

## ВЫБОР ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ПРИ ОЦЕНИВАНИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ "ТИПА В"

Рассмотрено оценивание составляющих неопределенности измерений на основе суждений (оценивание типа В). Задача сводится к выбору подходящего априорного распределения вероятности рассматриваемой величины внутри заданных границ исходя из имеющейся информации. Отмечены три типичные ситуации, ведущие к простым модельным распределениям: нормальному, треугольному и равномерному (прямоугольному). На примерах оценивания неопределенности, имеющих в литературе, в том числе, в Руководстве по оцениванию неопределенности в измерениях (GUM) и публикациях по химическому анализу, показано, что модель равномерного распределения часто используется в тех случаях, когда ее применение не обосновано. Это оправдывают целесообразностью консервативного подхода, ведущего к получению "пессимистических" оценок. Подчеркивается, что необоснованный выбор модели равномерного распределения снижает ценность научного суждения и роль субъективной вероятности в оценивании неопределенности измерений.

**Ключевые слова:** неопределенность измерений, оценивание типа В, априорное распределение вероятности, равномерное распределение, треугольное распределение.

### Введение

В основе оценивания неопределенности типа В лежит "научное суждение", основанное на всей имеющейся в распоряжении информации. Сюда относятся данные предшествующих исследований, данные, основанные на опыте и поведении и свойствах соответствующих материалов и приборов, технические условия изготовителей и т.д. Очевидно, что качество получаемых таким путем оценок зависит от степени полноты используемой информации и способности исследователя к ее критическому осмыслению.

Оценку стандартной неопределенности по типу В часто получают исходя из границ  $a$  и  $b$ , внутри которых, как ожидают, лежат значения рассматриваемой величины  $X$ . (Интервал  $[a, b]$  с полушириной  $\Delta = (b - a)/2$  обычно считают симметричным относительно наиболее вероятного значения  $\tilde{x}$ ). Такая задача часто возникает в практике оценивания результатов измерений, поскольку приписывание той или иной величине ее предельных значений – исходя из объективных знаний или субъективных суждений – не требует глубоких исследований. Оценивание типа В стандартной неопределенности  $u(x)$  величины  $X$  можно изобразить схемой (рис. 1).

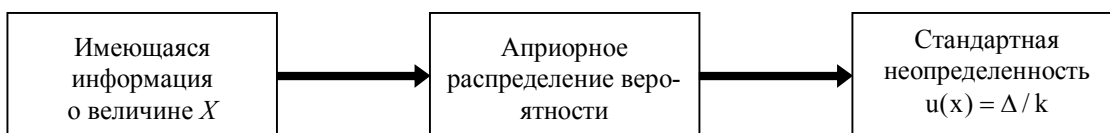


Рис. 1. Оценивание типа В стандартной неопределенности  $u(x)$  величины  $X$

Исходя из имеющейся в распоряжении информации, необходимо:

1 – принять некоторое априорное распределение вероятности для величины  $X$  внутри заданных границ;

2 – найти стандартную неопределенность  $u(x) = \Delta / k$ , где  $k$  – коэффициент преобразования, зависящий от принятой функции распределения.

Выбор функции распределения зависит от того, какой именно априорной информацией о переменной  $X$  мы располагаем. Типичными являются следующие три ситуации:

(1) известен интервал  $[\tilde{x} - \Delta_p, \tilde{x} + \Delta_p]$ , охватывающий определенную долю  $p$  распределения вероятности, например, 95 % или 99 %;

(2) известно ожидаемое значение  $\tilde{x}$  и пределы (обычно симметричные) возможных значений  $\pm \Delta$ , что дает интервал  $[\tilde{x} - \Delta, \tilde{x} + \Delta]$ ;

(3) известны только пределы, ограничивающие интервал  $[a, b]$ , и какое-либо предпочтительное значение  $\tilde{x}$  внутри интервала отсутствует.

В ситуации (1), если не оговорено особо, естественно принять, что при вычислении интервала было использовано нормальное распределение, и чтобы "вернуться" к стандартной неопределенности, следует использовать соответствующую квантиль этого распределения. Так, для  $p = 95\%$  получают  $k = 2,0$ . Напротив, в ситуации (3) имеется минимальный объем информации о величине  $X$ , и все, что можно сделать, это принять для нее равномерное (прямоуголь-

ное) распределение. Тогда ожидаемое значение величины находят как середину интервала,  $\bar{x} = (b - a) / 2$ , а для перехода к стандартной неопределенности используют коэффициент  $k = \sqrt{3}$ .

В свою очередь, ситуация (2) имеет место тогда, когда имеющаяся информация о величине  $X$  позволяет считать, что ее значения вблизи  $\bar{x}$  более вероятны, чем значения вблизи границ. *Руководство по выражению неопределенности в измерениях (GUM)* [1 (4.3.9, F.2.3.3)] рекомендует в этом случае принять симметричное треугольное распределение как компромисс между двумя модельными распределениями, нормальным и равномерным. В случае треугольного распределения коэффициент преобразования равен  $\sqrt{6}$ , и стандартная неопределенность получается примерно на 30 % меньше по сравнению с моделью равномерного распределения. Можно сказать, что увеличение неопределенности при переходе от ситуации (2) к ситуации (3) – это своего рода плата за наше "ничего не знание" о характере распределения значений  $X$  внутри заданных границ, когда никакому  $\bar{x}$  нельзя отдать предпочтение.

Несмотря на наличие в *Руководстве* [1 (4.3.4, 4.3.7, 4.3.9)] рекомендаций по разграничению ситуаций (1) – (3), практические примеры оценивания неопределенности, имеющиеся в литературе, часто демонстрируют универсальное и некритическое использование модели равномерного распределения в тех случаях, когда применение этого распределения не обосновано. Понятно, что модель равномерного распределения возникает как выражение нашего незнания, а не как описание наблюдаемых явлений. Тем не менее, это должно быть *полное незнание*, а не "ограниченное знание" – но, именно второе часто имеет место на практике.

К сожалению, изложение этих вопросов в литературе не всегда последовательно и строго. Так, пример, приведенный в *Руководстве* [1 (4.3.7, Пример 1)] (и воспроизведенный в других публикациях) как иллюстрация оценивания стандартной неопределенности типа В исходя из границ, дает решение, не согласующееся с изложенными в тексте рекомендациями. Речь идет об использовании справочных данных, в данном случае – температурного коэффициента линейного расширения меди  $\alpha_{20}(\text{Cu})$ . Действительно, если нам *известно* значение  $\alpha_{20}(\text{Cu})$ , равное  $16,52 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}$ , и известна максимальная погрешность  $0,40 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}$ , то у нас уже нет необходимости полагать, что  $\alpha_{20}(\text{Cu})$  "находится с равной вероятностью" где-то в интервале от  $16,12 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}$  до  $16,92 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}$ . Налицо ситуация (2), а не (3), и потому оправдано применение модели треугольного, а не равномерного распределения.

Если обратиться к примерам вычисления неопределенности при калибровке средств измерений, опубликованным в уже достаточно давнем документе [2], то в подавляющем большинстве случаев в бюджете неопределенности можно увидеть только два типа распределений: нормальное (оценивание типа А) и равномерное (оценивание типа В). Положение не изменилось и сегодня, о чем свидетельствуют, например, бюджеты неопределенности, представляемые участниками Ключевых сличений, которые проводит Консультативный комитет по количеству вещества МКМВ. Стало обычной практикой переходить от предела допускаемой погрешности, нормированного для средства измерений, к соответствующей стандартной неопределенности, используя модель равномерного распределения. При этом, однако, значение величины известно – оно не вычислено исходя из границ, как предполагается в ситуации (3), а получено непосредственно путем измерения. Во всех этих случаях мы вновь имеем дело с ситуацией (2) и, следовательно, имеются достаточные основания принять треугольное распределение вероятности.

Отдельного рассмотрения заслуживает оценивание неопределенности измерений, связанной с использованием в химико-аналитических операциях стандартной мерной посуды. Приготовление раствора заданного объема или дозирование раствора – едва ли не самые распространенные операции в химическом анализе. Номинальная вместимость мерной колбы или пипетки представляет собой ожидаемое значение объема, а нормированные допуски, установленные в стандартах на мерную посуду, суть пределы погрешности этого измерения (подробнее об этом см. в [3]). Следовательно, для нахождения стандартной неопределенности измерений объема, исходя из допусков, следует использовать модель треугольного распределения. Действительно, *Руководство ЕВРАХИМ/СИТАК* [4] (после критики [5], вызванной неверным решением этих вопросов в первом издании документа) демонстрирует применение этого распределения в Примерах А1–А3.

Между тем, в ряде публикаций, описывающих нахождение неопределенности в химическом анализе, например, [6, 7], включая учебные материалы [8, 9], для вычисления стандартной неопределенности, связанной с измерением объема растворов, предлагается использовать равномерное распределение ( $k = \sqrt{3}$ ). Это оправдывают целесообразностью консервативного, т. е. достаточно осторожного подхода, ведущего, как говорят, к "пессимистическим" оценкам. Так, авторы [10], вновь обращаясь к вопросу о неопределенности, связанной с мерной посудой, утверждают, что "с пессимистическим оцениванием неопределенности измерений (...) лаборатория не сможет представить результаты анализа, неопреде-

ленность которых окажется недооцененной". Соображения такого рода, может быть, и оправданы в каких-то случаях. Однако, они неприменимы в отношении неопределенности измерений объема растворов в количественном анализе. Вклад этой составляющей в суммарную неопределенность невелик (обычно в пределах 1 % отн.) и практически не влияет на неопределенность результата анализа. Есть ли в таком случае смысл заменять "оптимистическое" оценивание на "пессимистическое" – в ущерб научным принципам, лежащим в основе оценивания неопределенности измерений?

Использование модели равномерного распределения имеет давние традиции в метрологии. В отечественной практике задачу нахождения СКО "элементарных систематических погрешностей" (сейчас мы бы сказали – составляющих неопределенности) решали именно в рамках модели равномерного распределения, мотивируя это получением достаточно осторожных оценок. Простое правило звучало так: "...если известна оценка границ какой-то погрешности, ее распределение следует считать равномерным, если известна оценка среднего квадратического отклонения погрешности, распределение следует считать нормальным" [11, с. 92].

Хотя такой подход получил широкое распространение, его нельзя считать обоснованным. Если мы говорим, что оценивание неопределенности типа В, или приписывание входным величинам определенной функции плотности вероятности, опирается на научное суждение, основанное на всей имеющейся информации, то мы должны использовать эту информацию в полной мере – в строгом соответствии с правилами, изложенными в *Руководстве*.

Если получаемая оценка суммарной неопределенности кажется "слишком оптимистичной", это означает, что наша модель несовершенна, т.е. она не учитывает какие-то влияющие факторы, которые следовало бы принять во внимание. Попытка же увеличить неопределенность за счет использования равномерного распределения (при оценивании по типу В) снижает ценность научного суждения и роль субъективной вероятности в оценивании неоп-

ределенности измерений. Соображения "оптимизма", "пессимизма" и "осторожности" не должны быть доминирующими при выборе функции распределения входных величин модели измерений.

## Список литературы

1. *Руководство по выражению неопределенности измерения* / МБМВ, МЭК, МФКХ, ИСО, ИЮПАК, ИЮПАП, МОЗМ. Пер. с англ. С.-Петербург: ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, 1999.
2. EA-4/02 M: 1999. *Expression of the uncertainty of measurement in calibration. European co-operation for accreditation*.
3. Kadis R. *Evaluation of measurement uncertainty in volumetric operations: the tolerance-based approach and the actual performance-based approach* / R. Kadis // *Talanta*. – 2004. – V. 64. № 1. – P. 167-173.
4. *Руководство ЕВРАХИМ/СИТАК. Количественное описание неопределенности в аналитических измерениях. 2-е изд. Пер. с англ. С.-Петербург: ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, 2002.*
5. Kadis R. *Evaluating uncertainty in analytical measurements: the pursuit of correctness* / R. Kadis // *Accred. Qual. Assur.* – 1998. – V. 3. № 6. – P. 237-241.
6. Drolc, M. Cotman, M. Roš. *Uncertainty of chemical oxygen demand determination in wastewater samples* // *Accred. Qual. Assur.* – 2003. – V. 8. № 3-4. – P. 138-145.
7. Leiva G.M.A., Araya Ma.C., Alvarado A.M., Seguel R.J. *Uncertainty estimation of anions and cations measured by ion chromatography in fine urban ambient particles (PM2.5)* // *Accred. Qual. Assur.* 2012. V. 17. № 1. P. 53-63.
8. R. Lawn, F.E. Prichard (co-ordinating author). *Practical laboratory skills training guides: Measurement of volume*. Teddington: LGC, 2003.
9. *Examples of measurement uncertainty budgets in analytical chemistry. Uncertainty of 50 ml volumetric flask volume* // University of Tartu, EC-JRC IRMM. – Attach to [http://www.ut.ee/katsekoda/GUM\\_examples/50\\_ml\\_flask.pdf](http://www.ut.ee/katsekoda/GUM_examples/50_ml_flask.pdf).
10. Meyer V.R. *Calibration, handling repeatability, and the maximum permissible error of single-volume glass instruments* / V.R. Meyer, J. Pfohl, B. Winter. // *Accred. Qual. Assur.* – 2010. – V. 15. № 12. – P. 705-708.
11. С.Г. Рабинович. *Погрешности измерений* / С.Г. Рабинович. – Л.: Энергия, 1978. – 256 с.

Поступила в редколлегию 18.02.2013

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. И.П. Захаров, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

## ВИБІР ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТІ ПРИ ОЦІНЮВАННІ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ «ТИПУ В»

Р.Л. Кадіс

*Розглянуто оцінювання складових невизначеності вимірювань на основі суджень (оцінювання типу В). Задача зводиться до вибору відповідного апріорного розподілу ймовірності розглянутої величини всередині заданих меж виходячи з наявної інформації. Відзначено три типові ситуації, що ведуть до простих модельних розподілів: нормального, трикутного і рівномірного (прямокутного). На прикладах оцінювання невизначеності, наявних в літературі, в тому числі, в Керівництві по оцінюванню невизначеності у вимірюваннях (GUM) і публікаціях по хімічному аналізу, показано, що модель рівномірного розподілу часто використовується в тих випадках, коли її застосування не обґрунтовано. Це виправдовують доцільністю консервативного підходу, що веде до отримання "песимістичних" оцінок. Підкреслюється, що необґрунтований вибір моделі рівномірного розподілу знижує цінність наукового судження і роль суб'єктивної ймовірності в оцінюванні невизначеності вимірювань.*

**Ключові слова:** невизначеність вимірювань, оцінювання типу В, апріорний розподіл ймовірності, рівномірний розподіл, трикутний розподіл

## THE CHOICE OF THE PROBABILITY DISTRIBUTION FUNCTION IN A TYPE B UNCERTAINTY EVALUATION

R.L. Kadis

*Evaluation of measurement uncertainty components, based on judgment, (a Type B evaluation) is considered. The problem amounts to choosing, on the basis of the information available, an appropriate prior probability distribution of the variable at issue within the specified bounds. Three typical situations are highlighted that lead to simple model distributions: normal, triangular, and uniform (rectangular) distributions. It is demonstrated, with examples of uncertainty estimation, taken from literature, including the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM) and publications on chemical analysis, that the uniform distribution model is often used in those cases where its application is unjustified. This practice is borne out by the advisability of a conservative approach resulting in a "pessimistic" evaluation. It is stressed that the unjustified choice of the uniform distribution model lowers the value of a scientific judgment and the role of subjective probability in the measurement uncertainty evaluation.*

**Keywords:** *measurement uncertainty, Type B evaluation, prior probability distribution, uniform distribution, triangular distribution.*