УДК 006.91:519.2

Ю.В. Куц, С.В. Шенгур

Національний авіаційний університет, Київ

ПОДАННЯ РЕЗУЛЬТАТУ КУТОВИХ ВИМІРЮВАНЬ В КОНЦЕПЦІЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

В роботі описано метод, в основу якого поставлена задача оцінювання характеристик розподілів ймовірностей випадкових кутів та їх невизначеності за апроксимаціями їх вибіркових розподілів визначеними аналітично на інтервалі [0,2π) неперервними функціями.

Ключові слова: *випадковий кут, розширена невизначеність, асиметрія розподілу, функція щільності розподілу ймовірностей, перетворення Джонсона.*

Вступ

Результати вимірювання значної кількості природних явищ та процесів мають циклічну залежність, що обумовлює необхідність їх розгляду на круговій шкалі. Національні та міжнародні стандарти із забезпечення єдності вимірювань містять рекомендації перш за все щодо представлення результатів лінійних вимірювань. Тому важливою є задача опрацювання та представлення результатів кутових вимірювань з урахуванням специфіки випадкових кутів (ВК).

Згідно з GUM [1], результатом вимірювання є оцінка найбільш імовірного значення вимірюваної величини, супроводжена кількісною оцінкою її якості – невизначеністю.

За результат вимірювання, в залежності від вимог, приймають наступні оцінки характеристик положення – вибіркові середнє значення, моду або медіану.

Сучасні наукові дослідження методів статистичного опрацювання результатів вимірювання все частіше враховують той факт, що експериментальні дані часто незадовільно апроксимуються нормальним законом розподілу випадкових величин. Такий висновок деякою мірою зумовлений недосконалістю тестів для перевірки статистичних гіпотез та їх високою чутливістю до обсягу вибірок. Врахування такої особливості необхідне під час розробки нових методів опрацювання даних вимірювання.

До таких методів належать, наприклад, методи апроксимації результатів вимірювань емпіричними розподілами, такими як розподіл Джонсона, Пірсона, розклад Корніша-Фішера, розклад у ряди Грема-Шарльє, Еджвотра, а також методи, направлені на підвищення точності визначення результату вимірювання за вибірками малого обсягу (2…100 значень) за рахунок збільшення кількості обчислювальних операцій – “бутстреп” метод.

© Ю.В. Куц, С.В. Шенгур

Основний матеріал

Для аналізу результатів кутових вимірювань достатнього обсягу (не менше 40 значень у вибірці) зручним є використання розподілу Джонсона [2]. Такий метод дозволяє врахувати обмеженість діапазону зміни кутових значень інтервалом $[0, 2\pi)$, застосовуючи усі три форми кривих Джонсона [3], підібрати оптимальну апроксимуючу унімодальну функцію щільності розподілу ймовірності (щ.р.і.) з урахуванням асиметрії експериментальних даних. За аналітичним виразом функції щ.р.і. обчислюють вибіркові кругові моду, як кутове значення аргументу, якому відповідає нульове значення першої похідної функції, медіану, як 0,5 квантиль функції розподілу та середнє, як тригонометричний момент першого порядку нульового напряму.

З урахуванням специфіки кругової шкали, система кривих Джонсона набуває наступного виду:

1. Логарифмічно нормальний S_L розподіл (рис. 1):

$$p_{S_L}(\theta)=\frac{\eta}{\sqrt{2\pi}(\theta-\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\eta^2\left[\frac{\gamma}{\eta}+\ln(\theta-\varepsilon)\right]^2\right\}, \quad (1)$$

де $\varepsilon<\theta<2\pi$; ε – нижня границя випадкового кута, $0\le\varepsilon<2\pi$; γ – параметр форми, $-\infty<\gamma<\infty$; η – параметр форми, $\eta>0$.

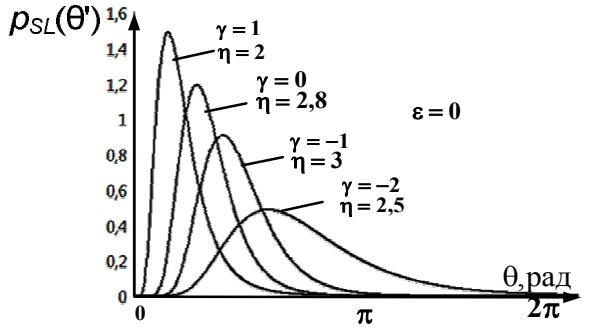

Рис. 1. Приклад S_L розподілу Джонсона

Це унімодальний розподіл, який має завжди додатну асиметрію та ексцес, який перевищує нормальний. Функція щільності зростає від нуля до точки максимуму, після чого більш повільно спадає.

2. S_B розподіл Джонсона (рис. 2):

$$p_{S_B}(\theta)=\frac{\eta}{\sqrt{2\pi}}\frac{\lambda}{(\theta-\varepsilon)(\lambda-\theta+\varepsilon)}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\gamma+\eta\ln\left(\frac{\theta-\varepsilon}{\lambda-\theta+\varepsilon}\right)\right]^2\right\}, \quad (2)$$

де $\varepsilon<\theta<\varepsilon+\lambda$; ε – найменше ймовірне значення випадкового кута, $0\le\varepsilon<2\pi$; $\varepsilon+\lambda$ – найбільше ймовірне значення випадкового кута, $0<\lambda<2\pi$; γ – параметр форми, що характеризує асиметрію розподілу, $-\infty<\gamma<\infty$, η – параметр форми, що характеризує гостровершинність розподілу, $\eta>0$.

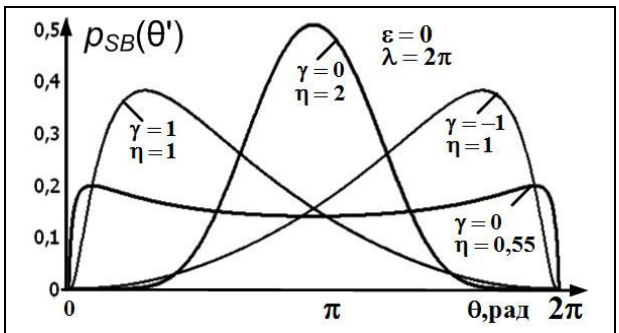

Рис. 2. Приклад S_B розподілу Джонсона

Це чотирипараметровий розподіл, який може бути як унімодальним, так і бімодальним та набувати додатної або від'ємної асиметрії.

3. S_U розподіл Джонсона (рис. 2):

$$p_{S_U}(\theta)=\frac{\eta}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{(\theta-\varepsilon)^2+\lambda^2}}\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\gamma+\eta\ln\left\{\left(\frac{\theta-\varepsilon}{\lambda}\right)+\left[\left(\frac{\theta-\varepsilon}{\lambda}\right)^2+1\right]^{1/2}\right\}\right)^2\right], \quad (3)$$

де $0\le\theta<2\pi$, ε – параметр, що характеризує центр розподілу, $0\le\varepsilon<2\pi$; λ – параметр масштабу, $\lambda>0$; γ – параметр форми, що характеризує асиметрію розподілу, $-\infty<\gamma<\infty$, η – параметр форми, $\eta>0$.

Це чотирипараметровий унімодальний розподіл, який може набувати як додатної, так і від'ємної асиметрії в залежності від того, додатна чи від'ємна величина γ.

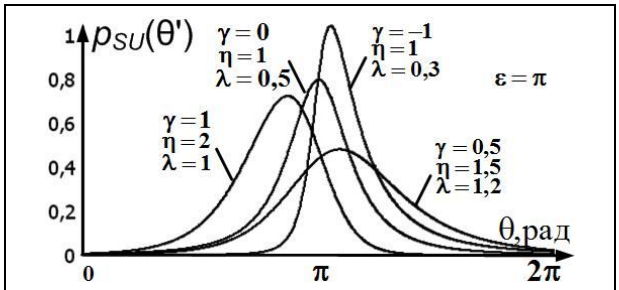

Рис. 3. Приклад S_U розподілу Джонсона

Методика [4] (рис. 4) формування результату вимірювання випадкових кутів із застосуванням розподілу Джонсона полягає у наступному:

1. Отриману за результатами спостережень вибірку ВКВ $\Theta=\{\theta_1,...,\theta_j,...,\theta_n\}$ модифікують та формують нову вибірку $\Theta'=\{\theta'_1,...,\theta'_j,...,\theta'_n\}$ (рис. 5), де $\theta'_j=\theta_j-\theta_{зм}$, $\theta_{зм}=\bar{\theta}$, $\bar{\theta}$ – вибіркове кругове середнє:

$$\bar{\theta}=\mathrm{Arctg}\left(\sum_{j=1}^{n}\sin\theta_j\Big/\sum_{j=1}^{n}\cos\theta_j\right), \quad (4)$$

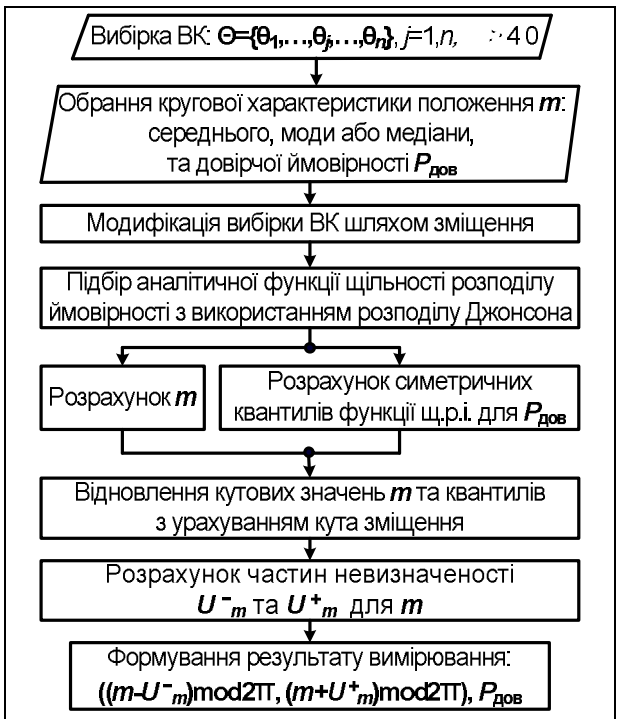

Рис. 4. Узагальнене схематичне зображення методики формування результату вимірювання ВК

де Arctg – функція чотириквадратичного арктангенса.

2. Для сформованої вибірки Θ' здійснюють підбір аналітичної функції $p_{S_X}(\theta')$ щільності розподілу ймовірностей з використанням кривих Джонсона.

Підбір функції полягає у виборі системи розподілів Джонсона, підборі параметрів обраної системи та перевірки відповідності підібраної функції емпіричним даним. Перевірку відповідності здійснюють на основі модифікованого критерію хі-квадрат з використанням емпіричних та теоретичних площ.

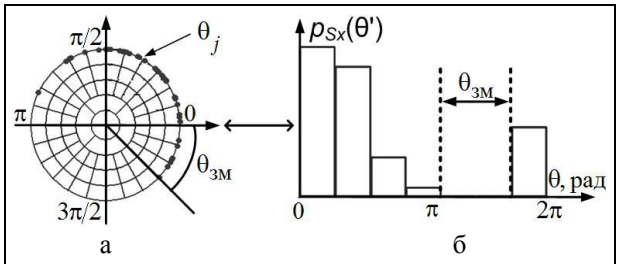

Рис. 5. Зображення вибірки ВК:
а – кругова діаграма; б – гістограма

Для підвищення точності апроксимації здійснюють повторне зміщення досліджуваної вибірки Θ випадкових кутових величин у межах інтервалу $[0, 2\pi)$. Для нової зміщеної вибірки Θ' будують функцію щільності розподілу ймовірності та розраховують значення критерію. Така процедура повторюється необхідну кількість разів до досягнення найменшого значення критерію.

3. На основі аналітичного виразу функції щільності розподілу ймовірності $p_{S_X}(\theta')$ випадкових кутів визначають значення вибіркових кругових характеристик: моди, медіани, тригонометричного моменту заданого порядку та напряму, за яким обчислюють оцінки значень вибіркових кругових середнього напряму, кругової дисперсії, асиметрії, ексцесу.

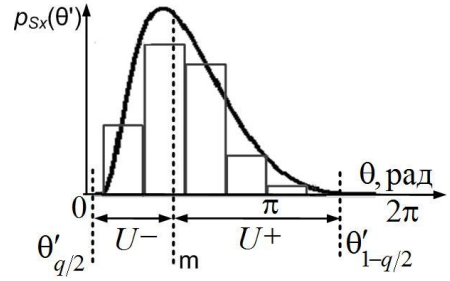

Рис. 6. Приклад апроксимації вибірки ВК кривою Джонсона

Значення оцінки вибіркового кругового середнього [5] як

$$\mu_1' = 1 - \operatorname{Arg} f_1(\theta), \tag{5}$$

де $f_1(\theta)$ – тригонометричний момент першого порядку.

Оцінка медіани Med визначається як 0,5 квантиль функції розподілу, одержаної з $p_{S_X}(\theta')$, а оцінка моди Mode є значенням аргументу θ, для якого перша похідна функції $p_{S_X}(\theta')$ дорівнює 0.

4. Оцінюють границі довірчого інтервалу як симетричні квантилі $\theta'_{q/2}$ та $\theta'_{1-q/2}$ для заданої довірчої ймовірності $P_{дов} = 1 - q$, які відповідають розширеній невизначеності результату вимірювання та розташовані в загальному випадку несиметрично відносно середнього значення вибірки.

5. Кутові значення оцінок вибіркових кругових характеристик та границь довірчого інтервалу відновлюють із урахуванням кута зміщення $\theta_{зм}$:

$$\begin{aligned} \theta_{q/2} &= \left(\theta'_{q/2} + \theta_{зм}\right) \bmod 2\pi, \\ \theta_{1-q/2} &= \left(\theta'_{1-q/2} + \theta_{зм}\right) \bmod 2\pi. \end{aligned} \tag{6}$$

Значення $\theta_{q/2}$ та $\theta_{1-q/2}$ є границями розширеної невизначеності результату вимірювання.

6. Визначають ліву і праву частини розширеної невизначеності результату вимірювання відносно його найбільш імовірного значення (кругових середнього, моди, медіани):

$$\begin{aligned} &U^- = \left(\mu_1 - \theta_{q/2}\right) \bmod 2\pi,\ U^+ = \left(\theta_{1-q/2} - \mu_1\right) \bmod 2\pi, \\ &U^- = \left(\mathrm{Mod} - \theta_{q/2}\right) \bmod 2\pi,\ U^+ = \left(\theta_{1-q/2} - \mathrm{Mod}\right) \bmod 2\pi, \\ &U^- = \left(\mathrm{med} - \theta_{q/2}\right) \bmod 2\pi,\ U^+ = \left(\theta_{1-q/2} - \mathrm{med}\right) \bmod 2\pi \end{aligned} \tag{7}$$

та формують результат вимірювання:

$$\left(\left(\mu_1 - U^-\right)\bmod 2\pi;\ \left(\mu_1 + U^+\right)\bmod 2\pi\right),\ P_{дов},$$

$$\left(\left(Mod - U^-\right)\bmod 2\pi;\ \left(Mod + U^+\right)\bmod 2\pi\right),\ P_{дов}, \quad (8)$$

$$\left(\left(med - U^-\right)\bmod 2\pi;\ \left(med + U^+\right)\bmod 2\pi\right),\ P_{дов}.$$

7. Визначають складові розширеної невизначеності вибіркових кругових середнього, моди та медіани:

$$U^-_{mean} = \frac{\left(\mu_1 - \theta_{q/2}\right)\bmod 2}{\sqrt{n}},\ U^+_{mean} = \frac{\left(\theta_{1-q/2} - \mu_1\right)\bmod 2\pi}{\sqrt{n}},$$

$$U^-_{Mod} = \frac{\left(Mod - \theta_{q/2}\right)\bmod 2\pi}{\sqrt{n}},\ U^+_{Mod} = \frac{\left(\theta_{1-q/2} - Mod\right)\bmod 2\pi}{\sqrt{n}}, \quad (9)$$

$$U^-_{med} = \frac{\left(med - \theta_{q/2}\right)\bmod 2\pi}{\sqrt{n}},\ U^+_{med} = \frac{\left(\theta_{1-q/2} - med\right)\bmod 2\pi}{\sqrt{n}},$$

та формують результат вимірювання:

$$\left(\left(\mu_1 - U^-_{mean}\right)\bmod 2\pi;\ \left(\mu_1 + U^+_{mean}\right)\bmod 2\pi\right),\ P_{дов},$$

$$\left(\left(Mod - U^-_{Mod}\right)\bmod 2\pi;\ \left(Mod + U^+_{Mod}\right)\bmod 2\pi\right),\ P_{дов}, \quad (10)$$

$$\left(\left(med - U^-_{med}\right)\bmod 2\pi;\ \left(med + U^+_{med}\right)\bmod 2\pi\right),\ P_{дов}.$$

Увівши для розрахованих значень середнього μ_1, моди Mod та медіани med спільне позначення *m* можна записати узагальнену форму результату вимірювання:

$$\left(\left(m - U^-_m\right)\bmod 2\pi;\ \left(m + U^+_m\right)\bmod 2\pi\right),\ P_{дов}. \quad (11)$$

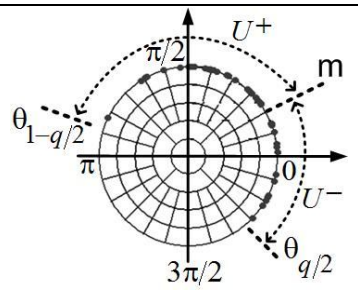

Рис. 7. Зображення результатів інтервального оцінювання вибіркових характеристик ВК на одиничному колі

Висновок

Наведено методику представлення результату вимірювання випадкових кутів у концепції невизначеності шляхом визначення функції розподілу ймовірності на основі апроксимації емпіричних розподілів кривими Джонсона. Методика експериментально досліджена для вибірок ВК обсягом від 40 до 100 значень, що належать до підсукупностей обсягу не менше 10000 значень, сформованих із генеральної або шляхом комбінування кругових законів розподілу. Для кожного обсягу вибірки одержана статистика не менше 1000 значень вибіркових кругових характеристик.

Результати статистичних випробувань показали покращення прецизійності оцінок вибіркових кругових середнього значення до 11%; моди – на 22-27%; медіани – на 15-16%; а також підвищення правильності оцінок границь довірчого інтервалу для результату вимірювання ВК з асиметричної генеральної сукупності на 22-27% та прецизійності для ВК, що належить до симетричної генеральної сукупності на 15-23%.

Список літератури

1. *Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM): First edition. – ISO, 1993. – 101p.*
2. *Хан Г. Статистические модели в инженерных задачах / Г. Хан, С. Шапиро: Пер. с англ. Е. Г. Коваленко / Под ред. В.В. Налимова. – М. : Мир, 1969. – 396 с.*
3. *Johnson N.L. Systems of frequency curves generated by methods of translation / N.L. Johnson // Biometrica. – Vol. 36, 1949. – P. 148-176.*
4. *Куц Ю. В. Знаходження довірчого інтервалу в задачах кутометрії за апроксимацією емпіричних даних розподілом Джонсона / Ю. В. Куц, С. В. Шенгур // Відбір і обробка інформації. – 2011. – Вип. 35 (111). – С. 32-37.*
5. *Куц Ю.В., Щербак Л.М. Статистична фазометрія. – Тернопіль: Вид-во Тернопільського державного університету ім. І. Пулюя, 2009. – 383 с.*

Надійшла до редколегії 6.02.2013

Рецензент: д-р. техн. наук, проф. Л.М. Щербак, Національний авіаційний університет, Київ.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТА УГЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В КОНЦЕПЦИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Ю.В. Куц, С.В. Шенгур

В работе описан метод, в основу которого поставлена задача оценивания характеристик распределений вероятностей случайных углов и их неопределенности по аппроксимациям их выборочных распределений аналитически на интервале [0,2π) непрерывными функциями.

Ключевые слова: *случайный угол, расширенная неопределенность, асимметрия распределения, функция плотности распределения вероятностей, преобразование Джонсона.*

THE PRESENTATION OF ANGULAR MEASUREMENT RESULTS IN THE UNCERTAINTY CONCEPT

Y.V. Kuts, S.V. Shengur

The method based on the task of probability distribution characteristics of the random angles and their uncertainty on the approximations of their sampling distributions analytically on the interval of [0, 2π) by continuous functions is described in the article.

Keywords: *the random angle, the expanded uncertainty, the distribution asymmetry, the function of the probability distribution density, Johnson distribution.*