

УДК 004.942:519.816

Н.А. Миронова

Запорожский национальный технический университет, Запорожье

## МЕТОДЫ СИНТЕЗА ИТОГОВОГО РЕШЕНИЯ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКИХ СУЖДЕНИЙ ЭКСПЕРТОВ

Предложены методы синтеза итогового решения для модифицированного метода анализа иерархий на основе нечетких экспертных оценок. Разработаны информационные технологии обработки нечетких экспертных оценок.

**Ключевые слова:** методы синтеза итогового решения, модифицированный метод анализа иерархий, задача принятия групповых решений.

### Введение

Один из наиболее существенных недостатков классического метода анализа иерархий (МАИ) – возможность обработки лишь точечных оценок экспертов [1], что существенно сужает область применения метода при решении практических задач, которые характеризуются неопределенностью нестохастического характера и неполнотой информации об исследуемых объектах или процессах.

Неточность в оценках экспертов можно выразить с помощью интервальных оценок без распределения вероятностей, что приводит к необходимости применения интервальных и нечетких методов получения вектора приоритетов, и, следовательно, к разработке модифицированных МАИ на основе нечетких экспертных оценок [2].

В данных методах в качестве исходных данных используют нечеткие числа (треугольные или трапецевидные).

Модифицированный МАИ на основе нечетких экспертных оценок отличается от классического МАИ этапом формирования нечетких матриц попарных сравнений (МПС), методами получения вектора приоритетов и методами синтеза итогового решения.

На этапе формирования нечетких МПС каждый эксперт составляет нечеткую МПС, в которой указывает результаты попарного сравнения объектов (критериев, альтернатив).

Следующим этапом является расчет векторов приоритетов из полученных ранее нечетких МПС. Методы получения векторов приоритетов из нечетких МПС с учетом арифметики нечетких чисел рассмотрены в работах [2 – 4].

Существуют следующие методы синтеза итогового решения:

– линейная свертка: классический метод Саати, дистрибутивный, идеальный синтез и метод группового учета бинарных отношений предпочтений альтернатив с дистрибутивным синтезом [3];

– мультипликативная свертка: мультипликативный синтез;

– нелинейная свертка: максиминный синтез.

Вышеперечисленные методы предназначены для обработки точечных экспертных оценок, поэтому для метода анализа иерархий на основе нечетких экспертных оценок необходимо выполнить модификации существующих методов синтеза итогового решения.

**Цель работы** – разработать методы синтеза итогового решения для метода анализа иерархий на основе нечетких экспертных оценок.

**Постановка задачи.** Пусть  $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$  – множество альтернативных вариантов решений;  $K = (K_1, K_2, \dots, K_m)$  – множество критериев;  $\tilde{v}^{ij}$  – матрица компонентов нечеткого вектора приоритетов альтернативы  $P_i$  по критерию  $K_j$ :

$$\tilde{v}^{ij} = \begin{pmatrix} (v_1^{11}, v_2^{11}, v_3^{11}) & \dots & (v_1^{1m}, v_2^{1m}, v_3^{1m}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (v_1^{n1}, v_2^{n1}, v_3^{n1}) & \dots & (v_1^{nm}, v_2^{nm}, v_3^{nm}) \end{pmatrix};$$

$\tilde{w}^{K_j}$  – нечеткий вектор приоритетов критерия  $K_j$ :

$$\tilde{w}^{K_j} = ((w_1^{K_1}, w_2^{K_1}, w_3^{K_1}), \dots, (w_1^{K_m}, w_2^{K_m}, w_3^{K_m})).$$

Необходимо найти нечеткий вектор глобальных приоритетов  $\tilde{W}_i$  альтернатив  $P_i$ .

### Модификации методов синтеза итогового решения

Определение наилучшей альтернативы для модифицированного метода анализа иерархий на основе нечетких экспертных оценок выполняется с учетом арифметики нечетких чисел. Поэтому предлагается модифицировать следующие методы синтеза итогового решения [5 – 6]: классический метод Саати, дистрибутивный, идеальный и мультипликативный синтез, метод группового учета бинарных отношений предпочтений альтернатив с дистрибутивным синтезом, максиминный синтез для их дальнейшего

использования в МАИ на основе нечетких экспертных оценок.

Модификация классического метода Саати (для нечеткого треугольного числа) состоит в следующем:

проводится иерархический синтез для взвешивания векторов приоритетов весами критериев и рассчитывается сумма по всем соответствующим взвешенным компонентам векторов приоритетов уровня иерархий, который лежит ниже.

Для определения нечеткого вектора глобальных приоритетов  $\tilde{W}_i$  в матрице компоненты нечеткого вектора приоритетов  $\tilde{v}^{ij}$  альтернативы  $P_i$  по критерию  $K_j$  умножаются на нечеткий вектор приоритетов критерия  $\tilde{w}^{Kj}$  и результат суммируется:

$$\tilde{W}_i = \begin{bmatrix} ((v_1^{11} \cdot w_1^{K1}, v_2^{11} \cdot w_2^{K1}, v_3^{11} \cdot w_3^{K1}) + \dots \\ \dots + (v_1^{1m} \cdot w_1^{Km}, v_2^{1m} \cdot w_2^{Km}, v_3^{1m} \cdot w_3^{Km})), \\ \dots \\ ((v_1^{n1} \cdot w_1^{K1}, v_2^{n1} \cdot w_2^{K1}, v_3^{n1} \cdot w_3^{K1}) + \dots \\ \dots + (v_1^{nm} \cdot w_1^{Km}, v_2^{nm} \cdot w_2^{Km}, v_3^{nm} \cdot w_3^{Km})) \end{bmatrix}.$$

Затем соответствующие значения глобального вектора приоритетов каждой альтернативы сравниваются между собой. Относительно выгодная альтернатива имеет наивысшее значение глобального приоритета.

В модификации метода дистрибутивного синтеза (для нечеткого треугольного числа) нечеткий вектор глобальных приоритетов  $\tilde{W}_i$  рассчитывается по формуле:

$$\tilde{W}_i = \begin{bmatrix} ((r_1^{11} \cdot w_1^{K1}, r_2^{11} \cdot w_2^{K1}, r_3^{11} \cdot w_3^{K1}) + \dots \\ \dots + (r_1^{1m} \cdot w_1^{Km}, r_2^{1m} \cdot w_2^{Km}, r_3^{1m} \cdot w_3^{Km})), \\ \dots \\ ((r_1^{n1} \cdot w_1^{K1}, r_2^{n1} \cdot w_2^{K1}, r_3^{n1} \cdot w_3^{K1}) + \dots \\ \dots + (r_1^{nm} \cdot w_1^{Km}, r_2^{nm} \cdot w_2^{Km}, r_3^{nm} \cdot w_3^{Km})) \end{bmatrix},$$

где  $r^{ij}$  – нормированные значения вектора приоритетов альтернатив:

$$r^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{(v_1^{11}, v_2^{11}, v_3^{11})}{\sum_{i=1}^n (v_1^{i1}, v_2^{i1}, v_3^{i1})} & \dots & \frac{(v_1^{1m}, v_2^{1m}, v_3^{1m})}{\sum_{i=1}^n (v_1^{im}, v_2^{im}, v_3^{im})} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{(v_1^{n1}, v_2^{n1}, v_3^{n1})}{\sum_{i=1}^n (v_1^{i1}, v_2^{i1}, v_3^{i1})} & \dots & \frac{(v_1^{nm}, v_2^{nm}, v_3^{nm})}{\sum_{i=1}^n (v_1^{im}, v_2^{im}, v_3^{im})} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, выполняется условие

$$\sum_{i=1}^n r^{ij} = (1, 1, 1)$$

для  $\forall j = 1, \dots, n$ .

В модификации метода идеального синтеза (для нечеткого треугольного числа) нечеткий вектор глобальных приоритетов  $\tilde{W}_i$  рассчитывается по формуле:

$$\tilde{W}_i = \begin{bmatrix} ((r_1^{11} \cdot w_1^{K1}, r_2^{11} \cdot w_2^{K1}, r_3^{11} \cdot w_3^{K1}) + \dots \\ \dots + (r_1^{1m} \cdot w_1^{Km}, r_2^{1m} \cdot w_2^{Km}, r_3^{1m} \cdot w_3^{Km})), \\ \dots \\ ((r_1^{n1} \cdot w_1^{K1}, r_2^{n1} \cdot w_2^{K1}, r_3^{n1} \cdot w_3^{K1}) + \dots \\ \dots + (r_1^{nm} \cdot w_1^{Km}, r_2^{nm} \cdot w_2^{Km}, r_3^{nm} \cdot w_3^{Km})) \end{bmatrix},$$

где  $r^{ij}$  – нормированные значения вектора приоритетов альтернатив получаются путем деления каждой компоненты нечеткого вектора приоритетов альтернатив на максимальное из значений компонентов по данному критерию:

$$r^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{(v_1^{11}, v_2^{11}, v_3^{11})}{\max_{i=1, \dots, n} (v_1^{i1}, v_2^{i1}, v_3^{i1})} & \dots & \frac{(v_1^{1m}, v_2^{1m}, v_3^{1m})}{\max_{i=1, \dots, n} (v_1^{im}, v_2^{im}, v_3^{im})} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{(v_1^{n1}, v_2^{n1}, v_3^{n1})}{\max_{i=1, \dots, n} (v_1^{i1}, v_2^{i1}, v_3^{i1})} & \dots & \frac{(v_1^{nm}, v_2^{nm}, v_3^{nm})}{\max_{i=1, \dots, n} (v_1^{im}, v_2^{im}, v_3^{im})} \end{bmatrix}.$$

В методе идеального синтеза на сумму нормированных компонентов вектора приоритетов альтернатив по каждому критерию не накладывается условие равенства единице.

В модификации метода мультипликативного синтеза (для нечеткого треугольного числа) используется метод взвешенного произведения, согласно которому при сравнении альтернатив  $P_i$  и  $P_k$  рассчитывается произведение:

$$D = \left( \frac{P_i}{P_k} \right) = \prod_{j=1}^n \left( \frac{\tilde{v}^{ij}}{\tilde{v}^{kj}} \right)^{\tilde{w}^j}, \quad i, k = 1, \dots, n$$

Если величина  $D = \left( \frac{P_i}{P_k} \right)$  больше или равна единице, тогда альтернатива  $P_i$  предпочтительнее альтернативы  $P_k$ .

Нечеткий вектор глобальных приоритетов  $\tilde{W}_i$  рассчитывается следующим образом:

$$\tilde{W}_i = \prod_{j=1}^n r^{ij},$$

где

$$r^{ij} = \begin{pmatrix} ((v_1^{11})w_1^{K1}, (v_2^{11})w_2^{K1}, (v_3^{11})w_3^{K1}) & \dots & ((v_1^{1m})w_1^{Km}, (v_2^{1m})w_2^{Km}, (v_3^{1m})w_3^{Km}) \\ \dots & \dots & \dots \\ ((v_1^{n1})w_1^{K1}, (v_2^{n1})w_2^{K1}, (v_3^{n1})w_3^{K1}) & \dots & ((v_1^{nm})w_1^{Km}, (v_2^{nm})w_2^{Km}, (v_3^{nm})w_3^{Km}) \end{pmatrix}.$$

Модификация метода группового учета бинарных отношений предпочтений альтернатив с дистрибутивным синтезом (для нечеткого треугольного числа) состоит в декомпозиции задач на подзадачи, одновременно исследуется только пара альтернатив из всего множества альтернатив.

Рассматриваются  $n(n-1)/2$  подзадач и определяются  $n(n-1)/2$  пар глобальных векторов приоритетов альтернатив

$$(\tilde{w}_{P_i}^{ik}, \tilde{w}_{P_k}^{ik}),$$

где  $\tilde{w}_{P_i}^{ik}$  – компонента глобального вектора приоритетов альтернативы  $P_i$  при одновременном рассмотрении только пары  $P_i$  и  $P_k$ ,  $i = 1, \dots, n$ , которая рассчитывается по следующему алгоритму:

Шаг 1. Определим

$$\tilde{r}^{ij} = \frac{\tilde{v}^{ij}}{\tilde{v}^{ij} + \tilde{v}^{kj}}, i \in \{i, k\},$$

$$\tilde{r}^{ij} + \tilde{r}^{kj} = (1, 1, 1).$$

Шаг 2.  $\tilde{W}_{P_i}^{ik}$  рассчитывается по методу дистрибутивного синтеза:

$$\tilde{W}_{P_i}^{ik} = \sum_{j=1}^m (\tilde{w}^{Kj} \cdot \tilde{r}^{ij}).$$

Шаг 3. Для объединения частных решений строится матрица

$$D = \left( \frac{\tilde{w}_{P_i}^{ik}}{\tilde{w}_{P_k}^{ik}} \right), i, k = 1, \dots, n,$$

которая удовлетворяет всем свойствам традиционной матрицы попарных сравнений: в которой альтернативы попарно сравниваются относительно всех критериев, и матрица попарных сравнений является обратносимметричной.

Шаг 4. Вектор приоритетов, полученный из матрицы  $D$ , являются общим решением поставленной задачи.

В модификации максиминного синтеза для определения нечеткого вектора глобальных приоритетов  $\tilde{W}_i$  в матрице компоненты нечеткого вектора приоритетов  $\tilde{v}^{ij}$  альтернативы  $P_i$  по критерию  $K_j$  умножаются на нечеткий вектор приоритетов критерия  $\tilde{w}^{Kj}$  и выбирается минимальное значение:

$$\tilde{W}_i = \begin{bmatrix} \min((v_1^{11} \cdot w_1^{K1}, v_2^{11} \cdot w_2^{K1}, v_3^{11} \cdot w_3^{K1}), \dots, (v_1^{1m} \cdot w_1^{Km}, v_2^{1m} \cdot w_2^{Km}, v_3^{1m} \cdot w_3^{Km})), \\ \dots \\ \min((v_1^{n1} \cdot w_1^{K1}, v_2^{n1} \cdot w_2^{K1}, v_3^{n1} \cdot w_3^{K1}), \dots, (v_1^{nm} \cdot w_1^{Km}, v_2^{nm} \cdot w_2^{Km}, v_3^{nm} \cdot w_3^{Km})) \end{bmatrix}.$$

Далее соответствующие значения глобального вектора приоритетов каждой альтернативы сравниваются между собой.

Относительно выгодная альтернатива имеет максимальное значение.

Модификации методов синтеза итогового решения для нечетких трапециевидных чисел аналогичны по структуре вышеприведенным модификациям для нечетких треугольных чисел (с учетом особенностей трапециевидных чисел).

### Программная реализация методов синтеза итогового решения

В работе выполнена программная реализация методов синтеза итогового решения для нечетких треугольных и трапециевидных чисел.

Программа реализована в виде модуля «Методы синтеза итогового решения» для веб-ориентированной групповой системы поддержки принятия решений и позволяет:

- структурировать проблему и строить набор альтернатив;
- выделять характеризующие их критерии и задавать значимость этих критериев;
- оценивать альтернативы по каждому из этих критериев;
- предоставлять возможность эксперту вручную заполнять нечеткие МПС критериев одного уровня иерархии между собой, критериев нижнего уровня иерархии относительно критериев высшего уровня иерархии и альтернатив относительно критериев;
- определять векторы приоритетов из нечетких МПС следующими методами: метод Чанга, модифицированный метод нечеткого программирования предпочтений Михайлова, метод получения вектора приоритетов на основе генетического алгоритма [7];
- ранжировать альтернативы: определять наилучшую альтернативу одним из следующих методов синтеза итогового решения с учетом арифметики нечетких чисел: классический метод Саати,

дистрибутивний, ідеальний, мультипликативний і максимінний синтези;

– надавати інформацію кінцевому користувачеві в зручному вигляді (вивід звітів в форматі \*.html з можливістю перегляду в браузері);

– надає інструментарій для управління користувачами системи, модулями системи; відношенням Користувач/Аналіз; методами аналізу, підключених до системи;

– проводити аналіз рішення і обґрунтовувати отримані результати.

### Висновки

В роботі розв'язана актуальна задача в області підтримки прийняття групових рішень, заключаючись в розширенні можливостей практичного використання модифікованого методу аналізу ієрархій на основі нечітких експертних оцінок.

Научна новизна роботи полягає в тому, що отримано подальше розвиток модифікованого методу аналізу ієрархій на основі нечітких експертних оцінок.

Удосконалені методи синтезу кінцевого рішення, які відрізняються від існуючих можливостями визначення кінцевого рішення для нечітких експертних оцінок і дозволяють отримати найкращу альтернативу при автоматизації процесу прийняття групових рішень.

Практична цінність роботи полягає в тому, що розроблено інформаційні технології, які реалізують методи синтезу кінцевого рішення для модифікованого методу аналізу ієрархій на основі нечітких експертних оцінок при розв'язанні задач групового вибору.

### Список літератури

1. Саати Т.Л. *Прийняття рішень. Метод аналізу ієрархій* [Текст] / Т.Л. Саати. – М.: Радио і зв'язь, 1993. – 320 с.

2. Недашківська Н.І. *Методологія обробки нечіткої експертної інформації в задачах передбачення. Ч. 1* [Текст] / Н.Д. Панкратова, Н.І. Недашківська // *Проблеми управління і інформатики*. – 2007. – № 2. – С. 40-55.

3. Недашківська Н.І. *Оцінювання реверсу рангів у методі аналізу ієрархій* [Текст] / Н.І. Недашківська // *Системні дослідження та інформаційні технології*. – 2005. – № 4. – С. 120-130.

4. Недашківська Н.І. *Методологія обробки нечіткої експертної інформації в задачах передбачення. Ч. 2* [Текст] / Н.Д. Панкратова, Н.І. Недашківська // *Проблеми управління і інформатики*. – 2007. – № 3. – С. 49-63.

5. Миронова Н.О. *Інформаційні технології обробки нечітких експертних суджень* [Текст] / Н.О. Миронова, В.І. Дубровін // *Системи обробки інформації. Тези доповідей II Міжнародної науково-практичної конференції «Проблеми і перспективи розвитку ІТ-індустрії»*. – Х.: ХУПС, 2010. – № 7(88). – С. 192.

6. Миронова Н.О. *Модифіковані методи отримання найкращої альтернативи для методу аналізу ієрархій на основі нечітких експертних оцінок* [Текст] / Н.О. Миронова, В.І. Дубровін // *Тези доповідей IV міжнародної наукової конференції «Комп'ютерні науки та інженерія 2010 (CSE-2010)»*. – Львів: Львівська політехніка, 2010. – С. 246-247.

7. Дубровін В.І. *Метод отримання вектора пріоритетів з нечітких матриць парних порівнянь* [Текст] / В.І. Дубровін, Н.А. Миронова // *Искусственный интеллект*. – 2009. – № 3. – С. 464-470.

Поступила в редакцію 17.08.2012

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. С.І. Гоменюк, Запорозький національний університет, Запорозьке.

### МЕТОДИ СИНТЕЗУ ПІДСУМКОВОГО РІШЕННЯ НА ОСНОВІ НЕЧІТКИХ СУДЖЕНЬ ЕКСПЕРТІВ

Н.О. Миронова

*Запропоновані методи синтезу підсумкового рішення для модифікованого методу аналізу ієрархій на основі нечітких експертних суджень. Розроблені інформаційні технології обробки нечітких експертних оцінок.*

**Ключові слова:** методи синтезу підсумкового рішення, модифікований метод аналізу ієрархій, задача прийняття групових рішень.

### METHODS OF SYNTHESIS OF FINAL DECISION BASED ON FUZZY JUDGEMENTS OF EXPERTS

N.O. Mironova

*The methods of synthesis of final decision are proposed for the modified analytic hierarchy process based on fuzzy expert estimations. Developed information technologies of treatment of fuzzy expert estimation.*

**Keywords:** methods of synthesis of final decision, modified analytic hierarchy process, group decision problem.