УДК 519.857

Н.Б. Репнікова, А.В. Писаренко, К.М. Москаленко

Національний технічний університет України «КПІ», Київ

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ АСПЕКТИ МЕТОДУ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ДИСКРЕТНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Дана стаття присвячена розв'язанню дискретної задачі оптимального керування для систем другого порядку з одним вхідним і одним вихідним сигналами. Для розв'язання цієї задачі був використаний метод динамічного програмування. Алгоритм, запропонований в [1], був модифікований таким чином, щоб його можна було застосувати для розв'язання задач із закріпленим правим кінцем. За модифікованим алгоритмом було розроблено скрипт для пакету прикладних програм MATLAB. Також було побудовано модель описаної системи в MATLAB/Simulink, за допомогою якої було підтверджено правильність отриманого в результаті роботи скрипта розв'язку.

Ключові слова: *оптимальне керування, динамічне програмування, цифрова система.*

Вступ

Задачі оптимального керування виникають у багатьох галузях наукового знання - в техніці, біології, хімії, медицині, економічних і соціальних науках. Поява досить великого числа завдань прикладного змісту в різних областях природознавства робить актуальною розробку нових методів і алгоритмів розв'язання задач оптимального керування.

Найбільш широко при проектуванні систем керування застосовуються такі методи: варіаційне числення, принцип максимуму Понтрягіна та динамічне програмування Беллмана.

Постановка задачі. Метою даної роботи було розв'язання дискретної задачі оптимального керування для системи другого порядку, яка полягає у знаходженні такої послідовності оптимальних управлінь $u[n], n=\overline{1,N}$ (N - кількість відліків часу) з множини можливих значень управлінь системи, яка описується рівняннями зв'язку

$$x_1[n+1]=a_{11}x_1[n]+a_{12}x_2[n]+b_1u[n];$$

$$x_2[n+1]=a_{21}x_1[n]+a_{22}x_2[n]+b_2u[n],$$

де $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22},b_1$ і b_2 - задані коефіцієнти, що за N відліків часу система опиниться у заданих кінцевих станах $x_1[N]$ та $x_2[N]$ з множин можливих значень станів, і при цьому заданий критерій оптимальності

$$I=\sum_{n=i}^{N}G(x_1[n],x_2[n],u[n])$$

набуде мінімального значення.

Опис алгоритму розв'язку задачі

Для розв'язання даної задачі було запропоновано використати метод динамічного програмування.

У [1] описано алгоритм на основі цього методу для вирішення дискретної задачі з вільним правим кінцем (коли $x[N]$ може приймати будь-яке значення з множини можливих) для системи першого порядку. Алгоритм ґрунтується на розбиті області можливих значень управляючих впливів $\Omega(u)$ та області можливих значень змінної стану $Q(x)$ на певну кількість відрізків і отриманні певних наборів дискретних значень $u[n]$ та $x[n]$. Алгоритм складається з двох логічних частин: «зворотнього проходження», від останнього відліку часу до першого, та «прямого проходження», від першого відліку часу до останнього. При зворотньому проходженні для кожного відліку часу для кожного дискретного значення $x[n]$ шляхом мінімізації функції $G[n]$, яка представляє собою часткову суму доданків критерію оптимальності (не входять ті доданки, значення яких ще не було розраховано в процесі зворотнього проходження), знаходиться дискретне значення $u[n]$ та відповідне мінімальне значення функції $G[n]$, яке позначається $S[n]$ [2]. Наприкінці зворотнього проходження для кожного відліку часу ми маємо тривимірний масив наборів відповідних значень $x_1[n]$, $x_2[n]$, $u[n]$ та $S[n]$. При прямому проходженні на кожному кроці за рівнянням зв'язку розраховується наступне значення змінної стану системи x[n], округляється до найближчого дискретого значення та дістається з масиву відповідне цьому дискретному значенню розраховане оптимальне значення управляючого впливу $u[n]$. Наприкінці прямого проходження ми маємо масив оптимальних управляючих впливів, який і є розв'язком даної задачі.

Для розв'язання задачі із закріпленим правим кінцем для системи другого порядку, яка сформульована вище, запропонований у [1] алгоритм було модифіковано шляхом додання в зворотній прохід на кожному кроці розрахунку для кожного набору значень $x_1[n]$, $x_2[n]$ та $u[n]$ за рівнянням зв'язку наступних значень $x_1[n+1]$ та $x_2[n+1]$, їх округлення до найближчих дискретних значень та перевірки, чи присутня ця пара значення серед значень змінних стану для наступного відліку часу.

Реалізація алгоритму

На основі модифікованого алгоритму було розроблено скрипт для пакету прикладних програм MATLAB, який і виконує розв'язання зазначеної задачі.

Вхідними даними для скрипта є:

– два рівняння зв'язку, які описують систему;

– вираз, за яким розраховується критерій оптимальності I;

– кількість відліків часу N;

– область допустимих значень управлінь;

– початковий стан системи $x[1]$;

– кінцевий стан системи $x[N]$.

Результатом виконання скрипта є розраховані масив оптимальних управлінь, масив відповідних значень змінних стану системи та відповідне мінімально можливе значення критерію оптимальності.

Побудова моделі системи керування

Для перевірки адекватності отриманого розв'язку було побудовано модель у середовищі Simulink пакету MATLAB, яка інтерпретує описану систему (рис. 1).

Час моделювання відповідає заданій в умові задачі кількості відліків часу.

Об'єкт керування (ОК) представлено блоком "Discrete State-Space". На вхід ОК за допомогою блоку "From Workspace" подається отримана у результаті роботи скрипта послідовність оптимальних управлінь, яку можна побачити за допомогою блоку "Scope1". На виході ОК за допомогою демультиплексора та блоків "Quantizer1" і "Quantizer2" виконується квантування кожної змінної простору станів.

У блоці "Subsystem" (рис. 2) виконується розрахунок значення критерію оптимальності для побудованої моделі з встановленими параметрами. Результат цього розрахунку відображується у блоці "Display". Порівнюючи результати роботи написаного скрипта і побудованої моделі у частині розрахунку значення критерію оптимальності, бачимо, що результати співпадають. Отже, можна зробити висновок про правильність отриманого розв'язку.

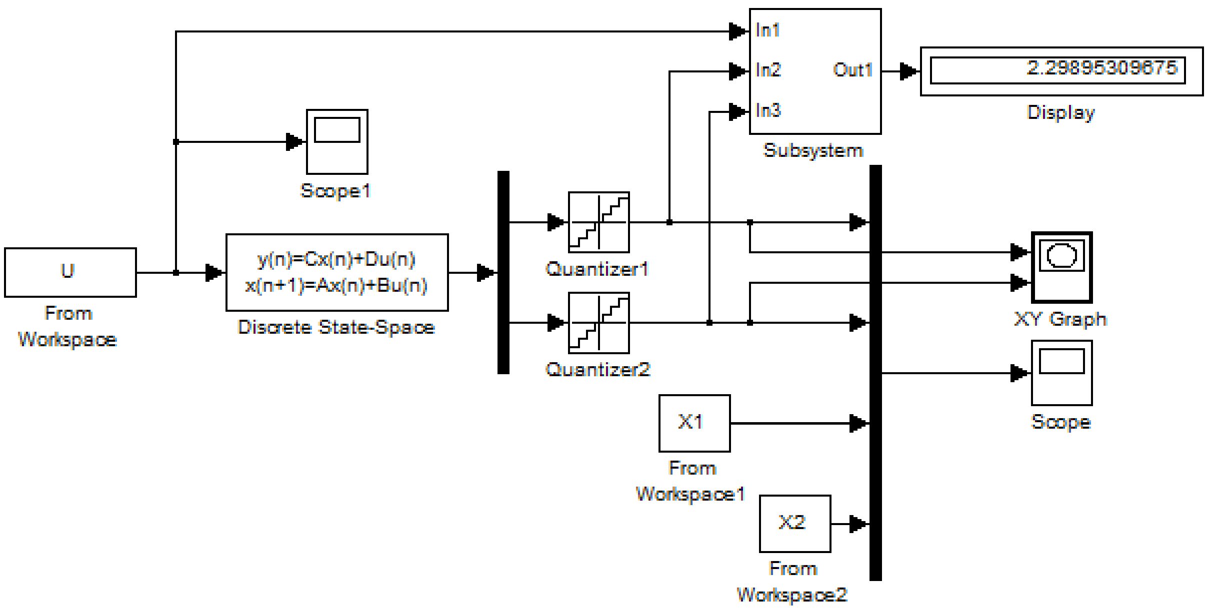

Рис. 1. Моделювання системи керування

На блок "Scope" за допомогою мультиплексора подаються дві змінні стану ОК та за допомогою блоків "From Workspace1" та "From Workspace2" дві змінні стану, розраховані в результаті роботи розробленого скрипта. На рис. 3 видно, що графіки, дані для яких отримані в результаті роботи скрипта і моделі, співпадають, що ще раз підтверджує правильність отриманого розв'язку.

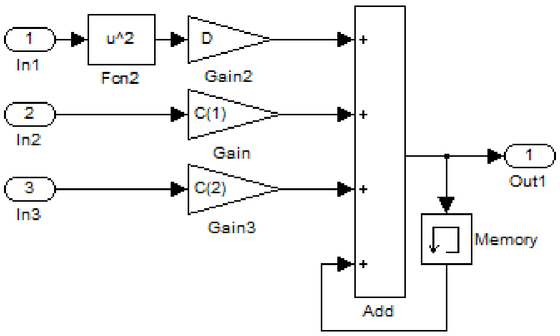

Рис. 2. Вміст блоку “Subsystem” - розрахунок значення критерію оптимальності

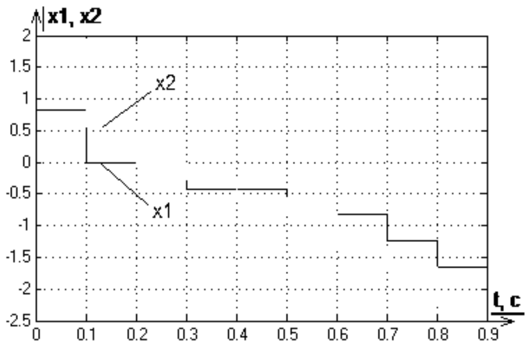

Рис. 3. Вихід системи керування

Блок “XY Graph” відображує траєкторію руху ОК (рис. 4): по осі X відкладається змінна стану x_1, а по осі Y - x_2. На графіку видно, що ОК із заданого початкового стану $x_1[1] = 0.8310$, $x_2[1] = 1.9364$ переводиться у необхідний кінцевий стан $x_1[10] = -1.6619$, $x_2[10] = -2.4897$.

Аналіз результатів

Результати моделювання системи керування підтверджують, що знайдена послідовність управлінь дійсно є оптимальною, тобто при ній досягається мінімально можливе значення критерію оптимальності, а система в кінцевий момент часу досягає заданого кінцевого стану.

Для дослідження оптимальності системи керування на вхід моделі ОК подавалися різні послідовності управляючих впливів, для яких розраховувалося значення критерію оптимальності. В результаті виявилося, що значення критерію, отримане для розрахованої оптимальної послідовності управлінь, було найменшим.

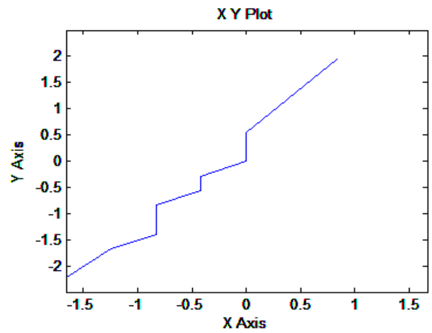

Рис. 4. Траєкторія руху об’єкта керування

Запропонований алгоритм був використаний для розв’язання задачі для об’єкту другого порядку, але може бути використаний і для розв’язання задач для об’єктів вищих порядків.

Список літератури

1. *Чураков Е.П. Оптимальные и адаптивные системы: Учеб. пособие для вузов / Е.П. Чураков. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 256 с/*

2. *Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-ти томах. Т.4: Теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупков и Н.Д. Егупова. - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. - 744 с.*

Надійшла до редколегії 11.02.2013

Рецензент: д-р техн. наук, професор А.П. Ладанюк, Національний університет харчових технологій, Київ.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Н.Б. Репникова, А.В. Писаренко, К.М. Москаленко

Данная статья посвящена решению дискретной задачи оптимального управления для двумерных систем с одним входным и одним выходным сигналами. Для решения этой задачи был использован метод динамические программирования. Алгоритм, предложенный в [1] был модифицирован таким образом, чтобы его можно было применить для решения задач с закрепленным правым концом. В соответствии с модифицированным алгоритмом был разработан скрипт для пакета прикладных программ MATLAB. Также была построена модель описанной системы в MATLAB/Simulink, при помощи которой была подтверждена правильность полученного в результате работы скрипта решения.

Ключевые слова: *оптимальное управление, динамическое программирование, цифровая система.*

COMPUTATIONAL ASPECTS OF THE DYNAMIC PROGRAMMING METHOD IN SOLVING DISCRETE OPTIMAL CONTROL PROBLEMS FOR SECOND ORDER SYSTEMS

N.B. Repnikova, A.V. Pisarenko, K.M. Moskalenko

The given article is devoted to the solution of the discrete optimal control problem for the system with two state variables, single input and single output. To solve this problem the method of dynamic programming was used. The algorithm proposed in [1] was modified so that it can be applied to problems with fixed final state. Then the script for numerical computing environment MATLAB was developed in accordance with the modified algorithm. Also the adequate model was constructed in MATLAB/Simulink, which confirmed the correctness of script’s output.

Keywords: *optimal control, dynamic programming, digital system*