УДК 621.391

С.М. Бабий, А.В. Шевченко, Алаа Мохаммед Абдул-Хади

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ СЕРИЙНЫХ ИЗДЕЛИЙ НА НАДЕЖНОСТЬ. I. ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ

Для моделирования используется метод Монте-Карло, позволяющий формировать смесь дефектных и качественных изделий в виде двух кластеров псевдослучайных чисел, моделирующих случайные интервалы времени возникновения отказов. При этом один из кластеров, являясь моделью множества качественных изделий, равномерно перемешан со вторым кластером, моделирующим множество дефектных изделий, процентным содержанием которого можно управлять. Сформированная партия изделий (генеральная совокупность) подвергается последовательным испытаниям, целью которых является подтвердить установленный заранее процент бракованных изделий, содержащихся в партии.

Ключевые слова: *выборка, вероятность приемки, вероятность браковки, риск заказчика, риск изготовителя, проверяемая гипотеза, альтернативная гипотеза, закон Пуассона.*

Введение

Процессу ввода в эксплуатацию изделий серийного изготовления (например, измерительных приборов) предшествует процедура их испытания на надежность. При массовом производстве изделий традиционным является метод однократной выборки количества испытываемых образцов n, по результатам испытаний которого принимается решение приема или браковки всей партии изделий N > n. При этом пользуются фиксированным объемом выборки, который гарантирует заданную точность ε и достоверность β контролируемого параметра прибора (например, время безотказной работы T)

$$P_n\left(T \pm \varepsilon\right) = \beta$$

Как правило, объем выборки изделий n, прошедших испытаний в дальнейшем не используется из-за потери работоспособности. Поэтому актуальной является задача минимизации числа испытываемых образцов выборки n при сохранении требуемых значений точности ε и достоверности β контролируемого параметра T.

В предлагаемой работе исследуется модель известного метода последовательного принятия решений [1], используемая для проведения испытаний. Модель позволяет в любой момент времени испытаний t принять одно из следующих решений:

- принять партию изделий;
- забраковать партию изделий;
- продолжать испытания;

Последовательный принцип принятия решений позволяет отказаться от использования фиксированного (предварительно определенного) объема выборки изделий n для испытаний. Объем выборки является случайным, и среднее его значение является меньше объема выборки при традиционных испытаниях. При этом сохраняются заданные ограничения на точность ε и достоверность β полученной оценки контролируемого параметра.

1. Сущность моделирования процесса испытаний

Имеется большая партия N изделий с неизвестной долей p ненадежных изделий. Назначаются допустимые вероятности α и β ошибочных решений и две критические доли P_0 и $P_1 > P_0$ ненадежных изделий. Если $P \le P_0$, то партия N считается качественной и принимается. Если $P \ge P_1$, то партия N считается некачественной и бракуется. Если $P_0 < P < P_1$, то испытания продолжаются. Решение может приниматься по выборке n фиксированного объема (классический случай), либо по выборке нарастающего объема (последовательный случай).

Моделирование должно экспериментально подтвердить теоретический вывод [1] о более экономичном методе последовательных испытаний по сравнению с традиционным методом однократной выборки за счет уменьшения объема “n” выборки и времени испытаний.

Этот вывод базируется на предложенном автором работы [1] критерии эффективности (3.72, 3.73 стр. 84), имеющим следующий вид:

$$\frac{E_i(n)}{n(\alpha,\beta)} < 1\ , \qquad (1)$$

где i = 0,1.

Знаменателем является фиксированный объем однократной выборки, вычисленный с учетом рисков принятия неверных решений:

- α – вероятность браковки партии качественных изделий;
- β – вероятность приемки партии бракованных изделий;

Числителем является среднее значение объема выборки, достаточное для принятия каждого из двух возможных решений:

- $E_1(n)$ - среднее значение объема выборки для приема партии изделий;
- $E_0(n)$ - среднее значение объема выборки для браковки партии изделий;

Очевидно, чем меньше отношение (1), тем экономичней метод последовательных испытаний по сравнению с методом однократной выборки. Выражение является базовым и используется в дальнейшем для экспериментальной проверки с помощью модели испытаний.

2 Выбор критерия принятия решения по результатам испытаний

Решение о том, принять или забраковать партию изделий объемом N по результатам испытаний случайно нарастающего объема выборки n(t) удобно рассматривать в условиях формулировки и проверки двух статистических гипотез о неизвестных параметрах средней наработки на отказ для экспоненциального распределения:

- проверяемая гипотеза H_0 о том, что истинная средняя наработка на отказ $T = T_0$;
- альтернативная гипотеза H_1 о том, что истинная средняя наработка на отказ $T = T_1$, где T_1 – минимальное приемочное значение параметра при этом $T_0 > T_1$;

Учитывая тот факт, что при экспоненциальном законе распределения времени возникновения отказов число отказов за заданный интервал времени t подчинено закону Пуассона, удобнее для расчетов и наблюдения критерий отношения наибольшего правдоподобия представить как функцию дискретной величины k (числа наблюдаемых отказов) [2, 3] за время t.

$$P(k) = \frac{P_1(k)}{P_0(k)} = \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^k \cdot e^{-\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_0}\right)\cdot t} \qquad (2)$$

Выражение (2) представляет собой отношение вероятностей появления двух выборок результатов испытаний одинаковой длины k, каждая из которых соответствует своей статистической гипотезе:

$$P_1(k) \to P(H_1) \text{ и } P_0(k) \to P(H_0).$$

При известных значениях T_1, T_0, k, t отношение вероятностей $\frac{P_1(k)}{P_0(k)}$ в моменты регистрации отказов t_k сравнивается с двумя положительными постоянными величинами:

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha}\ ;\ \ B = \frac{\beta}{1-\alpha}\ ,$$

где α – риск изготовителя забраковать бездефектное изделие;

β - риск заказчика принять дефектное изделие.

Оба параметра известны как ошибки принятия решения первого рода – α и второго рода – β. Численное значение параметра α называют также уровнем значимости критерия. Чем меньше уровень значимости α, тем меньше вероятность забраковать проверяемую гипотезу H_0, когда она верна. После определения констант α и β становится ясным физический смысл величин A и B. Константа A есть отношение вероятности браковки дефектных изделий к вероятности браковки хороших изделий, желательно её максимизировать. Константа B есть отношение вероятности приемки дефектных изделий к вероятности приемки хороших изделий, желательно ее минимизировать. Окончательно правило выбора решения имеет вид:

1. Принять партию, если $\frac{P_1(k)}{P_0(k)} \le B$;
2. Забраковать партию, если $\frac{P_1(k)}{P_0(k)} \ge A$; (3)
3. Продолжать испытания, если $B < \frac{P_1(k)}{P_0(k)} < A$

Из приведенных формул (3) остается неясным, как предотвратить возможно большую длительность испытаний в таком случае. В работе [3] показано, что если последовательное испытание на надежность усекается при утроенном числе отказов “r”, необходимом при испытаниях на надежность с ограничением по числу отказов или длительности, то риски α и β будут увеличиваться незначительно.

3. Алгоритм моделирования процесса последовательных испытаний серийных изделий на надежность

Предлагаемый алгоритм (рис. 1) формирует смесь качественных и дефектных изделий (в виде двух кластеров псевдослучайных чисел) вызываемых по одному последовательно во времени для испытаний. Результатом испытаний выборки случайного объема является прием или браковка партии изделий. Задачи, выполняемые алгоритмом:

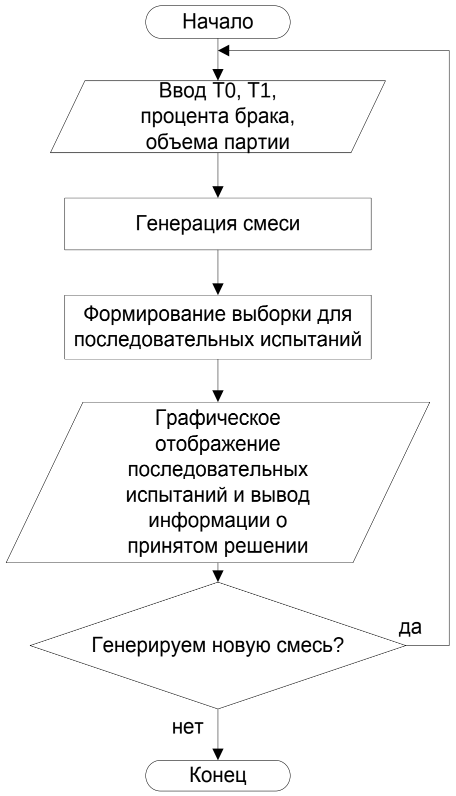

Рис. 1. Алгоритм моделирования процесса последовательных испытаний серийных изделий на надежность

1. Генерирование двух массивов случайных чисел $\left\{X_{0_i}\right\}_{N-D}$ и $\left\{X_{1_j}\right\}_D$ с заданными законами распределения с дальнейшим их равномерным перемешиванием в требуемом процентном соотношении. Массив $\left\{X_{0_i}\right\}_{N-D}$, содержащий только бездефектные изделия объемом N–D, формирует подмножество, соответствующее нулевой гипотезе H_0 принятия решения. Массив $\left\{X_{1_j}\right\}_D$, содержащий только дефектные изделия объемом D, формирует подмножество, соответствующее альтернативной гипотезе H_1.

2. Формирование выборки для последовательных испытаний

3. Графическое отображение процесса последовательных испытаний и принятия решения в динамическом режиме.

Рассмотрим подробно реализацию каждого из перечисленных пунктов.

3.1. Генерация смеси двух подмножеств случайных чисел с различными параметрами распределения с равномерным перемешиванием и заданным процентным отношением

Для целей моделирования процесса испытаний используется процедура генерации экспоненциально распределенных псевдослучайных чисел с заданными средним значением T_i и дисперсией σ_i^2 (рис. 2, где array – массив, содержащий после выполнения алгоритма смесь, объемом N, содержащую D дефектных изделий). При этом значение генерируемого числа x_i является моделью случайного времени t_i до отказа i-го изделия. Структурная схема, реализующая заданное процентное соотношение смеси двух выборок представлена на рис.3.

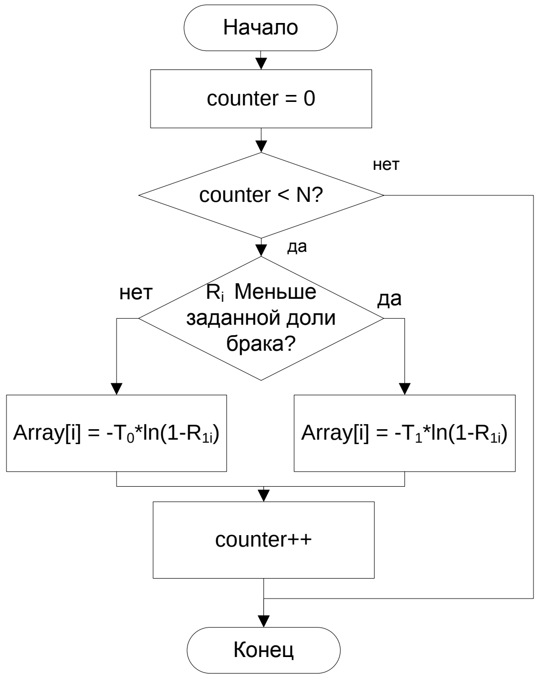

Рис. 2. Алгоритм генерации смеси

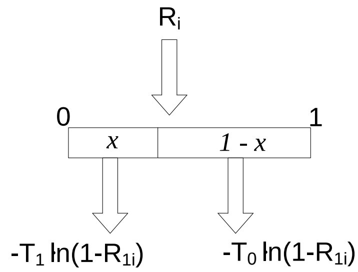

Рис. 3. Структурная схема получения заданного процентного соотношения

Массив равновероятных чисел $\left\{R_i\right\}$, генерируемых стандартной программой RANDOM, делится в заданном процентном соотношении:

x – доля бракованных, а $(1-x)$ – доля качественных изделий. Формирование двух различных подмножеств с одновременным их перемешиванием выполняется следующим образом. Случайное число R_i сравнивается с долей брака *x:*

- если $R_i \le x$, то формируется элемент бракованного подмножества G_0.
- если $R_i > x$, то формируется элемент качественного подмножества G_1.

Следующим шагом является получение элемента смеси с экспоненциальным распределением. Для этого выполняется преобразование:

$$Y_i = -T_k \cdot \ln\left(1 - R_{1_i}\right),$$

где $k = \{0,1\}$. R_{1_i} – случайное число, полученное на объеме выборки равновероятных чисел, лежащих в пределах 0..1.

Рассмотрим следующий пример: пусть смесь содержит 15% бракованных изделий с экспоненциальным распределением, имеющих среднее время безотказной работы $T_1 = 50$ часов, и 85% качественных изделий, имеющих среднее время безотказной работы $T_0 = 100$ часов.

Пусть в результате сортировки получено число $R_1 = 0,25$, так как $0,25 > 0,15$, то генерируем бездефектное изделие:

$$\text{array}[0] = -100 \cdot \ln\left(1 - 0,8\right) = 160,94,$$

где $R_{1_1} = 0,8$.

Пусть на следующем шаге цикла получено $R_2 = 0,1$, так как $0,1 < 0,15$, то генерируется бракованное изделие:

$$\text{array}[1] = -50 \cdot \ln\left(1 - 0,2\right) = 11,16$$

, где $R_{1_2} = 0,2$.

3.2. Формирование выборки для последовательных испытаний

Смесь дефектных и бездефектных изделий подвергается выборке для испытаний последовательно по одному.

На рис.4 представлен алгоритм формирования массива выборки. Его задачей является последовательно извлекать из общей партии изделие и испытывать его до отказа.

Изделия извлекаются из партии до тех пор, пока не будет принято решение о приемке или о браковке партии.

Возможно принятие одного из следующих решений:

- принять партию;
- забраковать партию;
- продолжать испытания;

В данном алгоритме используются два счетчика: count (для подсчета номера текущего элемента в данной выборке) и count_all (для подсчета номера следующего элемента, который будет взят из генеральной совокупности N). При этом первый сбрасывается в 0 при каждой новой выборке, а второй – только тогда, если это первая выборка в партии. Числа из смеси выбирают в цикле до тех пор, пока не будет однозначно принято решение о приемке или браковке, или пока не закончится партия. Как только выполнится одно из условий, на выходе в массиве test получаем готовую выборку.

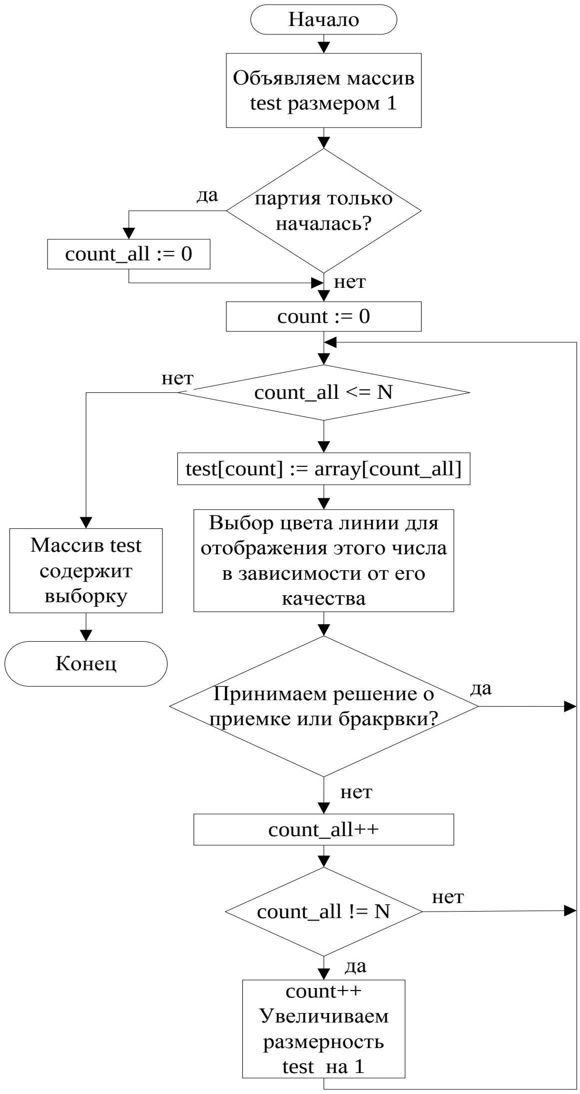

Рис. 4. Алгоритм формирования выборки для последовательных испытаний

3.3. Графическое отображение процесса последовательных испытаний и принятия решения в динамическом режиме

Преобразуем выбранный критерий (2) путем его логарифмирования с учетом случая 3.

$$\ln B < k \cdot \ln \frac{T_0}{T_1} + \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}\right) \cdot t < \ln A$$

Полученное неравенство преобразуем делением всех членов на $\ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right)$ и вычитанием из каждого члена $\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}\right) \cdot t$, или, что тоже, прибавлением к каждому члену $\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0}\right) \cdot t$:

$$\frac{\ln B}{\ln \frac{T_0}{T_1}} + \frac{\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0}\right)}{\ln \frac{T_0}{T_1}} \cdot t < r < \frac{\ln A}{\ln \frac{T_0}{T_1}} + \frac{\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0}\right)}{\ln \frac{T_0}{T_1}} \cdot t \quad (4)$$

Представим неравенство (4) в более удобном виде, а именно: $a + b \cdot t < k < c + b \cdot t$, где левая и правая части, будучи приравнены к нулю, дают уравнения параллельных прямых с углом наклона b. Значения констант в приведенном неравенстве следующие:

$$a = \frac{\ln B}{\ln \frac{T_0}{T_1}}; \quad c = \frac{\ln A}{\ln \frac{T_0}{T_1}}; \quad b = \frac{\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0}\right)}{\ln \frac{T_0}{T_1}}.$$

Для графического представления процесса испытаний значение генерируемого числа x_i является моделью случайного времени t_i до отказа i-го изделия. Это время t_i задается в виде непрерывно нарастающей горизонтальной линии, момент случайного прерывания которой приводит к одному из трех возможных решений. Решения задаются тремя непересекающимися подмножествами, точек случайного прерывания испытаний разделенными уравнениями прямых линий: $y_1 = a + b \cdot t$ и $y_2 = c + b \cdot t$.

В приведенных уравнениях независимая переменная t, имеющая размерность времени, представляет собой суммарную наработку времени для принятия соответствующего решения, а именно:

- в момент времени пересечения ступенчатой кривой с уравнением $y_1 = a + b \cdot t$ прекратить испытания и принять партию;
- в момент времени пересечения ступенчатой кривой с уравнением $y_2 = c + b \cdot t$ прекратить испытания и забраковать партию;
- в случае нахождения ступенчатой кривой испытаний в промежутке между прямыми y_1 и y_2 продолжать испытания до принятия первого или второго решения;

На рис.5 под управлением таймера осуществляется прорисовка ступенчатой кривой испытаний и принятия решения (браковка или прием), наступающие в моменты пересечения траектории испытаний с прямыми: $y_1 = a + b \cdot t$ или $y_2 = c + b \cdot t$. Для построения графика используются две переменные point1 и point2. При этом point2 всегда на единицу больше point1. По сигналу таймера рисуется горизонтальная линия от point1 до point2 и после этого проверяется условие превышения point2 величины времени безотказной работы испытываемого изделия.

На рис.6 приведена ступенчатая кривая, представляющая суммарную наработку времени проведения испытаний, достаточную для принятия решения о приемке партии $n_1 = \{t_1; t_2; t_3; t_4; t_5; t_6; t_7\}$, здесь $t_2; t_4; t_5$ – наработка на отказ бракованных изделий, а $t_1; t_3; t_6; t_7$ – наработка на отказ качественных изделий.

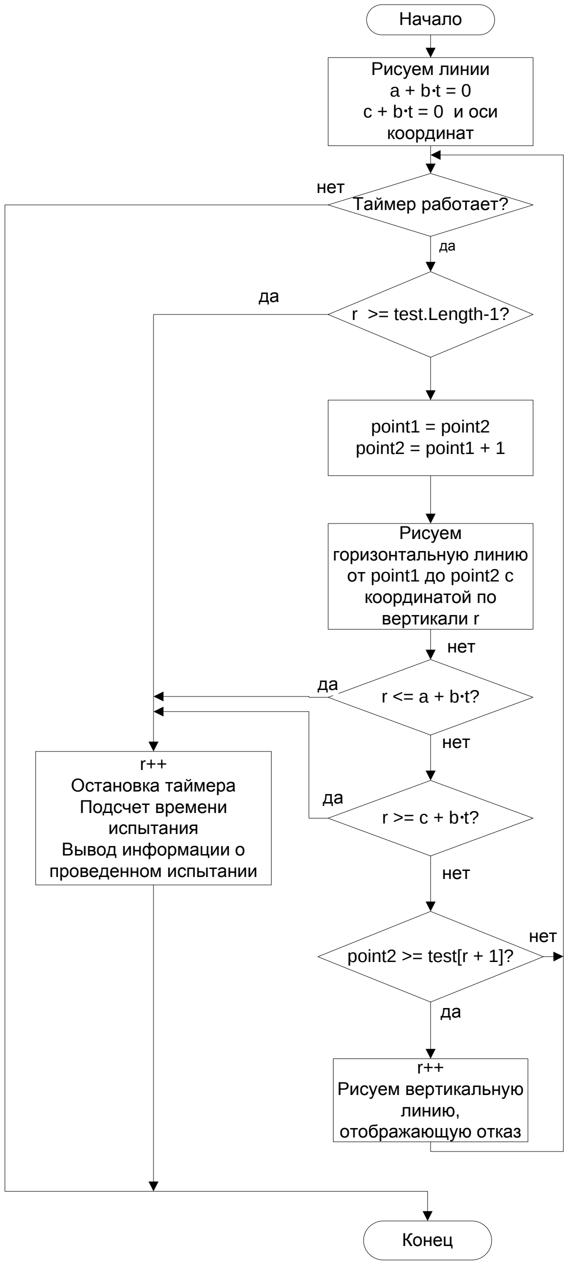

Рис .5. Алгоритм графического отображения процесса принятия решения

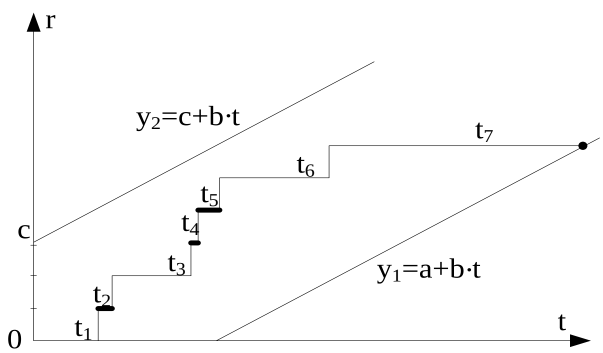

Рис. 6. Пример принятия решения о приемке. Результат испытаний: «прием»

На рис. 7 приведена ступенчатая кривая, представляющая суммарную наработку времени проведения испытаний, достаточную для принятия решений о браковке партии

$$n_2 = \{t_1; t_2; t_3; t_4; t_5; t_6; t_7; t_8\},$$

здесь $t_3; t_4; t_5; t_7; t_8$ – наработка на отказ бракованных изделий, а $t_1; t_2; t_6$ – наработка на отказ качественных изделий.

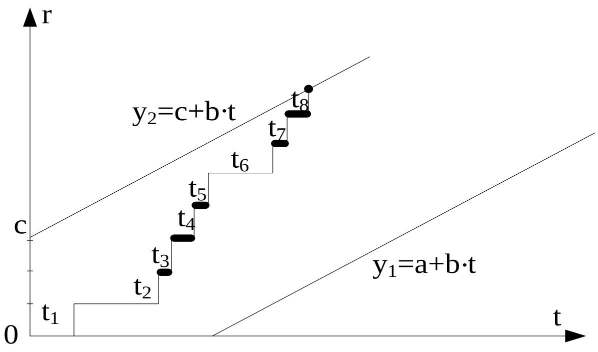

Рис. 7. Пример принятия решения о браковке. Результат испытаний: «брак»

Выводы

Рассмотрены возможности моделирования последовательных испытаний методом Монте-Карло. Предложен алгоритм моделирования испытаний, содержащий следующие процедуры:

- генерация смеси качественных и дефектных изделий с управляемым процентом засоренности партии;
- формирование выборки нарастающего объема, используемой для испытаний;
- организация контроля числа дефектных изделий в выборке в процессе её испытаний.

Безошибочное выполнение перечисленных процедур позволяет провести масштабное моделирование последовательных испытаний с участием 20 – 30 генеральных совокупностей, каждая объемом $N = 10^3$ наблюдений, статистический анализ которых выявит преимущества метода по сравнению с традиционным, использующим фиксированный объем выборки.

Список литературы

1. *Вальд А. Последовательный анализ / А. Вальд. – М. ФИЗМАТЛИТ, 1960. – 348 с.*
2. *Базовский И. Надежность, теория и практика / И. Базовский. – М.: Мир, 1965. – 284 с.*
3. *Гродзенский С.Я. Контроль надежности элементов систем управления на основе последовательных критериев и статистико-физического анализа [Электронный ресурс] / С.Я. Гродзенский. – 2002. – Режим доступа: http://www.dissercat.com/content/kontrol-nadezhnosti-elementov-sistem-upravleniya-na-osnove-posledovatel-nykh-kriteriev-i-stat.*
4. *Epstein B. Statistical Techniquesin Life Testing / B. Epstein // U. S. Dept. of Commerce Office of Technical Services Report PB 171580. – 1981. – P. 2.54-2.69.*

Поступила в редколлегию 3.12.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.С. Харченко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПОСЛІДОВНИХ ВИПРОБУВАНЬ СЕРІЙНИХ ВИРОБІВ НА НАДІЙНІСТЬ. I. ОРГАНІЗАЦІЯ ПРОЦЕСУ ПОСЛІДОВНИХ ВИПРОБУВАНЬ

С.М. Бабій, А.В. Шевченко, Алаа Мохаммед Абдул-Хаді

Для моделювання використовується метод Монте-Карло, що дозволяє формувати суміш дефектних і якісних виробів у вигляді двох кластерів псевдовипадкових чисел, моделюючих випадкові інтервали часу виникнення відмов. При цьому один із кластерів, будучи моделлю множини якісних виробів, рівномірно перемішаний з другим кластером, моделюючим множину дефектних виробів, процентним вмістом якого можна управляти. Сформована партія виробів (генеральна сукупність) піддається послідовним випробуванням, метою яких є підтвердити встановлений заздалегідь відсоток бракованих виробів, що містяться в партії.

Ключові слова: *вибірка, вірогідність приймання, вірогідність бракування, ризик замовника, ризик виробника, гіпотеза що перевіряється, альтернативна гіпотеза, закон Пуассона.*

MODELING SEQUENTIAL TESTS OF SERIAL PRODUCT RELIABILITY. I. ORGANIZATION OF SEQUENTIAL TEST

S.M. Babiy, A.V. Shevchenko, Alaa Muhammed Abdul-Hadi

For modeling using Monte Carlo method, which allows the formation of a mixture of defective and quality products in the form of two clusters of pseudo-random numbers, simulating random intervals of time before failure. This is one of the clusters, being a model set of high-quality products, evenly mixed with the second cluster, simulating a set of defective products, the percentage of which can be controlled. Formed party products (general set) is undergone sequential test whose purpose is to verify previously established percentage of defective items contained in the party.

Keywords: *sampling, acceptance probability, the probability of rejection, the risk of the customer, the risk of performer, hypothesis to be tested, alternative hypothesis, Poisson law.*