УДК 621.391

С.М. Бабий, А.В. Шевченко, Алаа Мохаммед Абдул-Хади

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ СЕРИЙНЫХ ИЗДЕЛИЙ НА НАДЕЖНОСТЬ. II. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ С ТРАДИЦИОННЫМ МЕТОДОМ НА БАЗЕ ОДНОКРАТНОЙ ВЫБОРКИ

Анализируется экономичность метода последовательных испытаний на базе нарастающего объема выборки по сравнению с традиционным методом, использующим выборку фиксированного объема. Излагается подход к коррекции значений рисков α и β принятия решений в задаче контроля качества партии изделий по параметру надежности. Реализация подхода возможна методом моделирования Монте-Карло, экономичность которого оправдывает себя за счет предварительного выбора значений рисков α и β путем их коррекции на выборках состоятельного объема.

Ключевые слова: *риск заказчика β, риск изготовителя α, гипотезы H_0 и H_1, критерий выбора решения заданной силы (α, β), средний объем выборки $M_i(n)$.*

Введение

Данная работа является продолжением исследования возможностей последовательных испытаний методом Монте-Карло, изложенного в статье [1].

Процедура отыскания критических границ C_0 и C_1 принятия решения выбора гипотезы с учетом заданных рисков α и β рассмотрена в работе [2]. Решение найдено с помощью компьютерного моделирования методом Монте-Карло и позволяет уменьшить объем выборки для принятия решения в последовательных испытаниях.

В первом разделе на нескольких примерах иллюстрируется экономичность метода последовательных испытаний по объему используемой выборки.

Второй раздел предлагаемой статьи посвящен проблеме оценки влияния значений рисков α и β. В нем используется моделирование последовательных испытаний с целью прогноза доли брака в партии готовых изделий (генеральной совокупности).

Сравнительный анализ последовательных испытаний с традиционным методом на базе однократной выборки

Проведем сравнительный анализ на примере нормального распределения. Пусть для массива нормально распределенных случайных чисел $\{X_i\}_n$ выдвигаются две конкурирующие гипотезы H_0 и H_1. В случае H_0 случайная величина X имеет следующие параметры: μ_0 и $\sigma = 1$. В случае H_1 случайная величина X имеет следующие параметры: μ_1 и $\sigma = 1$.

Сравним среднее число испытаний, необходимых в последовательном критерии отношений вероятностей силы (α, β) для проверки H_0 относительно H_1 с фиксированным числом испытаний, необходимым для обычного критерия Неймана-Пирсона той же силы (α, β) [3, 4].

Обозначим $n(\alpha, \beta)$ – фиксированное число испытываемых изделий, необходимое в обычном критерии для обеспечения силы (α, β). Наиболее мощный обычный критерий заключается в следующем:

Гипотеза H_0 принимается, если среднее арифметическое значение $\bar{x}$ результата испытаний $x_1; x_2; \ldots; x_n$ (объем выборки n определяется заранее) меньше или равно заранее определенной постоянной d:

- гипотеза H_0 принимается, если $\bar{x} \le d$;
- гипотеза H_0 отвергается, если $\bar{x} > d$, а H_1 – принимается.

Постоянная d и фиксированное число n изделий для испытаний должны быть выбраны таким образом, что бы критерий имел требуемую силу (α, β). Для заданных n и d соответствующая сила критерия определяется следующим образом.

Так как $\bar{x} \le d$ эквивалентно неравенству $\sqrt{n} \cdot (\bar{x} - \mu_0) \le \sqrt{n} \cdot (d - \mu_0)$, то вероятность того, что $\bar{x} \le d$ точно такая же, как и вероятность того, что $\sqrt{n} \cdot (\bar{x} - \mu_0) \le \sqrt{n} \cdot (d - \mu_0)$.

Если справедлива гипотеза H_0, то случайная величина $\gamma_0 = \sqrt{n} \cdot (\bar{x} - \mu_0)$ нормально распределена со средним, равным нулю, и $\sigma = 1$. Таким образом, вероятность того, что $\bar{x} \le d$, когда справедлива H_0, равна вероятности того, что

$$\gamma_0 = \sqrt{n} \cdot (\bar{x} - \mu_0).$$

Обозначим через $\Phi(\gamma)$ вероятность того, что нормально распределенная величина с нулевым математическим ожиданием и $\sigma = 1$ примет значение меньше γ, т.е.

$$\Phi(\gamma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\gamma}e^{-t^2/2}dt .$$

Тогда вероятность принятия H_0, когда H_0 истинна, равна

$$\Phi\left[\sqrt{n}\cdot(d-\mu_0)\right].$$

Так как вероятность принятия H_0, когда H_0 истинна, равна по определению $1-\alpha$, то получаем:

$$\Phi\left[\sqrt{n}\cdot(d-\mu_0)\right]=(1-\alpha). \quad (1)$$

Для определения величины β, соответствующей заданным n и d, запишем неравенство $\overline{x}\le d$ в равносильной форме:

$$\sqrt{n}\cdot\left(\overline{x}-\mu_1\right)\le\sqrt{n}\cdot(d-\mu_1).$$

По определению β является вероятностью ошибочного принятия H_0, когда верна гипотеза H_1, но последняя вероятность точно такая же, как вероятность того, что $\overline{x}\le d$, т.е.:

$$\sqrt{n}\cdot\left(\overline{x}-\mu_1\right)\le\sqrt{n}\cdot(d-\mu_1)$$

когда H_1 истинна. Но когда H_1 справедлива, эта вероятность равна:

$$\Phi\left[\sqrt{n}\cdot(d-\mu_1)\right]=\beta. \quad (2)$$

Следовательно, для получения критерия требуемой силы (α, β) необходимо выбрать величины n и d таким образом, что бы выполнялись условия (1) и (2).

Используя уравнения (1) и (2), обозначим аргументы функции Ф( )

$$\sqrt{n}\cdot\left(\overline{x}-\mu_0\right)=\gamma_0;\quad \sqrt{n}\cdot\left(\overline{x}-\mu_1\right)=\gamma_1.$$

Вычитая из второго уравнения первое и преобразуя, найдем объем выборки n:

$$\gamma_1-\gamma_0=\sqrt{n}\cdot(d-\mu_1-d+\mu_0)=\sqrt{n}\cdot(\mu_0-\mu_1)$$

или: $(\gamma_1-\gamma_0)^2=n\cdot(\mu_0-\mu_1)^2$, окончательно:

$$n=(\gamma_1-\gamma_0)^2/(\mu_0-\mu_1)^2 . \quad (3)$$

Таким образом, вычисленный по формуле (3) объем изделий для испытаний гарантирует получение критерия выбора решения заданной силы (α, β). При этом речь идет о традиционном способе испытаний на базе однократной выборки объема "n", найденного заранее.

В рассматриваемом варианте анализа последовательных испытаний объем выборки для принятия решений носит случайный характер, поэтому для сравнения используем средние значения объемов выборки. Учтем два различных варианта средних объемов выборки:

- средний объем выборки для принятия решения приемки партии;
- средний объем выборки для принятия решения браковки партии.

Ссылаясь на источник [2, стр. 84], приведем расчетные формулы для средних объемов выборки в последовательных испытаниях:

$$M_1(n)=\frac{\beta\cdot\ln B+(1-\beta)\cdot\ln A}{M_1(\gamma)};\qquad M_0(n)=\frac{(1-\alpha)\cdot\ln B+\alpha\cdot\ln A}{M_0(\gamma)}. \quad (4)$$

Здесь в знаменателе выражения $M_k(\gamma_i)=M\left[\gamma_i=\ln\frac{f(x_i\mu_1)}{f(x_i\mu_0)}\right]_{k=[0;1]}$ есть математическое ожидание случайной величины γ_i, представляющей отношение логарифма максимума правдоподобия двух плотностей распределения при двух случайных значениях X_i, каждое из которых поддерживает свою гипотезу H_0 или H_1. В случае нормального распределения, когда

$$f(x,\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\cdot\sigma^2}\cdot(x-\mu)^2},$$

получим:

$$\gamma=\ln\frac{f(x_i\mu_1)}{f(x_i\mu_0)}=\frac{1}{2\cdot\sigma^2}\left[2\cdot(\mu_1-\mu_0)\cdot x+\mu_0^2-\mu_1^2\right],$$

здесь M_k может принимать два различных значения случайной величины γ, в зависимости от выбранной гипотезы H_0 или H_1:

$$M_{k=1}(\gamma)=\frac{1}{2}\cdot(\mu_0-\mu_1)^2;\ M_{k=0}(\gamma)=-\frac{1}{2}\cdot(\mu_0-\mu_1)^2. \quad (5)$$

Используя выражения (3) и (4), найдем их отношение:

$$\frac{M_1(n)}{n(\alpha,\beta)}=\frac{\left[\beta\cdot\ln B+(1-\beta)\cdot\ln A\right]\cdot(\mu_0-\mu_1)^2}{M_1(\gamma)\cdot(\gamma_1-\gamma_0)^2},$$

подставляя значение $M_1(\gamma)$ из (5) окончательно получим:

$$\frac{M_1(n)}{n(\alpha,\beta)}=\frac{2\left[\beta\cdot\ln B+(1-\beta)\cdot\ln A\right]\cdot(\mu_0-\mu_1)^2}{(\mu_0-\mu_1)^2\cdot(\gamma_1-\gamma_0)^2}=\frac{2\left[\beta\cdot\ln B+(1-\beta)\cdot\ln A\right]}{(\gamma_1-\gamma_0)^2}. \quad (6)$$

Найдем отношение объемов выборки для нулевой гипотезы H_0:

$$\frac{M_0(n)}{n(\alpha,\beta)}=\frac{\left[(1-\alpha)\cdot\ln B+\alpha\cdot\ln A\right]\cdot(\mu_0-\mu_1)^2}{M_0(\gamma)\cdot(\gamma_1-\gamma_0)^2},$$

подставляя значение $M_0(\gamma)$ из (15), окончательно получим:

$$\frac{M_0(n)}{n(\alpha,\beta)}=-\frac{2\left[(1-\alpha)\cdot\ln B+\alpha\cdot\ln A\right]\cdot(\mu_0-\mu_1)^2}{(\mu_0-\mu_1)^2\cdot(\gamma_1-\gamma_0)^2}=-2\left[(1-\alpha)\cdot\ln B+\alpha\cdot\ln A\right]/(\gamma_1-\gamma_0)^2. \quad (7)$$

Пример 1.

Найдем численные значения отношений объемов выборки, задаваемых выражениями (6) и (7) при выбранных коэффициентах риска $\alpha=\beta=0.1$.

Сначала найдем численное значение знаменателя $(\gamma_1-\gamma_0)^2$: $\Phi\left[\sqrt{n}\cdot(d-\mu_0)\right]=(1-\alpha)=0.9$.

Выражение $\sqrt{n}\cdot(d-\mu_0)=U_{P=0.9}=1.281$ – квантиль нормального распределения. Аналогично

$$\Phi\left[\sqrt{n}\cdot(d-\mu_1)\right]=\beta=0.1.$$

Выражение $\sqrt{n}\cdot(d-\mu_1)=U_{P=0.1}=-1.281$ –квантиль нормального распределения.

Итак, $$(\gamma_1-\gamma_0)^2=(U_{P=0.9}-U_{P=0.1})^2= =[1.281-(-1.281)]^2=6.564,$$

а после подстановки в выражение (6):

$$\frac{M_1(n)}{n(\alpha,\beta)}=\frac{2\cdot[\beta\cdot\ln B+(1-\beta)\cdot\ln A]}{6.564}.$$

Найдем численное значение числителя для значений рисков $\alpha=\beta=0.1$:

$$\ln(B=1/9)=-2.19722;\quad \ln(A=9)=2.19722,$$

А после подстановки получим окончательный ответ:

$$\frac{M_1(n)}{n(\alpha,\beta)}=\frac{2\cdot[0.1\cdot(-2.19722)+0.9\cdot 2.19722]}{6.564}=0.535.$$

Итак, средний выигрыш последовательного критерия по сравнению с обычным критерием равен:

$$100\cdot[1-M_1(n)/n(\alpha,\beta)]=100\cdot(1-0.535)=46.5\%.$$

Аналогично найдем отношение объемов выборки для нулевой гипотезы H_0.

$$\frac{M_0(n)}{n(\alpha,\beta)}=\frac{-2\cdot[0.9\cdot(-2.19722)+0.1\cdot 2.19722]}{6.564}=0.535.$$

Получен результат аналогичный для выборки альтернативной гипотезы H_1. Это равенство объясняется одинаковыми значениями рисков $\alpha=\beta=0.1$.

Пример 2.

Повторим вычисления выражений (6) и (7) для значений коэффициентов риска $\alpha=\beta=0.05$.

Вычисляем критерии Вальда:

$$A=\frac{1-\beta}{\alpha}=\frac{1-0.05}{0.05}=19;B=\frac{\beta}{1-\alpha}=\frac{0.05}{1-0.05}=0.0526;$$

$$\ln(B=0.0526)=-2.945;\quad \ln(A=19)=2.945.$$

Отыскиваем отношение объемов выборки для альтернативной гипотезы H_1.

$$\frac{M_1(n)}{n(\alpha,\beta)}=\frac{2\cdot[\beta\cdot\ln B+(1-\beta)\cdot\ln A]}{(\gamma_1-\gamma_0)^2}.$$

Найдем численное значение знаменателя $(\gamma_1-\gamma_0)^2$. По таблице нормального распределения центрированной и нормированной случайной величины отыскиваем квантили для вероятностей:

$$\Phi\left[\sqrt{n}\cdot(d-\mu_0)\right]=(1-\alpha)=0.95.$$

Выражение $\sqrt{n}\cdot(d-\mu_0)=U_{P=0.95}=1.645$ –квантиль нормального распределения. Аналогично

$$\Phi\left[\sqrt{n}\cdot(d-\mu_1)\right]=\beta=0.05.$$

Выражение $\sqrt{n}\cdot(d-\mu_1)=U_{P=0.05}=-1.645$ – есть квантиль нормального распределения. Находим значение знаменателя отношения:

$$(\gamma_1-\gamma_0)^2=(U_{P=0.95}-U_{P=0.05})^2= =[1.645-(-1.645)]^2=10.82.$$

Итак, искомое соотношение имеет вид:

$$\frac{M_1(n)}{n(\alpha,\beta)}=\frac{2\cdot[0.05\cdot(-2.945)+0.95\cdot 2.945]}{10.82}=0.49.$$

Средний выигрыш в процентном соотношении:

$$100\cdot[1-M_1(n)/n(\alpha,\beta)]=100\cdot(1-0.49)=51\%.$$

Найдем отношение объемов выборки для нулевой гипотезы H_0:

$$\frac{M_0(n)}{n(\alpha,\beta)}=-\frac{2[(1-\alpha)\cdot\ln B+\alpha\cdot\ln A]}{(\gamma_1-\gamma_0)^2}= =\frac{-2\cdot[0.95\cdot(-2.945)+0.05\cdot 2.945]}{10.82}=0.49.$$

Средний выигрыш в объеме выборки в процентном отношении:

$$100\cdot\left[1-\frac{M_1(n)}{n(\alpha,\beta)}\right]=100\cdot(1-0.49)=51\%.$$

Оценка влияния ошибок первого и второго рода на принятие решения в эксперименте

Используем возможности моделирования, а именно:

– получение равномерно распределенной смеси «плохих» и «хороших» изделий в заданном процентном соотношении (любом) с заданными законами распределения безотказности $f_{брак}(t)$ и $f_{хор}(t)$ изделий;

– вариацию значений параметров распределений $f_{брак}(t)$ и $f_{хор}(t)$;

– вариацию значений ошибок первого и второго рода α и β для отыскания режима проведения последовательных испытаний на надежность близкого к оптимальному по критериям затрат числа испытываемых изделий и времени проведения испытаний.

Выборка представляет собой смесь случайного числа дефектных и бездефектных изделий в неизвестном процентном соотношении: $n_i=n_{i_{истин}}^{брак}+n_{i_{истин}}^{хор}$. Результатом процесса моделирования является испытание множества выборок

$\{n_i\}_k = \{n_1 \dots n_i \dots n_k\}$, каждая из которых приводит к одному из двух решений: забраковать или принять партию изделий объемом N_i. Исходя из случайного характера объема выборки и неизвестного процентного соотношения смеси, каждое из решений должно быть принято с заданным риском: α – забраковать хорошую партию; β – принять дефектную партию.

При проведении испытаний наблюдаемая выборка представляет собой ступенчатую возрастающую кривую в координатах: время (t) – число отказов (r). Визуально число ступенек (оно же есть число отказов) является объемом выборки изделий, прошедших испытания до момента принятия решения (момент пересечения траектории с верхней или нижней прямой принятия решения).

В реальных условиях испытаний информация о числе дефектных и бездефектных изделий в выборке отсутствует, и наблюдатель вынужден принимать решение о составе выборки путем прогноза с учетом риска первого рода α и риска второго рода β. Учитывая физический смысл рисков α и β, наблюдатель прогнозирует число дефектных и бездефектных изделий, определяемое следующими уравнениями:

$$n_{\text{прогноз}}^{\text{брак}} = \alpha \cdot n_{\text{истин}}^{\text{хор}} + (1-\beta) \cdot n_{\text{истин}}^{\text{брак}},$$
$$n_{\text{прогноз}}^{\text{хор}} = \beta \cdot n_{\text{истин}}^{\text{брак}} + (1-\alpha) \cdot n_{\text{истин}}^{\text{хор}}. \qquad (8)$$

Система (8) составлена из таких соображений:

– так как α – вероятность ошибочной браковки истинно хороших изделий, а значение $(1-\beta)$ – вероятность браковки истинно бракованных изделий, то первое уравнение системы (8) дает прогнозируемое число бракованных изделий в выборке;

– так как β – вероятность ошибочного приема истинно бракованных изделий, а значение $(1-\alpha)$ – вероятность принять истинно хорошие изделия, то второе уравнение системы (8) дает прогнозируемое число бездефектных (хороших) изделий в выборке.

Выбирая критерий Вальда для принятия решений $A = (1-\beta)/\alpha$ и $B = \beta/(1-\alpha)$, выполним анализ уравнения (8) с целью их использования для обработки результатов эксперимента. Особенностью системы уравнений является сохранение равенства

$$n_{\text{истин}}^{\text{брак}} + n_{\text{истин}}^{\text{хор}} = n_{\text{прогноз}}^{\text{хор}} + n_{\text{прогноз}}^{\text{брак}} \qquad (9)$$

при различных вариациях ошибок первого и второго рода. Это, в свою очередь, позволяет в условиях моделирования, контролируя состав выборки подобрать значения α и β такими, чтобы минимизировать отклонение прогнозируемого процента брака в выборке от истинного процента.

Итак, докажем справедливость выражение (9) при вариациях значений α и β. С этой целью первое уравнение системы (8) разделим на $(1-\beta)$, а второе на $(1-\alpha)$, после чего просуммируем их:

$$\frac{n_{\text{прогноз}}^{\text{брак}}}{(1-\beta)} + \frac{n_{\text{прогноз}}^{\text{хор}}}{(1-\alpha)} = \frac{\alpha}{(1-\beta)} \cdot n_{\text{истин}}^{\text{хор}} + \frac{\beta}{(1-\alpha)} \cdot n_{\text{истин}}^{\text{брак}} + n_{\text{истин}}^{\text{брак}} + n_{\text{истин}}^{\text{хор}}. \qquad (10)$$

Приведем (10) к общему знаменателю и учтем, что $n = n_{\text{истин}}^{\text{брак}} + n_{\text{истин}}^{\text{хор}}$:

$$\frac{n_{\text{прогноз}}^{\text{брак}} \cdot (1-\alpha) + n_{\text{прогноз}}^{\text{хор}} \cdot (1-\beta)}{(1-\beta)\cdot(1-\alpha)} = \frac{\alpha\cdot(1-\alpha)\cdot n_{\text{истин}}^{\text{хор}} + \beta\cdot(1-\beta)\cdot n_{\text{истин}}^{\text{брак}}}{(1-\beta)\cdot(1-\alpha)} + n$$

или

$$n = \frac{n_{\text{прогноз}}^{\text{брак}} \cdot (1-\alpha) - \beta\cdot(1-\beta)\cdot n_{\text{истин}}^{\text{брак}}}{(1-\beta)\cdot(1-\alpha)} + \frac{n_{\text{прогноз}}^{\text{хор}} \cdot (1-\beta) - \alpha\cdot(1-\alpha)\cdot n_{\text{истин}}^{\text{хор}}}{(1-\beta)\cdot(1-\alpha)}. \qquad (11)$$

С помощью выражения (11) покажем на нескольких примерах справедливость уравнения (9) при вариациях значений рисков α и β:

а) выберем $\alpha = \beta = 0.1$, и подставим в уравнение (11), после преобразований получим:

$$n = \frac{\left(n_{\text{прогноз}}^{\text{хор}} + n_{\text{прогноз}}^{\text{брак}}\right)\cdot 0.9 - \left(n_{\text{истин}}^{\text{хор}} + n_{\text{истин}}^{\text{брак}}\right)\cdot 0.09}{0.81} = \frac{n\cdot 0.9 - n\cdot 0.09}{0.81} = n;$$

б) выберем $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.1$ и подставим в уравнение (11):

$$n = \frac{\left(n_{\text{прогноз}}^{\text{хор}}\cdot 0.9 + n_{\text{прогноз}}^{\text{брак}}\cdot 0.95\right)}{0.855} - \frac{\left(n_{\text{истин}}^{\text{хор}}\cdot 0.0475 + n_{\text{истин}}^{\text{брак}}\cdot 0.09\right)}{0.855}. \qquad (12)$$

Усредним коэффициенты каждой скобки в выражении (12), заменив его приближенным:

$$\left(n_{\text{прогноз}}^{\text{хор}}\cdot 0.9 + n_{\text{прогноз}}^{\text{брак}}\cdot 0.95\right) \approx \frac{0.95+0.9}{2} \times \left(n_{\text{прогноз}}^{\text{хор}} + n_{\text{прогноз}}^{\text{брак}}\right) = 0.925\cdot\left(n_{\text{прогноз}}^{\text{хор}} + n_{\text{прогноз}}^{\text{брак}}\right); \qquad (13)$$

$$\left(n_{\text{истин}}^{\text{хор}}\cdot 0.0475 + n_{\text{истин}}^{\text{брак}}\cdot 0.09\right) \approx \frac{0.0475+0.09}{2} \times \left(n_{\text{истин}}^{\text{хор}} + n_{\text{истин}}^{\text{брак}}\right) = 0.0688\cdot\left(n_{\text{истин}}^{\text{хор}} + n_{\text{истин}}^{\text{брак}}\right). \qquad (14)$$

Перепишем выражение (9):

$$n = \frac{\left(n_{\text{прогноз}}^{\text{хор}} + n_{\text{прогноз}}^{\text{брак}}\right)\cdot 0.925 - \left(n_{\text{истин}}^{\text{хор}} + n_{\text{истин}}^{\text{брак}}\right)\cdot 0.0688}{0.855}. \qquad (15)$$

В выражении (15) обе скобки одинаковые, так как это есть объем выборки:

$$n = n_{\text{истин}}^{\text{брак}} + n_{\text{истин}}^{\text{хор}} = n_{\text{прогноз}}^{\text{хор}} + n_{\text{прогноз}}^{\text{брак}}.$$

Учитывая это, запишем (12):

$$n = \frac{n \cdot (0.925 - 0.0688)}{0.855} = n \cdot \frac{0.856}{0.855} \approx n .$$

Приведенный анализ показал, что с достаточной для практики точностью при вариациях α и β равенство (9) сохраняется. Это, в свою очередь, позволяет оценить влияние значений рисков α и β на точность прогноза процента брака в партии изделий.

Рассмотрим процедуру оценки этого влияния. Для этого запишем выражения прогнозируемых долей:

– доли бракованных изделий в выборке:

$$\frac{n_{\text{прогноз}}^{\text{брак}}}{(n_i)_{\text{брак}}} = \frac{\alpha \cdot n_{\text{истин}}^{\text{хор}}}{(n_i)_{\text{брак}}} + \frac{(1-\beta) \cdot n_{\text{истин}}^{\text{брак}}}{(n_i)_{\text{брак}}} ; \qquad (16)$$

– доли качественных изделий в выборке:

$$\frac{n_{\text{прогноз}}^{\text{хор}}}{(n_i)_{\text{прием}}} = \frac{\beta \cdot n_{\text{истин}}^{\text{брак}}}{(n_i)_{\text{прием}}} + \frac{(1-\alpha) \cdot n_{\text{истин}}^{\text{хор}}}{(n_i)_{\text{прием}}} , \qquad (17)$$

отнесенных к объему выборки испытаний с соответствующим исходом: «брак» или «прием». Подчеркнем возможности моделирования, позволяющего помечать бракованные изделия, участвующие в выборке последовательных испытаний. Учтем эту возможность следующим образом. Значения переменных, участвующих в выражениях (16) и (17) в правой части являются известными и случайными (кроме заданных α и β) для заданной выборки. Накапливая массив выборок, и усредняя значения интересующих переменных, можно получить их устойчивые оценки:

$$\frac{M\left(n_{\text{прогноз}}^{\text{брак}}\right)}{M(n_i)_{\text{брак}}} = \frac{\alpha \cdot M\left(n_{\text{истин}}^{\text{хор}}\right)}{M(n_i)_{\text{брак}}} + \frac{(1-\beta) \cdot M\left(n_{\text{истин}}^{\text{брак}}\right)}{M(n_i)_{\text{брак}}} ,(18)$$

$$\frac{M\left(n_{\text{прогноз}}^{\text{хор}}\right)}{M(n_i)_{\text{прием}}} = \frac{\beta \cdot M\left(n_{\text{истин}}^{\text{брак}}\right)}{M(n_i)_{\text{прием}}} + \frac{(1-\alpha) \cdot M\left(n_{\text{истин}}^{\text{хор}}\right)}{M(n_i)_{\text{прием}}} ,(19)$$

где «М» – оператор математического ожидания.

Сравнивая прогнозируемую долю брака, вычисленную по формуле (18), с истинной (заданной) долей брака в партии, принимаем решение о целесообразности коррекции значений рисков α и β. Аналогичное сравнение можно выполнить и для уравнения (19).

Выводы

1. Проведенный анализ подтвердил экономичность метода последовательных испытаний, использующего выборку нарастающего объема “$n_п$”, среднее значение которой $M(n_п) \approx 0{,}5 n_{трад}$ и составляет половину объема выборки для проведения традиционных испытаний при одном и том же значении критерия выбора решения (α, β).

2. Выражение (16) может быть использовано в режиме предварительного моделирования с целью выбора коррекции рисков α и β при организации реальных испытаний.

Список литературы

1. Бабий С.М. Моделирование процесса последовательных испытаний серийных изделий на надежность. Часть I. Организация процесса последовательных испытаний / С.М. Бабий, А.В. Шевченко, Алаа Мохаммед Абдул-Хади // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2013. – Вип. 1 (108). – С. 2-7.

2. Постовалов С.Н. Проверка простых и сложных гипотез с использованием последовательного критерия А. Вальда / С.Н. Постовалов // Доклады АН ВШ РФ. – 2011. – №2 (17). – С. 22 -28.

3. Вальд А. Последовательный анализ / А. Вальд. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 1960.

4. Berger James. Sequential Analysis. The New Palgrave Dictionary of Economics / James Berger. 2nd Ed. 2008.

Поступила в редколлегию 4.02.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.С. Харченко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПОСЛІДОВНИХ ВИПРОБУВАНЬ СЕРІЙНИХ ВИРОБІВ НА НАДІЙНІСТЬ. II. ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ПОСЛІДОВНИХ ВИПРОБУВАНЬ З ТРАДИЦІЙНИМИ МЕТОДАМИ НА БАЗІ ОДНОКРАТНОЇ ВИБІРКИ

С.М. Бабій, А.В. Шевченко, Алаа Мохаммед Абдул-Хаді

Аналізується економічність методу послідовних випробувань на базі наростаючого об'єму вибірки у порівнянні з традиційним методом, що використовує вибірку фіксованого об'єму. Викладається підхід до корекції значень ризиків α та β прийняття рішень в задачі контролю якості партії виробів по параметру надійності. Реалізація підходу можлива методом моделювання Монте-Карло, економічність якого виправдовує себе за рахунок попереднього вибору значень ризиків α і β шляхом їх корекції на вибірках спроможного обсягу.

Ключові слова: *вибірка, ризик замовника β, ризик виробника α, гіпотези H_0 і H_1, критерій вибору рішення заданої сили (α, β), середній обсяг вибірки $M_i(n)$.*

MODELING SEQUENTIAL TESTS OF SERIAL PRODUCT RELIABILITY. II. COMPARATIVE ANALYSIS OF SEQUENTIAL TESTS WITH THE TRADITIONAL METHOD BASED ON THE SINGLE SET

S.M. Babiy, A.V. Shevchenko, Alaa Muhammed Abdul-Hadi

In this paper is considered the economy effect of successive tests when compared with traditional method using the ordered set of devices whith constant volume. Approach is described to correction sizes a region risks α and β. Risks are used in the task to controlling the reliability a lot of devices.

Keywords: *the risk of the customer β, the risk of the performer α, the hypotheses H_0 and H_1, the selection criteria solutions given force (α, β), the average sample size $M_i(n)$.*