УДК 53.083.92-53.088.23

Ю.П. Мачехин[1], Ю.С. Курской[2]

[1] *Харьковский национальный университет радиоэлектроники,*
[2] *Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков*

ЭНТРОПИЙНЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В статье получили развитие модели измерений [1] и анализа результатов измерений [2] динамических переменных (ДП) нелинейных динамических систем (НДС). Предложен подход к анализу результатов измерения, основанный на ключевых положениях вероятностной теории информации. Рассмотрена энтропия Шеннона, как величина, характеризующая неопределенность измерения и динамику поведения системы. Предложены выражения связи неопределенности измерения и энтропии, а также выражения энтропии Шеннона для ДП НДС.

Ключевые слова: *динамическая переменная, нелинейная динамическая система, неопределенность измерения, вероятностная теория информации, энтропия Шеннона.*

Вступление

Большинство реальных систем окружающего мира являются открытыми, нелинейными и диссипативными НДС. Состояние таких систем может бать описано набором ДП $(X(t), Y(t), Z(t))$, значения которых в любой момент времени t_i получаются из исходного набора $(X(t_0), Y(t_0), Z(t_0))$ по правилу, которое задает функция эволюции системы F [3]:

$$F(X(t_0), Y(t_0), Z(t_0))®(X(t_i), Y(t_i), Z(t_i)) . \quad (1)$$

Таким НДС свойственно сложное хаотичное поведение, к основными признакам которого относятся: зависимость от начальных условий; взаимодействие с шумами; расщепление фазовых траекторий; фазовый портрет системы представляет собой странный аттрактор. Схожесть поведения НДС различной природы привело к выработке общих подходов к их изучению и формированию междисциплинарной теории динамического хаоса [3, 4].

Анализ поведения ДП НДС с позиций теории динамического хаоса доказал ограниченную пригодность классических метрологических подходов и методов измерения в случае НДС [5, 6].

Измерения в НДС нуждаются в специальных моделях и методах.

Решение этой задачи вылилось в создание моделей измерения [1] и анализа результатов измерений [2] ДП НДС на основе принципов и методов теории динамического хаоса.

Ключевыми элементами модели измерения ДП НДС являются: схема измерительного эксперимента; способ оценки необходимого и достаточного количества измерительной информации; способ идентификации поведения системы и выбор математического аппарата для обработки результатов измерения; способ оценки результата измерений. Модель содержит порядок оценки неопределенности измерения как отдельных состояний ДП системы в различные моменты времени $u_i(X_i)$, так и неопределенность измерения всех возможных состояний ДП $U(X)$ [1].

Модель анализа результатов измерений ДП НДС предусматривает восстановление фазового портрета, вычисление фрактальной размерности и размерности вложения, показателей Ляпунова и энтропии Колмогорова-Синая НДС. В рамках модели получены выражения для определения ключевых характеристик системы с учетом неопределенности измерения ДП [2].

Важной характеристикой оценки результатов измерения является доверительная вероятность $P_Д$, значение которой выбирают исходя из закона распределения: для равномерного закона распределения $P_Д = 1$; для нормального закона распределения $P_Д = 0,95$; для распределения Лапласа $P_Д = 0,9$; для распределения Коши $P_Д = 0,8$ [7]. Чем более сложным образом ведет себя измеряемый параметр, тем меньшее значение назначается для $P_Д$.

При хаотичном поведении ДП НДС волевое назначение доверительной вероятности $P_Д$, как это практикуется для случайных процессов, неприемлемо. Обойти эту ситуацию позволяет использование вероятностной теории информации для описания неопределенности измерения [7]. Исследование результатов применения элементов вероятностной теории информации для оценки результатов измерения динамических переменных нелинейных динамических систем и является целью работы.

Элементы вероятностной теории информации

Основополагающим понятием вероятностной теории информации и информационного подхода является энтропия Шеннона H. Она является функцией состояния системы, ее величина характеризует качество измерительного эксперимента и меру неопределенности $U(X)$ значения X ДП. Для систем, которые могут находиться в состояниях X с плотностью распределения вероятности $p = p(X)$, энтропия Шеннона определяется выражением [7, 8]:

$$H = -\sum_i p(X_i)\ln p(X_i) \qquad (2)$$

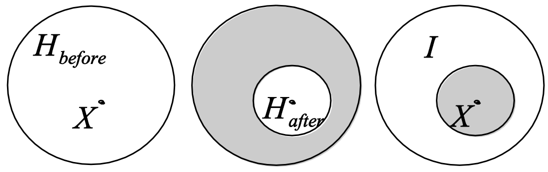
или в форме математического ожидания: $H = M[-\ln p(X)]$. Согласно (2) энтропия Шеннона принимает тем большие значения, чем меньшие значения принимает плотность распределения $p = p(X)$, при $p(X) \to 1$ $H \to 0$.

В понятиях теории информации смысл измерения состоит в уменьшении интервала неопределенности знания об измеряемой величине X (рис. 1). Количество информации, полученное в результате измерений, определяется выражением:

$$I = H_{before} - H_{after}, \qquad (3)$$

где H_{before} – энтропия измеряемой величины X до измерения;

H_{after} – энтропия измеряемой величины X после измерения.



а б в

Рис. 1. Визуализация информационного смысла измерения:
а – область неопределенности до измерения;
б – область неопределенности после измерения (выделена белым цветом); в – область отсутствия неопределенности, равная полученной информации (выделена белым цветом)

Энтропия измеряемой величины X до измерения H_{before} определяется диапазоном измерения средства измерительной техники $[X_{min}, X_{max}]$, $H_{before} = \ln(X_{max} - X_{min})$, а энтропия после измерения H_{after} – энтропийным интервалом неопределенности u_H, связанным с плотностью распределения выражением $u_H = 1/p(X)$. Согласно (3) смысл измерения заключается в сужении интервала неопределенности от $X_{max} - X_{min}$ до u_H.

Формальным определением энтропийного значения случайной величины есть выражение: $H_{after} = \ln u_H$. Энтропийное значение связано со среднеквадратическим отклонением σ выражением $k = u_H / 2\sigma$, из которого, зная σ, можно определить значения для u_H и H_{after}:

$$\left.\begin{array}{c} u_H = 2k\sigma, H_{after} = \ln 2k\sigma, \\ \text{или} \\ u_H = 2ku_A, H_{after} = \ln 2ku_A, \end{array}\right\} \qquad (4)$$

где k – энтропийный коэффициент распределения, различный для разных законов распределения;

u_A – стандартная неопределенность измерения по типу «А» [6].

Размер энтропийного интервала неопределенности u_H может быть вычислен строго математически, без необходимости назначения доверительной вероятности $P_Д$, что повышает доверие к результатам измерения. Согласно выражениям (2) и (4) неопределенность результата измерения случайной величины по типу «А» u_A может быть описана выражением:

$$u_A = \frac{\exp H_{after}}{2k} = \frac{1}{2k}\exp\left(-\sum_i p(X_i)\ln p(X_i)\right). \quad (5)$$

Выражение для количества информации (3) с учетом (4) примет вид:

$$I = \ln(X_{max} - X_{min}) - \ln 2ku_A = \ln\frac{X_{max} - X_{min}}{2ku_A}. \quad (6)$$

Энтропия Шеннона НДС

Преимущества применения энтропии Шеннона H для анализа результатов измерения случайных величин подводят к задаче об ее использовании в более сложных случаях – измерениях в НДС.

Рассмотрим результаты измерения ДП НДС, полученные с использованием модели измерения [1]. При измерениях в НДС получены n значений неопределенности $u(X_i)$ измерения состояния X_i переменной X. Неопределенности измерения отдельных состояний в фазовом пространстве превратятся в n областей $u(X_i)$, площади которых определяются значениями неопределенности результатов измерения каждого значения X_i (рис. 2).

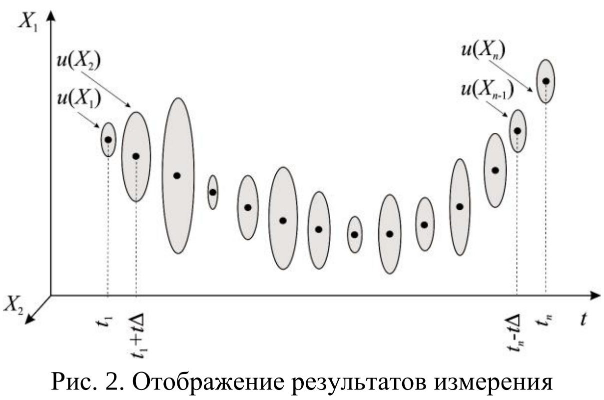


Рис. 2. Отображение результатов измерения динамической переменной X в моменты времени t_i, выполненные с интервалом Δt

Дискретное представление результатов измерительного эксперимента дает возможность судить о состояниях X_i ДП X системы в отдельные моменты времени t_i. Для каждого отдельного состояния может быть определена энтропия Шеннона и с ее помощью произведена оценка результатов измерения отдельного состояния. Но, практический интерес представляют не только и не столько значения отдельных состояний X_i ДП НДС X, сколько область U(X) всех возможных истинных значений системы $X_i \in U(X)$ и энтропия Шеннона результата измерения всех состояний ДП $H(X_1,...,X_n)$.

Для сложных систем, состоящих из ряда связанных между собой подсистем, в [9] вводится понятие условной энтропии Шеннона. В этой связи рассмотрим исходную НДС как совокупность связанных между собой n подсистем (рис. 2). Каждая такая подсистема характеризуется состоянием ДП X_i, плотностью вероятности $p(X_i)$, энтропией $H(X_i)$ и неопределенностью измерения ДП X_i $u(X_i)$ (рис. 3). Число подсистем соответствует количеству измерительных экспериментов n. Если отдельные состояния X_i связаны между собой, являются немарковскими, то и подсистемы можно считать связанными.

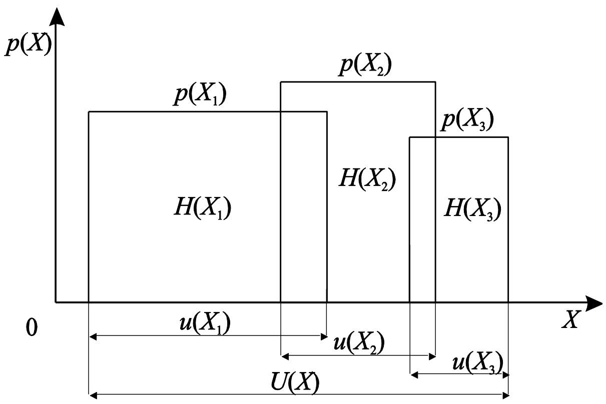


Рис. 3. Условная энтропия значений ДП НДС для случая n = 3

Согласно теореме о энтропии сложной системы [9] условная энтропия Шеннона для такой НДС может быть определена по формуле:

$$\begin{aligned} H(X_1,...,X_n) &= H(X_1) + H(X_2|X_1) + \\ &+ H(X_3|X_1,X_2) + ... + H(X_n|X_1,X_2,...,X_{n-1}), \end{aligned} \quad (7)$$

где $H(X_i|X_{i-1})$ – условная энтропия Шеннона. Энтропия каждой последующей системы $H(X_i)$ вычисляется исходя из того, что известна энтропия предыдущей $H(X_{i-1})$.

Важную роль при расчете энтропии Шеннона для НДС играет соотношение времени прогноза поведения НДС $\tau = (1/\lambda)\ln(1/\lambda)$ (где λ – показатель Ляпунова, характеризующий меру хаотичности НДС) [3] и интервала времени Δt, разделяющего измерительные эксперименты. Если в течение времени прогноза τ выполняется m измерений ДП, то будем считать, что имеется m связанных подсистем. В случае, если $\tau = m\Delta t$, из выражения (7) можно исключить связи между событиями, отстоящими во времени на величину, большую $m\Delta t$. Так, для $m = 1$ выражение (7) примет вид:

$$H(X_1,...,X_n) = H(X_1) + H(X_2 | X_1) + \\ + H(X_3 | X_2) + ... + H(X_n | X_{n-1}).$$

Условная энтропия Шеннона для двух объединенных подсистем может быть выражена через плотность вероятности формулой:

$$H(X_i | X_{i-1}) = -\sum_{i-1}\sum_{i} p_{i-1} p(X_i | X_{i-1}) \ln p(X_i | X_{i-1}), \quad (8)$$

где p_{i-1} – плотность вероятности состояния X_{i-1};

$p(X_i | X_{i-1})$ – плотность вероятности состояния X_i при условии известной плотности вероятности состояния X_{i-1},

или в форме математического ожидания:

$$H(X_i | X_{i-1}) = M[-\ln p(X_i | X_{i-1})].$$

В случае, если $\tau < \Delta t$, подсистемы, характеризующиеся значениями ДП X_i НДС в отдельные моменты времени t_i, можно считать не связанными между собой, и выражение (7) примет вид:

$$H(X_1,...,X_n) = H(X_1) + H(X_2) + ... + H(X_n). \quad (9)$$

Так как условная энтропия Шеннона $H(X_i | X_{i-1})$ не может превосходить безусловную $H(X_i)$ $H(X_i | X_{i-1}) \le H(X_i)$, а при условии $H(X_{i-1} | X_i) \ne 0$ выполняется строгое неравенство $H(X_i | X_{i-1}) < H(X_i)$ [9], условная энтропия Шеннона хаотичной НДС H_{chaos} (7) меньше безусловной энтропии динамической системы со случайным поведением $H_{stohast}$ (8) $H_{chaos} < H_{stohast}$. Поэтому, согласно выражению (3) информация, полученная при измерении ДП НДС в состоянии хаоса, превышает информацию, полученную при измерении ДП, меняющегося случайным образом, при равенстве прочих условий $I_{chaos} > I_{stohast}$.

Кроме того, если система состоит из связанных подсистем, то из двух соседних подсистем, определяемых состояниями X_{i-1} и X_i, подсистема X_i является подчиненной подсистеме X_{i-1}. Энтропия подчиненной системы меньше энтропии независимой подсистемы.

Из этого следует, что с проведением измерений энтропия каждого последующего измерения будет меньше энтропии предыдущего.

Суммарная энтропия всех результатов измерения будет уменьшаться (рис. 3) до некоего минимального значения H_{min}.

Минимальное значение энтропии Шеннона в случае измерения постоянных во времени физических величин определяется совершенством методов и средств измерения, а также учетом случайных и систематических факторов, влияющих на процесс измерения.

В результате многократных измерений таких величин с каждым новым измерением значение энтропии Шеннона уменьшается, ее минимальное значение стремится к нулю $H_{min} \to 0$, а результат измерения x приближается к истинному значению измеряемой физической величины $x \to X$:

$$H_{after} = \lim_{x \to X} H(X) = H_{min} \to 0.$$

Согласно информационной теории измерения при $H_{min} \to 0$ будет получено максимально возможное количество информация об измеряемой величине, а область неопределенности (рис. 1, б) будет стремиться к точке (рис. 1, в), соответствующей истинному значению измеряемой величины X.

При измерении ДП НДС ситуация выглядит иначе. Многократные измерения ДП также приведут к уменьшению значения энтропии Шеннона $H_{before} > H_{after}$. Долговременные измерения и учет всех факторов, влияющих на результат измерения, уменьшат значения энтропии до некоего минимального значения $H_{after} \to H_{min}$. Однако, минимальное значение энтропии Шеннона не будет стремиться к нулю $H_{min} \ne 0$:

$$H_{after} = \lim_{x \to X} H(X) = H_{min} \ne 0.$$

Количество полученной информации о ДП НДС ограничивается некоторой областью неопределенности (рис. 1, б). Увеличение количества измерительных экспериментов и времени наблюдения за системой также не позволит уменьшить эту область. Причина заключается в том, что на значение неопределенности измерения, в случае НДС, влияют не только факторы, являющиеся причиной возникновения неопределенностей типа «А» и «В», которые могут быть учтены или исключены, но и характер поведения самой ДП НДС. В итоге, после обработки результатов измерения ДП НДС будут получены значения неопределенности измерения всех состояний X_i ДП X $U(X)$:

$$U(X) = (y_{min} - u_{min}, y_{max} + u_{max}), \quad (10)$$

где $y_{min} - u_{min}$ – минимальное значение измеряемой величины;

$y_{max} + u_{max}$ – максимальное значение измеряемой величины [1];

и энтропия ДП НДС после измерения, с учетом $H_{after} \to H_{min}$ и (4):

$$H_{min} = \ln[2kU(X)] \ne 0. \quad .(11)$$

Области значений, характеризующиеся выражениями (10) и (11), содержат в себе все возможные истинные значения динамической переменной X НДС (рис. 1, в).

Выводы

В статье получили развитие модели измерений и анализа результатов измерений динамических переменных нелинейных динамических систем.

Изучены преимущества применения вероятностной теории информации для оценки результатов измерения. Рассмотрены ее ключевые элементы – количество информации и энтропия Шеннона, как величины, характеризующие неопределенность измерения.

Предложены выражения для описания неопределенности измерения динамических переменных, как функции энтропии Шеннона, а также выражения энтропии Шеннона для нелинейных динамических систем.

Доказано, что количество информации, полученной при измерении динамических переменных хаотичных нелинейных динамических систем, превышает количество информации, полученные при измерении динамических переменных, меняющихся случайным образом, при равенстве прочих условий.

Многократные измерения неизменных во времени физических величин, и совершенствование измерительного эксперимента ведут к уменьшению значения энтропии Шеннона, которое, в идеале, стремится к нулю.

В случае измерения динамической переменной нелинейной динамической системы невозможно обеспечить близкое к нулю значение энтропии Шеннона. На значение энтропии в этом случае влияют не только факторы, являющиеся причиной возникновения неопределенностей измерения по типу «А» и «В», но и характер поведения самой динамической переменной. В результате измерительного эксперимента будут получены области значений, которые содержат в себе все возможные истинные значения динамической переменной нелинейной динамической системы.

Список литературы

1. *Мачехин Ю.П. Модель измерения параметров нелинейных динамических систем / Ю.П. Мачехин, Ю.С. Курской // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2012. – Вып. 1 (99). – С. 169-175.*
2. *Мачехин Ю.П. Анализ результатов измерений в нелинейных динамических системах / Ю.П. Мачехин, Ю.С. Курской // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2012. – Вып. 7 (105). – С. 117-122.*
3. *Кузнецов С.П. Динамический хаос / С.П. Кузнецов. – М.: Наука, 2000. – 295 с.*
4. *Лоскутов А.Ю. Очарование хаоса / А.Ю. Лоскутов // УФН. – 2010. – Том 180, №12. – С. 1304-1329.*
5. *Machekhin Yu. Physical models for analysis of measurement results / Yu. Machekhin // Measurement Techniques, Springer New York. – 2005. – Vol. 48, №6. – P. 555-561.*
6. *РМГ 43-2001. Рекомендации по межгосударственной стандартизации. Государственная система обеспечения единства измерений. применение "Руководства по выражению неопределенности измерений". Дата введения 2003-07-01.*
7. *Новицкий П.В. Оценка погрешностей результатов измерений; 2-е изд., перераб. и доп. / П.В. Новицкий, И.А. Зограф. – Л.: Издательство Энергоатомиздат, Ленингр. отделение, 1991. – 304 с.*
8. *Климонтович Ю.Л. Введение в физику открытых систем / Ю.Л. Климонтович. – М.: Янус-К, 2002. – 284 с.*
9. *Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов / Е.С. Вентцель. 7-е изд. стер. – М.: Высш. шк., 2001. – 575 с.*

Поступила в редколлегию 18.12.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Р.М. Трищ, Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков.

ЕНТРОПІЙНИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІЧНИХ ЗМІННИХ

Ю.П. Мачехін, Ю.С. Курський

У статті отримали розвиток моделі вимірювань та аналізу результатів вимірювань динамічних змінних нелінійних динамічних систем. Запропоновано підхід до аналізу результатів вимірювання, заснований на ключових положеннях ймовірнісної теорії інформації. Розглянута ентропія Шеннона, як величина, що характеризує невизначеність вимірювання та динаміку поведінки системи. Запропоновано вирази зв'язку невизначеності вимірювання та ентропії, а також вираз ентропії Шеннона для динамічних змінних нелінійних динамічних систем.

Ключові слова: *динамічна змінна, нелінійна динамічна система, невизначеність вимірювання, імовірнісна теорія інформації, ентропія Шеннона.*

ENTROPY ANALYSIS OF DYNAMIC VARIABLES

Yu. P. Machehin, Yu. S. Kurskoy

The measurement model and the results analysis model for dynamic variables of nonlinear dynamical systems are developed in this article. It's represented the approach for analysis of the measurement results that based on key elements of the probabilistic information theory. Shannon entropy is considered as the value that describ the measurement uncertainty and the dynamic of nonlinear dynamical systems. The formulas for connection between an measurement uncertainty and Shannon entropy and for Shannon entropy for dynamic variables of nonlinear dynamical systems are proposed.

Keywords: *dynamic variable, nonlinear dynamic system, measurement uncertainty, probabilistic information theory, Shannon entropy.*