tau_1^b = - \frac{\frac{\partial F_1}{\partial f_2}}{\frac{\partial F_1}{\partial f_1}}, \quad \tau^b = \frac{1}{\tau^a},$$

$$F_2(f_1, f_2) = f_2, \quad F_1(f_1, f_2) = f_1.$$

$$\frac{\partial F}{\partial f_1} = 2(f_1 - 2), \quad \frac{\partial F}{\partial f_2} = 2(f_2 - 3).$$

Тогда

$$\tau^a = - \frac{f_1 - 2}{f_2 - 3}, \quad \tau_2^a = 0,$$

$$\tau^b = -\frac{f_2 - 3}{f_1 - 2}, \tau_1^b = 0.$$

С учетом этого точка A_0 – решение системы:

$$\begin{cases} (f_1 - 2)^2 + (f_2 - 3)^2 - 5^2 = 0; \\ 2(f_1 - 2) = 0; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0. \end{cases}$$

Имеем $f_1^* = 2, f_2^* = 8, A_0(2, 8)$.

Точка B_0 – решение системы:

$$\begin{cases} (f_1 - 2)^2 + (f_2 - 3)^2 - 5^2 = 0; \\ 2(f_2 - 3) = 0; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0. \end{cases}$$

Имеем $f_1^* = 7, f_2^* = 3, B_0(7, 3)$.

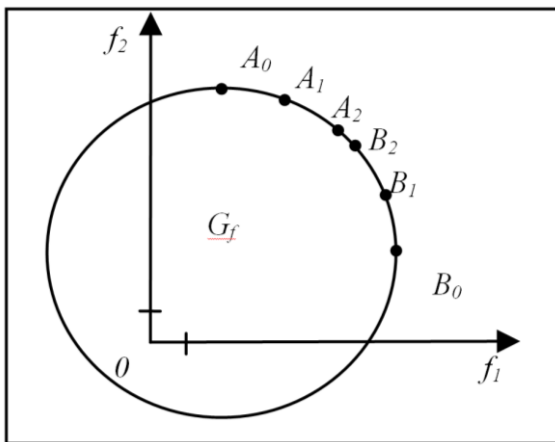


Рис. 2. Множество G_f , точки $A_0, A_1, A_2, B_2, B_1, B_0$

3. Полагая $\Delta = 3$, определяем количество частей t , на которые разбиваются отрезки $[a_0^-, a_0^+] = [2, 7]$ и $[b_0^-, b_0^+] = [3, 8]$, $t = 3$.

4. Вычисляем длину каждой части отрезков $[a_0^-, a_0^+]$ и $[b_0^-, b_0^+]$ как $\Delta^1 = 1 \cdot \frac{2}{3}, \Delta^2 = 1 \cdot \frac{2}{3}$ соответственно.

5. Полагаем $i = 1$.

$$6. a_1^- = a_0^- + \Delta^1 \cdot 1 = 3 \frac{2}{3}, b_1^- = b_0^- + \Delta^2 \cdot 1 = 4 \frac{2}{3}.$$

7. Находим точку

$$A_1 = (a_1^-, b_1^*) = \arg \max_{f \in G_f, f_1 = a_1^-} f_2(x):$$

$$\begin{cases} (f_1 - 2)^2 + (f_2 - 3)^2 - 5^2 = 0; \\ f_1 = 3 \frac{2}{3}, f_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$A_1 \approx \left(3 \frac{2}{3}, 7.714 \right).$$

8. Находим точку

$$B_1 = (a_1^*, b_2^-) = \arg \max_{f \in G_f, f_2 = b_1^-} f_2(x):$$

$$\begin{cases} (f_1 - 2)^2 + (f_2 - 3)^2 - 5^2 = 0; \\ f_1 \geq 0, f_2 = 4 \frac{2}{3}. \end{cases}$$

$$B_1 \approx \left(6.714, 4 \frac{2}{3} \right).$$

9. $a_1^* > a_1^-$ и $b_1^* > b_1^-$. Полагаем $i = 2$.

$$a_2^- = a_0^- + \Delta^1 \cdot 2 = 5 \frac{1}{3},$$

$$b_2^- = b_0^- + \Delta^2 \cdot 2 = 6 \frac{1}{3}.$$

Находим точку

$$A_2 = (a_2^-, b_2^*) = \arg \max_{f \in G_f, f_1 = a_2^-} f_2(x):$$

$$\begin{cases} (f_1 - 2)^2 + (f_2 - 3)^2 - 5^2 = 0; \\ f_1 = 5 \frac{1}{3}, f_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$A_2 \approx \left(5 \frac{1}{3}, 6.726 \right).$$

10. Находим точку

$$B_2 = (a_2^*, b_2^-) = \arg \max_{f \in G_f, f_2 = b_2^-} f_2(x):$$

$$\begin{cases} (f_1 - 2)^2 + (f_2 - 3)^2 - 5^2 = 0; \\ f_1 \geq 0, f_2 = 6 \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$B_2 \approx \left(5.726, 6 \frac{1}{3} \right).$$

11. $a_2^* > a_2^-$ и $b_2^* > b_2^-$. Полагаем $i = 3$.

$$a_3^- = a_0^- + \Delta^1 \cdot 3 = 7, b_3^- = b_0^- + \Delta^2 \cdot 3 = 8.$$

Находим точку

$$A_3 = (a_3^-, b_3^*) = \arg \max_{f \in G_f, f_1 = a_3^-} f_2(x):$$

$$\begin{cases} (f_1 - 2)^2 + (f_2 - 3)^2 - 5^2 = 0; \\ f_1 = 7, f_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$A_3 = B_0 = (7, 3).$$

12. Находим точку

$$B_3 = (a_3^*, b_3^-) = \arg \max_{f \in G_f, f_2 = b_3^-} f_2(x):$$

$$\begin{cases} (f_1 - 2)^2 + (f_2 - 3)^2 - 5^2 = 0; \\ f_1 \geq 0, f_2 = 8. \end{cases}$$

$$B_3 = A_0 = (2, 8).$$

13. $a_3^* < a_3^-$ и $b_3^* > b_3^-$.

14. Считаем, что ломаная $A_0A_1A_2B_2B_1B_0$ – приближение к области Парето.

Рассмотрим пример построения области компромисса, используя алгоритм 2.

Пусть множество G_f задается системой неравенств

$$\begin{cases} g_1(f_1, f_2) = -f_1^2 - (f_2 - 2)^2 + 16 \geq 0; \\ g_2(f_1, f_2) = -(f_1 - 2)^2 - (f_2 - 1)^2 + 9 \geq 0. \end{cases}$$

Задаем точность аппроксимации $\Delta = 0.3$.

1. Определяем $t = \left\lceil \frac{1}{0.3} \right\rceil + 1 = 4$.

2. Находим точку

$$A_0 = \arg \max_{f \in G_f} \Phi_0(f),$$

где $\Phi_0(f) = F_1(f) = f_2$.

Пусть точка f_0^1 – решение системы

$$\begin{cases} g_1(f_1, f_2) = 0; \\ \tau^1 = \tau_0; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, \end{cases}$$

где $\tau^1 = -\frac{\partial g_1}{\partial f_1} : \frac{\partial g_1}{\partial f_2}$, $1 = 1, 2$.

Имеем:

$$\frac{\partial g_1}{\partial f_1} = -2f_1, \quad \frac{\partial g_1}{\partial f_2} = -2(f_2 - 2),$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial f_1} = -2(f_1 - 2), \quad \frac{\partial g_2}{\partial f_2} = -2(f_2 - 1),$$

$$\tau^1 = -\frac{\partial g_1}{\partial f_1} : \frac{\partial g_1}{\partial f_2} = \frac{f_1}{f_2 - 2},$$

$$\tau^2 = -\frac{\partial g_2}{\partial f_1} : \frac{\partial g_2}{\partial f_2} = \frac{f_1 - 2}{f_2 - 1},$$

$$\tau_0 = -\frac{\partial F_2}{\partial f_2} : \frac{\partial F_2}{\partial f_1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Система (10) примет вид

$$\begin{cases} -f_1^2 - (f_2 - 2)^2 + 16 = 0; \\ \frac{f_1}{f_2 - 2} = 0; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} -(f_1 - 2)^2 - (f_2 - 1)^2 + 9 = 0; \\ \frac{f_1 - 2}{f_2 - 1} = 0; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0. \end{cases}$$

Тогда точки $f_0^1(0, 6)$ и $f_0^2(2, 4)$ являются решениями соответствующих систем.

Точка $f^{12}(3.73, 3.45)$ – решение системы

$$\begin{cases} -f_1^2 - (f_2 - 2)^2 + 16 = 0; \\ -(f_1 - 2)^2 - (f_2 - 1)^2 + 9 = 0; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$A_0 = \arg \max \{ \Phi(f_0^l) \mid f_0^l \in G_f, l = 1, 2, \Phi(f_0^{12}) \mid f_0^{12} \in G_f \} = (2, 4).$$

3. Находим точку

$$B_0 = \arg \max_{f \in G_f} \Phi_t(f),$$

где $\Phi_t(f) = F_2(f) = f_1$.

Пусть точка f_t^1 – решение системы

$$\begin{cases} g_1(f_1, f_2) = 0; \\ \tau^1 = \tau_t; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, \end{cases}$$

где $\tau_t = -\frac{\partial F_2}{\partial f_2} : \frac{\partial F_2}{\partial f_1} = \frac{0}{1} = 0$.

Точки $f_t^1(4, 2)$ и $f_t^2(5, 1)$ являются решениями систем

$$\begin{cases} -f_1^2 - (f_2 - 2)^2 + 16 = 0; \\ \frac{f_2 - 2}{f_1} = 0; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} -(f_1 - 2)^2 - (f_2 - 1)^2 + 9 = 0; \\ \frac{f_2 - 1}{f_1 - 2} = 0; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{aligned} B_0 &= \\ &= \arg \max \{ \Phi(f_t^l) \mid f_t^l \in G_f, l = 1, 2, \Phi(f^{12}) \mid f^{12} \in G_f \} = \\ &= (4, 2). \end{aligned}$$

4. Полагаем $i = 1$.

5. Вычисляем $\lambda_1 = \frac{1}{t} = \frac{1}{4}$.

6. Находим точку

$$B_1 = \arg \max_{f \in G_f} \Phi_1(f),$$

где

$$\Phi_1(f) = \frac{1}{4}f_1 + \frac{3}{4}f_2.$$

Пусть точка f_1^1 – решение системы

$$\begin{cases} g_1(f_1, f_2) = 0; \\ \tau^1 = \tau_1; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, \end{cases}$$

где

$$\tau_1 = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial f_1} : \frac{\partial \Phi_1}{\partial f_2} = -\frac{1}{3}.$$

Точки $f_1^1(1.27, 5.80)$ и $f_1^2(2.95, 3.85)$ являются решениями систем

$$\begin{cases} -f_1^2 - (f_2 - 2)^2 + 16 = 0; \\ \frac{f_1}{f_2 - 2} = \frac{1}{3}; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} -(f_1 - 2)^2 - (f_2 - 1)^2 + 9 = 0; \\ \frac{f_1 - 2}{f_2 - 1} = \frac{1}{3}; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0. \end{cases}$$

Имеем

$$B_1 = \arg \max \{ \Phi(f_1^1) \mid f_1^1 \in G_f, l=1, 2, \Phi(f^{12}) \mid f^{12} \in G_f \} = (2.95, 3.85).$$

7. $i < t-1 = 3$. Полагаем $i = i+1 = 2$.

8. Вычисляем $\lambda_2 = \frac{2}{t} = \frac{1}{2}$.

$$B_2 = \arg \max_{f \in G_f} \Phi_2(f),$$

где

$$\Phi_2(f) = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2.$$

9. Пусть точка f_2^1 – решение системы

$$\begin{cases} g_1(f_1, f_2) = 0; \\ \tau^1 = \tau_2; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, \end{cases}$$

где

$$\tau_2 = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial f_1} : \frac{\partial \Phi_1}{\partial f_2} = -\frac{1}{2}.$$

Точки $f_2^1(2.83, 4.83)$ и $f_2^2(4.12, 3.12)$ являются решениями следующих систем соответственно:

$$\begin{cases} -f_1^2 - (f_2 - 2)^2 + 16 = 0; \\ \frac{f_1}{f_2 - 2} = \frac{1}{2}; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} -(f_1 - 2)^2 - (f_2 - 1)^2 + 9 = 0; \\ \frac{f_1 - 2}{f_2 - 1} = \frac{1}{2}; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0. \end{cases}$$

Имеем

$$B_2 =$$

$$= \arg \max \{ \Phi(f_2^1) \mid f_2^1 \in G_f, l=1, 2, \Phi(f^{12}) \mid f^{12} \in G_f \} = (3.73, 3.45).$$

8. $i < 3$. Полагаем $i = i+1 = 3$.

9. Вычисляем $\lambda_3 = \frac{3}{t} = \frac{3}{4}$.

$$B_3 = \arg \max_{f \in G_f} \Phi_3(f),$$

где $\Phi_3(f) = \frac{3}{4}f_1 + \frac{1}{4}f_2.$

10. Пусть точка f_3^1 – решение системы

$$\begin{cases} g_1(f_1, f_2) = 0; \\ \tau^1 = \tau_3; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, \end{cases}$$

где $\tau_3 = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial f_1} : \frac{\partial \Phi_1}{\partial f_2} = -\frac{1}{2}.$

Точки $f_3^1(3.80, 3.27)$ и $f_3^2(4.85, 1.95)$ являются решениями следующих систем:

$$\begin{cases} -f_1^2 - (f_2 - 2)^2 + 16 = 0; \\ \frac{f_1}{f_2 - 2} = 3; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} -(f_1 - 2)^2 - (f_2 - 1)^2 + 9 = 0; \\ \frac{f_1 - 2}{f_2 - 1} = 3; \\ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0. \end{cases}$$

Имеем

$$B_3 = \arg \max \{ \Phi(f_3^1) \mid f_3^1 \in G_f, l=1, 2, \Phi(f^{12}) \mid f^{12} \in G_f \}, B_3 = (3.80, 3.27).$$

11. $i = t-1 = 3$.

Строим точки A_0, B_1, B_2, B_3, B_0 . Полагаем, что ломаная $A_0B_1B_2B_3B_0$ – аппроксимация множества Парето (рис. 3).

Для решения задачи (11) можно использовать систему GAMS/BARON (General Algebraic Modeling System/ Branch-And-Reduce Optimization Navigator) [9].

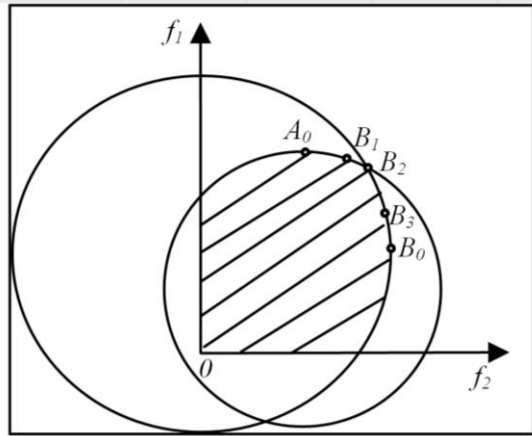


Рис. 3. Построение точек A_0, B_1, B_2, B_3, B_0 при аппроксимации области компромиссов для примера 2

Выводы

Результаты исследований, представленные в данной работе, могут быть использованы при разработке систем поддержки принятия решений, ориентированных на оптимизацию размещения геометрических объектов.

Список литературы

1. Wascher G. An improved typology of cutting and packing problems / G. Wascher, H. Hauner, H. Schumann // *European Journal of Operational Research*. – 2007. – 183(3, 16): 1109-1130.
2. Элементы теории геометрического проектирования / Н.И. Гиль, Т.Е. Романова, С.В. Яковлев и др. – К.: Наукова думка, 1995. – 241 с.
3. Chernov N. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem / N. Chernov, Y. Stoyan, T. Romanova // *Computational Geometry: Theory and Applications*. – 2010. – 43(5): 535-553.
4. Stoyan Yu.G. Φ -function and its basic properties / Yu.G. Stoyan // *Доп. НАН України*. – 2001. – № 8. – С. 112-117.
5. Гребенник И.В. Принятие решений в информационных системах решения задач геометрического проектирования / И.В. Гребенник, Т.Е. Романова, С.Б. Шеховцов // *Бионика интеллекта*. – 2008. – Вып.1 (68). – С. 79-83.
6. Кини Р.Л. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Р.Л. Кини, Х. Райфа. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.
7. Подиновский В.В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В.В. Подиновский, В.Д. Ногин. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
8. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа / Н.Н. Моисеев. – М.: Наука, 1981. – 488 с.
9. Tawarmalani M. A polyhedral branch-and-cut approach to global optimization / M. Tawarmalani, N.V. Sahinidis // *Mathematical Programming*. – 2005. – Vol. 103(2). – P. 225-249.

Поступила в редколлегию 16.08.2012

Рецензент: д-р техн. наук, доц. В.В. Шляхов, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ ОБЛАСТІ КОМПРОМІСУ У ГЕОМЕТРИЧНОМУ ПРОЕКТУВАННІ

І.В. Гребенник, Т.Є. Романова, С.Б. Шеховцов, Г.М. Яськов

Розглядається задача побудови досить щільних апроксимацій області компромісу (множина Парето, множина Слейтера) для двокритеріальних задач у геометричному проектуванні. Наводяться покрокові алгоритми кусково-лінійних апроксимацій та результати тестових прикладів.

Ключові слова: множина компромісу, множина Парето, множина Слейтера, алгоритми апроксимації множини компромісу, геометричне проектування.

ALGORITHM OF COMPROMISE REGION CONSTRUCTION IN GEOMETRIC DESIGN

I.V. Grebennik, T.E. Romanova, S.B. Shekhovtsov, G.N. Yaskov

The article considers problem of constructing too tight approximations of compromise region (Pareto set, Slater set) in order to solve geometric design problems. We give step to step algorithms for piecewise-linear approximations and provide test examples.

Keywords: compromise region, Pareto set, Slater set, approximation algorithms of compromise region, geometric design.