УДК 514.753

А.В. Панкратов

Институт проблем машиностроения НАН Украины, Харьков

ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ 2D-ОБЪЕКТОВ

Рассматривается информационная система 2D-Arrangment, предназначенная для решения задач оптимального размещения произвольных неориентированных 2D phi-объектов. Приводится архитектура системы, основанная на конструктивных средствах математического моделирования задач размещения и современных методах оптимизации.

Ключевые слова: *phi-объекты, непрерывные вращения, допустимые расстояния, phi-функции, математическое моделирование, генерация пространства решений, стартовые точки, оптимизация.*

Введение

Оптимизационные задачи размещения (Packing and Cutting), представляющие большой практический и теоретический интерес [1, 2], относятся к классу NP-трудных задач. В связи с этим в большинстве публикаций, посвященных решению задач раскроя и упаковки, используются эвристические методы. Разработка информационных систем решения задач размещения, основанных на автоматическом построении математических моделей, является актуальным направлением научных исследований в данной предметной области.

Задачи оптимального размещения сводятся к поиску наилучшего в соответствии с некоторым критерием качества размещения произвольных объектов $A_i \subset R^2$, $i = 1, 2, ..., N$ в заданной области размещения Ω при соблюдении набора технологических ограничений.

Вид технологических ограничений и критерия качества зависит от конкретной постановки задачи.

Раздел основного материала

Математическая модель основной задачи размещения

Поскольку область Ω в общем случае несвязна, представим ее как набор подобластей размещения $\Omega_j \subset R^2$, $j = 1, 2, ..., M$. Такое представление Ω в виде набора подобластей также позволит формализовать описание нестандартных областей с переменными метрическими характеристиками (например, выпуклой многоугольной оболочки для набора размещаемых объектов).

Объекты A_i, $i = 1, 2, ..., N$, и Ω_j, $j = 1, 2, ..., M$, принадлежат к классу φ-объектов [2], ограниченных дугами окружностей и отрезками прямых. В рамках данного исследования рассматриваются области, которые могут быть представлены в виде объединения и\или пересечения выпуклых многоугольников, кругов и полуплоскостей.

Для описания размещения объектов в области Ω и формализации технологических ограничений введем: матрицу $\aleph = (n_{ij})_{i=1, j=1}^{N,N}$, элемент n_{ij} которой равен 1, если пересечение объектов A_i и A_j недопустимо, и нулю в противном случае и матрица $\Xi = (b_{ij})_{i=1, j=1}^{N,M}$, элемент b_{ij} которой равен 1, если объект A_i должен принадлежать подобласти Ω_j и нулю в противном случае. Вектор переменных параметров объекта A в общем случае имеет вид $u_A = (x_A, y_A, \theta_A, t_A)$, где (x_A, y_A) – вектор трансляции, θ_A – угол поворота и t_A – коэффициента гомотетии объекта.

Для формализации технологических ограничений и ограничений на значения переменных метрических характеристик объектов вводится вектор $v = (v_1, v_1, ..., v_L)$ вспомогательных переменных, а также системы дополнительных ограничений вида

$$\lambda_1(u) = 0,\ \lambda_2(u) \ge 0,$$

где $u = \{u_{\Omega_1}, u_{\Omega_2}, ..., u_{\Omega_M}, u_{A_1}, u_{A_2}, \quad ..., u_{A_N}, v) = \{u_1, u_2, ..., u_\delta)$, $\delta = 4(M + N) + L$ – вектор параметров задачи. Для описания отношений между phi-объектами в аналитическом виде используется метод phi-функций Стояна [3, 4].

Phi-функцией $\Phi^{A_1A_2}$ для двух неориентированных phi-объектов $A_1 = A_1(u_{A_1})$ и $A_2 = A_2(u_{A_2})$, с переменными метрическими характеристиками называется непрерывная всюду определенная функция, для которой выполняются следующие свойства: $\Phi^{A_1A_2} < 0$, если $\operatorname{int} A_1 \cap \operatorname{int} A_2 \ne \varnothing$, $\Phi^{A_1A_2} = 0$, если $\operatorname{int} A_1 \cap \operatorname{int} A_2 = \varnothing$, $A_1 \cap A_2 \ne \varnothing$, $\Phi^{A_1A_2} > 0$, если $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, при условии $t_A > 0, t_B > 0$.

Замечание. Если по технологическим ограничениям между объектами и/или между объектами и границами областей размещения заданы минимально допустимые расстояния, то phi-функции заменяются на псевдонормализованные phi-функции [5].

С применением метода phi-функций математическая модель основной задачи размещения может быть записана в виде:

$$\underset{u \in W \subset R^{\sigma}}{\operatorname{extr}} F(u), \tag{1}$$

$$\begin{gathered} W = \{u \in R^{\sigma} : \Phi^{A_i \Omega_j^*} \geq 0, \forall i, j, b_{ij} > 0, \\ \Phi^{A_i A_j} \geq 0, \forall i, j, n_{ij} > 0, \lambda_1(u) = 0, \lambda_2(u) \geq 0, \\ t_i^A \geq 0, i = 1, 2, ..., N, t_j^{\Omega} \geq 0, j = 1, 2, ..., M\}, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\Omega^* = R^2 \setminus \operatorname{int} \Omega$, $\operatorname{int} \Omega$ – внутренность Ω.

В [4] показано, что произвольный phi-объект A всегда может быть представлен в виде

$$A = B_1 \bigcup B_2 \bigcup ... \bigcup B_n, \tag{3}$$

где B_j принадлежат семейству базовых объектов $\Im = \{K, D, H, V\}$. Здесь K – выпуклый многоугольник, D – круговой сегмент, H – «шапка» и V – «рожок» (рис. 1).

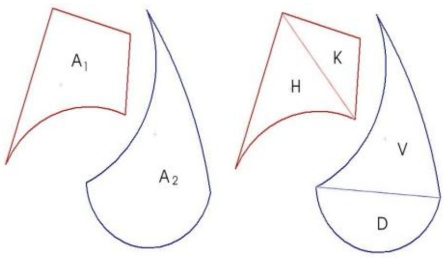

Рис. 1. Пример объектов, представленных в виде объединения базовых объектов

В [3] показано, что, с учетом (3), phi-функция для произвольных phi-объектов A_1 и A_2 может быть представлена как минимум базовых phi-функций, построенных для всех пар базовых объектов, формирующих phi-объекты A_1 и A_1, т.е.

$$\Phi^{A_1 A_2} = \min\{\Phi^{B_{1i} B_{2j}}, i = 1, 2, ..., n_1, j = 1, 2, ..., n_2\},$$

где $\Phi^{B_{1i} B_{2j}}$ – базовые phi-функция для множеств $B_{1i} \in \Im$, $B_{2j} \in \Im$.

Полный класс базовых phi-функций для неориентированных объектов построен в [4].

Базовые phi-функции (а значит и phi-функции для произвольных объектов) в общем случае являются композицией минимумов и максимумов гладких функций $f(u)$ без радикалов. В этой связи пространство решений W описывается структурой неравенств, обусловленной наличием максимумов, что выводит задачу (5) – (6) за класс задач математического программирования и, как следствие, делает невозможным непосредственное применение методов локальной оптимизации для ее решения.

Следует отметить, что если $A_i \equiv C$, $i = 1, 2, ..., N$, то условие (2) описывает систему нелинейных неравенств и задача (1) – (2) представляет собой классическую задачу математического программирования.

Отдельного внимания заслуживает случай $A_i \in \{C, K\}$, $i = 1, 2, ..., N$, для которого также можно сформулировать математическую модель задачи размещения, описывающую классическую задачу математического программирования.

Для построения модели поставим в соответствие каждому ненулевому элементу n_{ij} матрицы непересечений $\aleph$, для которого $A_i \equiv K$ и/или $A_j \equiv K$ дополнительный объект – полуплоскость P_{ij}, ограниченную прямой $\alpha_{ij}^2 + \beta_{ij}^2 + \gamma_{ij} = 0$ с переменными коэффициентами. Пусть таких пар N_1 и, соответственно, в вектор переменных u добавляется $3N_1$ переменных, а в ограничения задачи – N_1 равенств вида $\alpha_{ij}^2 + \beta_{ij}^2 = 1$.

Тогда математическая модель задачи размещения может быть записана в виде:

$$\underset{u \in W \subset R^{\sigma + N_1}}{\operatorname{extr}} F(u), \tag{4}$$

$$\begin{gathered} W = \{u \in R^{\sigma + N_1} : \Phi^{A_i \Omega_j^*} \geq 0, \forall i, j, b_{ij} > 0, \\ \Phi^{A_i A_j} \geq 0, \forall i, j, n_{ij} > 0, (A_i \equiv C) \wedge (A_j \equiv C), \\ F_{ij} \geq 0, \forall i, j, n_{ij} > 0, (A_i \equiv K) \vee (A_j \equiv K), \\ \lambda_1(u) = 0, \lambda_2(u) \geq 0, \alpha_{ij}^2 + \beta_{ij}^2 = 1, \\ t_i^A \geq 0, i = 1, 2, ..., N, t_j^{\Omega} \geq 0, j = 1, 2, ..., M\}, \end{gathered} \tag{5}$$

$$F_{ij} = \min\{\Phi^{A_i P_{ij}}, \Phi^{A_j P_{ij}^*}) .$$

Генерация пространства решений задачи

Для построения пространства решений задачи (1) – (2) используются phi-функции “непересечения” для всех пар базовых объектов: {Φ^{VV}, Φ^{HV}, Φ^{HH}, Φ^{DV}, Φ^{DH}, Φ^{DD}, Φ^{KV}, Φ^{KH}, Φ^{KD}, Φ^{KK}} и phi-функции “включения” базовых объектов в области Ω: { $\Phi^{\Omega^* K}, \Phi^{\Omega^* D}, \Phi^{\Omega^* H}, \Phi^{\Omega^* V}$ }.

Сопоставим каждому неравенству $\Phi^{AB} \geq 0$ для базовой phi-функции Φ^{AB} phi-дерево, концевым вершинам которого соответствуют неравенства вида $f(u) \geq 0$, а рёбрам – теоретико-множественные операции пересечения и объединения. На основе phi-деревьев, свойств теоретико-множественных операций и операций булевой алгебры строится дерево решений задачи (1) – (2). Концевым вершинам дерева решений задачи (1) – (2) соответствуют системы неравенств, описывающие всевозможные подобласти области допустимых решений задачи.

Таким образом, пространство решений W можно представить в виде $W = \bigcup\limits_{i=1,2,...,\eta} W_i$, где η – число концевых вершин дерева решений задачи, η равно произведению количества концевых вершин всех phi-деревьев, участвующих в формировании W.

Таким образом, задача (1) – (2) сводится к задаче

$$F(u^*) = \min\{F(u_1^*), F(u_2^*), ..., F(u_\eta^*)\}, \quad (6)$$

$$F(u_k^*) = \min_{u \in W_k \subset R^\sigma} F(u), \; k = 1, 2, ..., \eta. \quad (7)$$

Число η чрезвычайно быстро растет с ростом числа базовых объектов, участвующих в формировании размещаемых объектов. Поэтому предусмотрено два способа генерации пространства решений задачи (6) – (7).

Первый способ предполагает последовательную генерацию всех подобластей W_i, $i=1,\ldots,\eta$. Данный подход применим для поиска приближения к глобальному экстремуму только для задач с небольшим числом объектов.

Модификация первого подхода состоит в комбинации метода генерации подобластей W_i и локальной оптимизации на подобластях W_i – в этом случае можно реализовать метод ускоренного перебора.

Второй способ заключается в построении допустимой стартовой точки $u^0 \in W$ и генерации одного из подмножеств $W_i \subset W$, содержащих эту точку. При этом поиск локального экстремума на области W сводится к циклически повторяющимся процедурам: генерации $W_i \subset W$, используя стартовую точку $u^0 \in W$ и локальной оптимизации. Процесс прерывается, когда стартовая точка является точкой локального экстремума для всех выделенных подобластей $W_i \subset W$.

Декомпозиция задач размещения (7)

Рассмотрим модификацию метода генерации подмножеств W_i из (7) и множества W для задачи (4) – (5) при наличии допустимой точки $u^0 \in W$.

Как правило, матрица условий задачи W_i является разреженной и имеет довольно большую размерность, однако вид неравенств, формирующих W такой, что матрицу невозможно привести к блочно-диагональному виду.

Идея предлагаемого подхода основана на учете особенностей задачи (6) – (7) и состоит в том, чтобы ограничить ξ-окрестностью параметры размещения каждого объекта. Простейшая (но не самая эффективная в смысле числа дополнительных ограничений) реализация предложенного метода состоит в том, что для каждого из объектов A_i формируется дополнительный круговой контейнер Ω_i^+ с фиксированными параметрами размещения и диаметром, на ξ превышающим диаметр объекта, при этом $A_i \subset \Omega_i^+$. Это позволяет исключить ограничения на непересечение всех пар объектов, у которых «индивидуальные» контейнеры не пересекаются. В систему ограничений задачи (7) добавляется N ограничений вида $\Phi^{A_i\Omega_i^+}(u) > 0$.

Процессы работы модифицированного генератора ограничений и локальной оптимизации производятся циклически до тех пор, пока среди активизированных ограничений в точке локального экстремума присутствует хотя бы одно «искусственное» ограничение на принадлежность размещаемого объекта «индивидуальному» контейнеру.

В результате осуществляется декомпозиция исходной задачи с числом ограничений порядка $O(N^2n^2)$ на последовательность задач с числом ограничений порядка $O(Nn)$, где n – среднее число базовых объектов, участвующих в формировании размещаемых объектов согласно (3).

Архитектура системы

Информационная система *2D-Arrangment* содержит в себе следующие логические модули:

– модуль ввода данных об объектах и области;

– модуль анализа корректности и преобразования данных об объектах и области;

– модуль ввода матриц непересечения и принадлежности для случая размещения в несвязных областях;

– модуль автоматической генерации матриц непересечения и принадлежности в случае, если информация не входит в постановку задачи;

– модуль задания функции цели с возможностью выбора варианта из галереи стандартных функций либо вводом произвольной полиномиальной функций цели на AMPL-подобном языке;

– модуль задания системы дополнительных ограничений с возможностью выбора варианта из галереи стандартных систем дополнительных ограничений и/или ввода системы произвольных полиномиальных ограничений на AMPL-подобном языке;

– модуль анализа исходных данных;

– модуль выбора метода решения (1) – (2) (автоматический с предоставлением ЛПР возможности выбора);

– модуль генерации дополнительных ограничений для объектов с переменными метрическими характеристиками;

– модуль формирования составных 2D-объектов в виде объединения базовых на основании исходных данных о 2D-объектах, заданных отрезками прямых и дугами окружностей;

– модуль построения эквидистантных 2D-объектов для задач с заданными минимально допустимыми расстояниями;

– модуль, содержащий библиотеку базовых 2D-phi-функций;

– модуль генерации пространства решений задачи (1) – (2) для глобальной оптимизации;

– модуль генерации допустимых стартовых точек $u^0 \in W$;

– модуль декомпозиции области допустимых решений W на подобласти W_i;

– модуль генерации W_i с возможностью импорта описания в файл формата AMPL;

– модуль локальной оптимизации;

– модуль глобальной оптимизации;

– модуль рендеринга полученных результатов.

Программная реализация

Наиболее важной компонентой информационной системы является модуль генерации пространства решений, который реализован как в виде независимой исполнимой программы, так и в виде DLL.

Используется три типа данных об объекте.

Исходные данные могут быть представлены как произвольное множество замкнутых и незамкнутых полигонов, полилиний или круговых (“*выпуклых*” и “*вогнутых*”) дуг и отрезков в случайном порядке, заданных в файле формата DXF (AutoCad). В системе реализованы коррекция малых разрывов и неточностей контура, выделение внешнего и внутренних контуров. Кроме того, осуществляется контроль правильности данных об объекте – исключаются объекты с самопересечением границ, взаимным пересечением контуров.

Обработанные данные об объекте – список дуг окружностей (выпуклых и вогнутых) и линейных сегментов, упорядоченный в порядке обхода против часовой стрелки.

Преобразованные данные – объект представляется как объединение произвольного количества базовых объектов, объектов-примитивов и дополнительных объектов. Всего используется четыре типа базовых объектов, что достаточно для точного покрытия любого φ-объекта. Примитивы используются в качестве вспомогательных объектов при работе с базовыми объектами (могут быть использованы непосредственно). Дополнительные объекты могут быть введены для ускорения вычисления phi-функций и/или для упрощения систем неравенств, описывающих область допустимых решений.

Преобразование данных – процесс осуществляется в два этапа. На первом осуществляется точное покрытие каждого из заданных объектов набором базовых объектов. На втором, если заданы ненулевые минимальные и/или максимальные допустимые расстояния, строятся эквидистантные объекты на основе информации о заданном расстоянии и внешнем контуре исходных объектов (рис. 2).

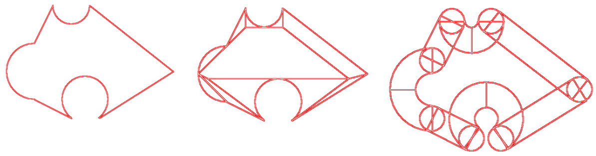

Рис. 2. Преобразование данных об объекте

Учет дополнительных ограничений на параметры объектов – допустимость трансляции, вращения и масштабирования (изменение коэффициента гомотетии) объектов включаются в систему дополнительных ограничений $\lambda_1(u) = 0$.

Поскольку в общем случае неравенство зависит от восьми параметров, то существует 256 варианта вида каждого из неравенств для пары объектов в зависимости от наложенных на объекты ограничений.

Символьное представление неравенств – неравенства I, описывающие пространство решений, генерируются в символьном виде и в общем случае зависят от восьми параметров

$$I = I(x_i, y_i, x_j, y_j, \theta_i, \theta_j, t_i, t_j) =$$

$$= (\sum_{k=1}^{K} M_k(x_i, y_i, x_j, y_j, \theta_i, \theta_j, t_i, t_j))^p \geq 0,$$

K>0 – положительное целое, M_K и p – произвольные числа.

Вводится два вида неравенств I:

простое

$$M_k(x_i, y_i, x_j, y_j, \theta_i, \theta_j, t_i, t_j) =$$

$$= a_k \cdot x_i^{p1k} \cdot y_i^{p2k} \cdot x_j^{p3k} \cdot y_j^{p4k} \cdot \sin(\theta_i)^{p5k} \cdot$$

$$\cdot \cos(\theta_i)^{p6k} \cdot \sin(\theta_j)^{p7k} \cdot \cos(\theta_j)^{p8k} \cdot t_{i1}^{p9k} \cdot t_j^{p10k},$$

$$p_{lk} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \quad l = 1, \ldots, 10, \quad k = 1, \ldots, K-1,$$

и составное

$$M_k(x_i, y_i, x_j, y_j, \theta_i, \theta_j, t_i, t_j) =$$

$$= a_k \prod_{l=1}^{L_k} I_{lk}(x_i, y_i, x_j, y_j, \theta_i, \theta_j, t_i, t_j)^{p_{lk}},$$

$$l = 1, \ldots, L_k, k = 1, \ldots, K-1, L_k = 1, \ldots, 30, p_{lk} \in \{0, 1\}.$$

Для введенных видов неравенств реализован ряд символьных операций:

• приведение подобных членов;

• определение формы I-неравенства – линейная, квадратичная или нелинейная (по классификации задачи оптимизации);

• расчет числа и получение списка ненулевых частных производных (для построения Якобиана);

• расчет числа и получение списка ненулевых смешанных частных производных и вторых частных производных (для построения Гессиана);

• представление I в виде текстовой строки (для просмотра в режиме отладки);

• сохранение в файл и чтение из файла, в том числе сохранение в файл на языке AMPL.

Реализован также ряд специализированных операций для символьного описания геометрических примитивов (точки, прямые, окружности, дуги, отрезки) с учётом их трансляции на вектор (u, v), вращения на угол θ и масштабирования с коэффициентом гомотетии t, а также символьного описания расстояний между геометрическими примитивами.

Также реализован модуль для символьного описания произвольных полиномиальных неравенств, включая

• расчет числа и получение списка ненулевых частных производных (для построения Якобиана);

• расчет числа и получение списка ненулевых смешанных частных производных и вторых частных производных (для построения Гессиана);

• представление в виде текстовой строки (для просмотра в режиме отладки);

• сохранение в файл и чтение из файла, в том числе сохранение в файл на языке AMPL.

Таким образом, модуль генератора пространства решений задачи (1) – (2) может работать как автономно, при этом формировать файлы постановки задач на языке AMPL, так и в составе программного комплекса, включающего в себя программы локальной оптимизации. Так, в анонсируемой системе реализован интерфейс генератора пространства решений с библиотекой нелинейной оптимизации IPOPT [6] и интерфейс с r-алгоритмом Шора.

Выводы

Информационная система 2D- Arrangment может быть использована для решения широкого класса прикладных 2D-задач размещения, возникающих в машиностроении (в частности, судостроении, ракетостроении), легкой промышленности (в частности, текстильной, кожевенной), стекольной промышленности и многих других.

A. Pankratov acknowledges the support of the Science and Technology Center in Ukraine and the National Academy of Sciences of Ukraine, grant 5710.

Список литературы

1. Wascher G. An improved typology of cutting and packing problems / G. Wascher, H. Hauner, H. Schumann // European Journal of Operational Research. – 183(3, 16): 2007. – 1109-1130.

2. Chernov N. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem / N. Chernov, Y. Stoyan, T. Romanova // Computational Geometry: Theory and Applications, vol. 43:5 (2010). – P. 535-553.

3. Bennell J. Tools of mathematical modelling of arbitrary object packing problems / J. Bennell, G. Scheithauer, Yu. Stoyan, T. Romanova // J. Ann. Oper. Res., 179 (2010). – P. 343-368.

4. Chernov N. Phi-Functions for 2D Objects Formed by Line Segments and Circular Arcs / N. Chernov, Y. Stoyan, T. Romanova, A. Pankratov // Advances in Operations Research, vol. 2012, Article ID 346358, 26 pages, 2012. doi:10.1155/2012/346358.

5. Стоян Ю.Г. Математическое моделирование ограничений на допустимые расстояния между геометрическими объектами / Ю.Г. Стоян, А.В. Панкратов, Т.Е. Романова // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 12-17.

6. Wächter A. On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Filter Line Search Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming / A. Wächter, L.T. Biegler // Mathematical Programming 106(1). 2006. – P. 25-57.

9. Шор Н.З. Использование модификации r -алгоритма для нахождения глобального минимума полиномиальных функций / Н.З. Шор, П.И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – 4. – С. 28-49.

Поступила в редколлегию 28.11.2012

Рецензент: д-р техн. наук, доц. В.В. Шляхов, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ІНФОРМАЦІЙНА СИСТЕМА ВИРІШЕННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ РОЗМІЩЕННЯ ДОВІЛЬНИХ НЕОРІЄНТОВАНИХ 2D-ОБ'ЄКТІВ

О.В. Панкратов

Розглядається інформаційна система 2D-Arrangment, призначена для вирішення задач оптимального розміщення довільних неорієнтованих 2D phi-об'єктів. Наводиться архітектура системи, заснована на конструктивних засобах математичного моделювання задач розміщення і сучасних методах оптимізації.

Ключові слова: *phi-об'єкти, безперервні обертання, допустимі відстані, phi-функції, математичне моделювання, генерація простору рішень, стартові точки, оптимізація.*

INFORMATION SYSTEM FOR SOLVING OPTIMIZATION PLACEMENT PROBLEMS FOR ARBITRARY UNDIRECTED 2D-OBJECTS

A.V. Pankratov

The paper considers information system 2D-Arrangment, intended for solution of optimal placement of arbitrary rotated 2D phi-objects. We present a system architecture based on a design by means of mathematical modeling of accommodation and modern methods of optimization.

Keywords: *phi-objects, continuous rotation, Clearances, phi-function, mathematical modeling, generation of the solution space, the starting point, optimization.*