

---

УДК 621.396.96.095.4:528.8.04-047.27

В.К. Волосюк, В.В. Павликов, С.С. Жила

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Харьков*

## **СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ И КВАЗИОПТИМАЛЬНЫХ УЗКОПОЛОСНЫХ СИСТЕМ АПЕРТУРНОГО СИНТЕЗА**

*Синтезируется алгоритм оптимального восстановления радиометрического изображения (РМИ) в узкополосных многоантенных радиометрических системах апертурного синтеза. Исследуется предельная погрешность оценивания РМИ. Обосновывается целесообразность перехода к квазиоптимальной обработке пространственно-временных сигналов в многоканальной кросскорреляционно-компенсационной радиометрической системе и исследуются потери точности, связанные с отказом от оптимальной обработки. Найдены аналитические выражения для функций неопределенности систем, реализующих оптимальные и квазиоптимальные операции обработки сигналов.*

**Ключевые слова:** узкополосная система апертурного синтеза, функция неопределенности радиометрической системы, кросскорреляционно-компенсационная радиометрическая система, многоэлементная антенная решетка, радиометрическое изображение.

### **Введение**

Радиометрические системы апертурного синтеза (АС) широко применяют для восстановления изображений в радиоастрономии и дистанционном зон-

дировании. Эвристический подход построения таких систем базируется на теореме Ван Циттерта-Цернике [1], связывающей радиояркость пространственно-протяженного объекта радиотеплового излучения и функцию взаимной пространственной

когерентности поля посредством многомерного преобразования Фурье. Задача оптимальной обработки сигналов в узкополосных радиометрических системах АС решена в [2]. Однако в этой работе нестрого обоснован переход к квазиоптимальной обработке (кросскорреляционной), не исследованы соответствующие потери точности оценивания радиометрических изображений (РМИ) и функции неопределенности (ФН) систем, реализующих синтезированные алгоритмы. В статье следуя методике, изложенной в работах [3 – 5], решается задача статистического синтеза алгоритма оптимальной обработки пространственно-временных сигналов в узкополосных системах АС, обосновывается переход к квазиоптимальной обработке, исследуются ФН, предельные погрешности оценивания и потери точности, связанные с переходом к квазиоптимальной обработке.

**Цель работы** – статистический синтез и анализ алгоритмов оптимального и квазиоптимального восстановления РМИ в узкополосных радиометрических системах с произвольной геометрией М-элементных антенных решеток (АР).

**Постановка оптимизационной задачи**

Требуется решить задачу статистического синтеза алгоритма оптимальной обработки радиотеплового излучения в узкополосных М-элементных АР, позволяющих получить на заданном интервале наблюдения (0, T) оптимальную оценку РМИ, исследовать ФН, определить предельную погрешность оценивания, обосновать возможность и целесообразность перехода к алгоритму квазиоптимальной обработки пространственно-временных сигналов.

**Уравнение наблюдения**

Систему уравнений наблюдения запишем в виде (аналогично уравнению (3) в работе [4])

$$\begin{cases} u_i(t) = u(t, \vec{r}_i) = s_i(t) + n_i(t) + n_{r,i}(t), \\ \vdots \\ u_M(t) = u(t, \vec{r}_M) = s_M(t) + n_M(t) + n_{r,M}(t), \end{cases} \quad (1)$$

где  $s_i(t)$ ,  $n_i(t)$  – полезный сигнал и шум, прошедшие i-ю антенну ( $i = \overline{1, M}$ ) и линейную часть приемника (ЛЧП) с передаточной характеристикой  $\dot{K}_i(j2\pi f)$ ,

$$s_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{c}{f}\right)^2 C_f \dot{K}_i(j2\pi f) \exp\{j2\pi f t\} \times \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}_i(f, \vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_0) \exp\left\{j2\pi f \frac{(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_0) \vec{r}_i'}{c}\right\} \dot{A}(f, \vec{\vartheta}) d\vec{\vartheta} df \quad (2)$$

– сигнал на выходе i-го канала ЛЧП,

$$n_i(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}_i(j2\pi f) \dot{N}_i(j2\pi f) \exp(j2\pi f t) df, \quad (3)$$

$C_f = fc^{-1}(\eta_A / 2\Omega_{eff})^{0.5}$ ,  $\eta_A$  – коэффициент полезного действия антенны (в случае отсутствия омических потерь в антенне и согласованной нагрузке  $\eta_A = 1$ ),  $\vec{r}_i'$  – радиус-вектор, характеризующий положение центра фаз i-й антенны относительно фазового центра АР,  $\Omega_{eff} = \iint |\dot{F}(\vartheta_x, \vartheta_y)|^2 (1 - \vartheta_x^2 - \vartheta_y^2)^{-0.5} d\vartheta_x d\vartheta_y$  – эффективный телесный угол антенны (область интегрирования ограничена кругом единичного радиуса  $\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 \leq 1$ . Учитывая, что за пределами круга подынтегральное выражение равно нулю, заменим пределы интегрирования на бесконечные),  $\vec{\vartheta} = \|\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z\|$  – вектор направляющих косинусов,  $\vec{\vartheta}_0 = \|\vartheta_{x0}, \vartheta_{y0}, \vartheta_{z0}\|$  – вектор, характеризующий положение главного максимума диаграммы направленности (ДН) отдельной антенны,  $\dot{F}_i(f, \vartheta_x, \vartheta_y)$  – ДН i-й антенны,  $\otimes$  – оператор свертки,  $\dot{A}(f, \vec{\vartheta})$  – спектрально-угловая плотность комплексной амплитуды излучения,  $\dot{N}_i(j2\pi f)$ ,  $\dot{N}_r(j2\pi f)$  – реализации спектров процессов  $n_i(t)$ ,  $n_r(t)$ .

В (1) для исключения сингулярного решения интегральных уравнений введен белый гауссовский шум в виде следующей суммы [4]

$$n_{r,i}(t) = n_{ra,i}(t) + n_{rb}(t), \quad (4)$$

где  $n_{ra,i}(t)$  – регуляризирующий шум i-го канала,  $n_{rb}(t)$  – регуляризирующий шум, учитывающий взаимное влияние каналов. Элементы корреляционной матрицы регуляризирующих шумов (4) имеют вид

$$\begin{aligned} R_{r,ij}(t_1, t_2) &= \langle n_{r,i}(t_1) n_{r,j}(t_2) \rangle = \\ &= 0,5N_{0ra} \delta_{ij} \delta(t_1 - t_2) + 0,5N_{0rb} \delta(t_1 - t_2), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $0,5N_{0ra}$ ,  $0,5N_{0rb}$  – спектральные плотности мощности (СПМ) составляющих регуляризирующего шума (предполагается, что  $N_{0ra} > N_{0rb}$ ),  $\langle \cdot \rangle$  – знак статистического усреднения,  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j \end{cases}$  – символ Кронекера,  $\delta(t_1 - t_2)$  – дельта-функция.

Предполагается, что процессы  $s(t)$ ,  $n_i(t)$ ,  $n_{r,i}(t)$  взаимно независимы, а спектрально-угловая плотность комплексной амплитуды радиотеплового излучения удовлетворяет условию [5]

$$\langle \dot{A}(f_1, \vec{\vartheta}_1) \dot{A}^*(f_2, \vec{\vartheta}_2) \rangle = V(f_1, \vec{\vartheta}_1) \delta(f_1 - f_2) \delta(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_2),$$

где "\*" – символ комплексного сопряжения,  $V(f, \vec{\vartheta})$  – спектрально-угловая плотность мощности излучения, представляющая собой гиперспектральное РМИ. Далее предполагаем, что  $V(f, \vec{\vartheta})$  постоянна в пределах рабочей полосы частот приемника (т.е.  $V(f, \vec{\vartheta}) = V(f_0, \vec{\vartheta})$ ) и соответствует искомому РМИ.

**Решение оптимизационной задачи**

Найдем оптимальный алгоритм оценки РМИ  $B(\bar{\vartheta})$  из решения уравнения правдоподобия [4, 5]:

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \int_0^T \int_0^T \frac{\delta R_{ij}(t_1, t_2, B(\bar{\vartheta}'))}{\delta B(\bar{\vartheta})} \times \\ \times W_{ij}(t_1, t_2, B(\bar{\vartheta}')) dt_1 dt_2 - \\ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \int_0^T \int_0^T \frac{\delta W_{ij}(t_1, t_2, B(\bar{\vartheta}'))}{\delta B(\bar{\vartheta})} \times \\ \times u_i(t_1) u_j(t_2) dt_1 dt_2 = 0, \quad (6)$$

где  $R_{ij}(t_1, t_2, B(\bar{\vartheta}')) = \langle u_i(t_1) u_j(t_2) \rangle =$  (7)

$$= R_{s,ij}(\cdot) + R_{n,ij}(\cdot) + R_{r,ij}(\cdot)$$

– взаимная корреляционная функция наблюдений. Здесь

$$R_{s,ij}(t_1 - t_2, B(\bar{\vartheta}')) = \langle s_i(t_1) s_j(t_2) \rangle = \\ = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{K}(j2\pi f)|^2 \exp\{j2\pi f(t_1 - t_2)\} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \begin{array}{c} A_{\text{eff}}(\bar{\vartheta}' - \bar{\vartheta}_0) B(\bar{\vartheta}') \times \\ \exp\{j2\pi f(\bar{\vartheta}' - \bar{\vartheta}_0)(\bar{r}_i' - \bar{r}_j') c^{-1}\} \end{array} \right] d\bar{\vartheta}' df, \quad (8)$$

$A_{\text{eff}}(\bar{\vartheta}' - \bar{\vartheta}_0) = \eta_A (c/f)^2 |\dot{F}_N(\bar{\vartheta}' - \bar{\vartheta}_0)|^2$  – эффективная поверхность антенны [6] ( $\dot{F}_N(\bar{\vartheta}' - \bar{\vartheta}_0) = \dot{F}(\bar{\vartheta}' - \bar{\vartheta}_0) / \Omega_{\text{eff}}$ ),

$$R_{n,ij}(t_1 - t_2) = \langle n_i(t_1) n_j(t_2) \rangle = \\ = 0,5N_{0n} \delta_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{K}(j2\pi f)|^2 \exp\{j2\pi f(t_1 - t_2)\} df. \quad (9)$$

Элементы матрицы  $R_{r,ij}(\cdot)$  определены выражением

(5). В (6)  $\frac{\delta}{\delta B(\bar{\vartheta})}$  – знак вариационной производной,

а  $W_{ij}(t_1, t_2, B(\bar{\vartheta}'))$  – функция обратная взаимной корреляционной функции (7), определяемая из уравнения обращения

$$\sum_{k=0}^T \int R_{ik}(t_1, t_2, B(\bar{\vartheta}')) W_{kj}(t_2, t_3, B(\bar{\vartheta}')) dt_2 = \\ = \delta_{ij} \delta(t_1 - t_3). \quad (10)$$

Аналитическое решение (10) удастся получить только для ограниченного класса корреляционных функций. Предположив, что за время  $(0, T)$  наблюдаемые процессы стационарны, будем искать решение поставленной задачи в спектральной области. Для этого, применив к (7) преобразование Фурье, найдем элементы матрицы СПМ

$$G_{ij}(\cdot) = G_{s,ij}(\cdot) + G_{n,ij}(\cdot) + G_{r,ij}(\cdot), \quad (11)$$

$$G_{s,ij}(f, B(\bar{\vartheta}')) = F\{R_{s,ij}(\tau, B(\bar{\vartheta}'))\} =$$

где  $= \frac{1}{2} |\dot{K}(j2\pi f)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} A_{\text{eff}}(\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0) B(\bar{\vartheta}') \times$  (12)

$$\times \exp[j2\pi f(\bar{\vartheta}' - \bar{\vartheta}_0)(\bar{r}_i' - \bar{r}_j') c^{-1}] d\bar{\vartheta}',$$

$$G_{n,ij}(\cdot) = F\{R_{n,ij}(\cdot)\} = 0,5N_{0n} |\dot{K}(j2\pi f)|^2 \delta_{ij}, \quad (13)$$

$$G_{r,ij}(\cdot) = F\{R_{r,ij}(\cdot)\} = 0,5N_{0ra} \delta_{ij} + 0,5N_{0rb}. \quad (14)$$

$F\{\cdot\}$  – оператор прямого преобразования Фурье.

Перепишем (6) в виде (выполнен переход к разностному аргументу  $\tau = t_1 - t_2$  и учтено, что время наблюдения существенно превосходит время корреляции ( $T \gg \tau$ )):

$$-\frac{T}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta R_{ij}(\tau, B(\bar{\vartheta}'))}{\delta B(\bar{\vartheta})} W_{ij}(\tau, B(\bar{\vartheta}')) d\tau = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \int_0^T \int_0^T \frac{\delta W_{ij}(t_1, t_2, B(\bar{\vartheta}'))}{\delta B(\bar{\vartheta})} \times \\ \times u_i(t_1) u_j(t_2) dt_1 dt_2. \quad (15)$$

Применяя преобразование Фурье к (15), получим уравнение правдоподобия в спектральной области

$$\frac{T}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta G_{ij}(f, B(\bar{\vartheta}'))}{\delta B(\bar{\vartheta})} G_{ij}^{-1}(f, B(\bar{\vartheta}')) df = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta G_{ij}(f, B(\bar{\vartheta}'))}{\delta B(\bar{\vartheta})} \frac{\dot{U}_{T,i}^*(j2\pi f) \dot{U}_{T,j}(j2\pi f)}{G_{ij}^2(f, B(\bar{\vartheta}'))} df. \quad (16)$$

При выводе (16) учтено равенство

$$\frac{\delta G_{ij}^{-1}(f, B(\bar{\vartheta}'))}{\delta B(\bar{\vartheta})} = -\frac{1}{G_{ij}^2(f, B(\bar{\vartheta}'))} \frac{\delta G_{ij}(f, B(\bar{\vartheta}'))}{\delta B(\bar{\vartheta})}$$

и введен спектр усеченной интервалом  $(0, T)$  реализации наблюдения  $u(t)$  в виде

$$\dot{U}_T(j2\pi f) = \int_0^T u(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u_T(t) e^{-j2\pi f t} dt. \quad (17)$$

Найдем вариационную производную

$$\frac{\delta G_{ij}(f, B(\bar{\vartheta}'))}{\delta B(\bar{\vartheta})} = \frac{\delta G_{s,ij}(f, B(\bar{\vartheta}'))}{\delta B(\bar{\vartheta})} = \frac{1}{2} |\dot{K}(j2\pi f)|^2 \times \\ \times A_{\text{eff}}(\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0) \exp\left(j2\pi f(\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0)(\bar{r}_i' - \bar{r}_j') c^{-1}\right). \quad (18)$$

Решим уравнение правдоподобия (18) относительно  $B(\bar{\vartheta})$  и, выполнив несложные преобразования, запишем оптимальный алгоритм таким образом:

$$\frac{1}{2} F_{2,D}^{-1} \left\{ \Delta F_{W1,ij}(B, \mu_{ij}) \int_{-\infty}^{\infty} B(\bar{\vartheta}''') A_{\text{eff}}(\bar{\vartheta}'' - \bar{\vartheta}_0) \times \right. \\ \left. \times \exp[j2\pi f_0(\bar{\vartheta}'' - \bar{\vartheta}_0)(\bar{r}_i'' - \bar{r}_j'') c^{-1}] d\bar{\vartheta}'' \right\} = \\ = \left\{ \frac{1}{T} \sum_{i=1}^M \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{U}_{T,i}^*(j2\pi f) \dot{K}_{W,ii}(j2\pi f) \right|^2 df - \right. \\ \left. - P_{N\Sigma}(B) \right\}_{B1} +$$

$$+ \left\{ \frac{2}{T} \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=i+1}^M \exp(j2\pi f_0(\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0)(\bar{r}'_i - \bar{r}'_j)c^{-1}) \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}_{W,ji}^*(j2\pi f) \dot{U}_{T,i}^*(j2\pi f) \times \right. \\ \left. \times \dot{K}_{W,ij}(j2\pi f) \dot{U}_{T,j}(j2\pi f) df - \right. \\ \left. - P_{nb}(B, \bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0) \right\}_{B2}, \quad (19)$$

где

$$\dot{K}_{W,ij}(j2\pi f) = |\dot{K}(j2\pi f)| \times \\ \times \left[ \begin{array}{c} |\dot{K}(j2\pi f)| \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_{\text{eff}}(\bar{\vartheta}' - \bar{\vartheta}_0) B(\bar{\vartheta}') \times \right. \\ \left. \times \exp[j2\pi f_0(\bar{\vartheta}' - \bar{\vartheta}_0)(\bar{r}'_i - \bar{r}'_j)c^{-1}] \right\} d\bar{\vartheta}' + N_{0rb} \end{array} \right]^{-1},$$

$$P_{n\Sigma}(B) = \frac{1}{2} N_{0n} \sum_{i=1}^M \Delta F_{W1,ii}(B, \mu_{ij}) + \\ + \frac{1}{2} \{N_{0ra} + N_{0rb}\} \sum_{i=1}^M \Delta F_{W2,ii}(B, \mu_{ij}), \quad (20)$$

$$P_{nb}(\cdot) = N_{0rb} \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=i+1}^M \Delta F_{W2,ij}(B, \mu_{ij}) \times \\ \times \exp[j2\pi f_0(\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0)(\bar{r}'_i - \bar{r}'_j)c^{-1}], \quad (21)$$

$$\Delta F_{W1,ij}(B, \mu_{ij}) = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{K}(j2\pi f)|^4 \times \\ \times \left[ \begin{array}{c} |\dot{K}(j2\pi f)|^2 \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_{\text{eff}}(\bar{\vartheta}' - \bar{\vartheta}_0) B(\bar{\vartheta}') \times \right. \\ \left. \times \exp[j2\pi f_0(\bar{\vartheta}' - \bar{\vartheta}_0)(\bar{r}'_i - \bar{r}'_j)c^{-1}] \right\} d\bar{\vartheta}' + \\ + N_{0n} |\dot{K}(j2\pi f)|^2 \delta_{ij} + N_{0ra} \delta_{ij} + N_{0rb} \end{array} \right]^{-2} df, \quad (22)$$

$$\Delta F_{W2,ij}(B, \mu_{ij}) = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{K}(j2\pi f)|^2 \times \\ \times \left[ \begin{array}{c} |\dot{K}(j2\pi f)|^2 \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_{\text{eff}}(\bar{\vartheta}' - \bar{\vartheta}_0) B(\bar{\vartheta}') \times \right. \\ \left. \times \exp[j2\pi f_0(\bar{\vartheta}' - \bar{\vartheta}_0)(\bar{r}'_i - \bar{r}'_j)c^{-1}] \right\} d\bar{\vartheta}' + \\ + N_{0n} |\dot{K}(j2\pi f)|^2 \delta_{ij} + N_{0ra} \delta_{ij} + N_{0rb} \end{array} \right]^{-2} df, \quad (23)$$

где  $\Delta F_{Wz,ij}(\cdot)$  ( $z=1,2$ ) – ширина полосы входных цепей радиометра после декоррелирующих фильтров. Передаточные характеристики декоррелирующих фильтров зависят от соотношения сигнал/шум

$$\mu_{ij}(\bar{\vartheta}_0) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_{\text{eff}}(\bar{\vartheta}' - \bar{\vartheta}_0) B(\bar{\vartheta}') \times \right. \\ \left. \times \exp(j2\pi f_0(\bar{\vartheta}' - \bar{\vartheta}_0)(\bar{r}'_i - \bar{r}'_j)c^{-1}) \right\} d\bar{\vartheta}'}{N_{0n} |\dot{K}(j2\pi f)|^2 \delta_{ij} + N_{0ra} \delta_{ij} + N_{0rb}}.$$

В левой части (19)  $F_{2,D}^{-1}\{\cdot\}$  – это оператор обратного дискретного преобразования Фурье. Правая

часть (19) описывает оптимальные операции обработки спектра наблюдения, левая – физическую сущность восстанавливаемого РМИ.

Оптимальный алгоритм в правой части (19) описывает обработку наблюдений в спектральной области. Найдем вид этого алгоритма во временной области в виде

$$\left\{ \frac{1}{T} \sum_{i=1}^M \int_0^T u_{d,i}^2(t) dt - P_{n\Sigma, f0}(B) \right\}_{B1} + \\ + \left\{ \frac{2}{T} \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=i+1}^M \exp(j2\pi f_0(\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0)(\bar{r}'_i - \bar{r}'_j)c^{-1}) \times \right. \\ \left. \times \int_0^T u_{d,ji,i}(t) u_{d,ij,j}(t) dt - P_{nb}(B, \bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0) \right\}_{B2}, \quad (24)$$

где

$$\int_0^T u_{d,i}^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{U}_{T,i}^*(j2\pi f) \dot{K}_{W,ii}(j2\pi f) \right|^2 df, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}_{W,ji}^*(j2\pi f) \dot{U}_{T,i}^*(j2\pi f) \dot{K}_{W,ij}(j2\pi f) \dot{U}_{T,j}(j2\pi f) df = \\ = \int_0^T u_{d,ji,i}(t) u_{d,ij,j}(t) dt.$$

Здесь  $u_{d,i}(t)$  – наблюдение в  $i$ -м канале, прошедшее фильтр, импульсная характеристика которого равна  $h_d(t) = F^{-1}\{\dot{K}_{W,ii}(j2\pi f)\}$ , а  $u_{d,ij,i}(t)$  – наблюдение в  $i$ -м канале, прошедшее фильтр, импульсная характеристика которого равна  $h_{dij}(t) = F^{-1}\{\dot{K}_{W,ij}(j2\pi f)\}$ , где  $F^{-1}\{\cdot\}$  – оператор обратного преобразования Фурье.

Алгоритм (24) содержит следующие операции обработки радиометрических сигналов:

– декорреляции наблюдений с последующим квадратичным детектированием, усилением в  $T^{-1}$  раз, суммированием результатов на выходах  $M$  каналов и компенсации суммарной мощности внутренних шумов  $M$ -канального приемника (т.е. обработка в  $M$ -канальном компенсационном радиометре, см. операции обработки сигналов в скобках  $\{\cdot\}_{B1}$ );

– декорреляции наблюдений с последующим межканальным перемножением, интегрированием, усилением в  $2T^{-1}$  раз, умножения на комплексную синусоиду и суммирования выходных эффектов, вычисление вещественной части суммы и компенсации мощности шумов  $P_{nb}(B, \bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0)$  (т.е. обработка в  $M$ -канальной кросскорреляционно-компенсационной радиометрической системе, см. операции обработки сигналов в скобках  $\{\cdot\}_{B2}$ ).

## Предельные погрешности оценивания

Предельные погрешности оценивания получим из неравенства Рао-Крамера [5]. Повторно дифференцируя (16), вычисляя статистическое среднее и обращая полученный результат, найдем предельные погрешности в виде

$$\sigma = 2 \left[ \text{TA}_{\text{eff}} (\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}_0) \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \Delta F_{W1,ij} (B, q_{ij}) \right]^{-1}. \quad (25)$$

Из анализа (25) следует, что точность оценивания зависит от времени наблюдения, максимального значения эффективной поверхности антенны, соотношения сигнал/шум и ширины полос частот всех каналов, зависящих от соотношения сигнал/шум.

## Кросскорреляционно-компенсационная радиометрическая система

Перейдем к квазиоптимальной пространственно-временной обработке сигналов исключением из алгоритмов (19) и (24) операций, заключенных в скобки  $\{\}_{B1}$ . Оставшиеся составляющие (в скобках  $\{\}_{B2}$ ):

$$\begin{aligned} & \frac{2}{T} \text{Re} \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=i+1}^M \exp(j2\pi f_0 (\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0) (\bar{r}'_i - \bar{r}'_j) c^{-1}) \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}_{W,ji}^* (j2\pi f) \dot{U}_{T,i}^* (j2\pi f) \times \\ & \times \dot{K}_{W,ij} (j2\pi f) \dot{U}_{T,j} (j2\pi f) df - P_{nb} (B, \bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0), \\ & \frac{2}{T} \text{Re} \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=i+1}^M \exp(j2\pi f_0 (\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0) (\bar{r}'_i - \bar{r}'_j) c^{-1}) \times \\ & \times \int_0^T u_{dji,i} (t) u_{dij,j} (t) dt - P_{nb} (B, \bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0) \end{aligned} \quad (26)$$

описывают работу кросскорреляционно-компенсационных систем соответственно в спектральной и временной областях.

Полученные квазиоптимальные алгоритмы более просто реализовать. Однако отказ от оптимальной обработки сопровождается потерями точности оценивания. Дадим оценку таких потерь.

## Потери точности при переходе к кросскорреляционно-компенсационной обработке

Точность оценивания при переходе к алгоритмам (26), (27) найдена в виде

$$\sigma_{\text{quasi}} = \left[ \text{TA}_{\text{eff}} (\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}_0) \text{Re} \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=i+1}^M \Delta F_{W1,ij} (B, \mu_{ij}) \right]^{-1}.$$

Потери точности определим отношением

$$\frac{\sigma_{\text{quasi}}}{\sigma} = 1 +$$

$$+ \text{Re} \sum_{i=1}^M \Delta F_{W1,ii} (B, \mu_{ij}) \Big/ \text{Re} \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=i+1}^M \Delta F_{W1,ij} (B, \mu_{ij}). \quad (28)$$

На практике всегда выполняется условие  $N_{0n} + N_{0ra} \geq 10N_{0rb}$  (т.е.  $\Delta F_{W1,ij} (\cdot) \gg \Delta F_{W1,ii} (\cdot)$ ) и при увеличении количества элементов АР потери, вызванные использованием в оптимальном алгоритме только корреляционно-компенсационного канала, стремятся к нулю, т.е. выполняется условие

$$\text{Re} \sum_{i=1}^M \Delta F_{W1,ii} (B, \mu_{ij}) \Big/ \text{Re} \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=i+1}^M \Delta F_{W1,ij} (B, \mu_{ij}) \ll 1. \quad (29)$$

Таким образом, переход к квазиоптимальной обработке (корреляционно-компенсационному приемнику) сопровождается малыми потерями точности, а алгоритмы (26), (27) целесообразно использовать при проведении измерений.

## Физическая сущность восстанавливаемого РМИ

Рассмотрим левую часть алгоритма (19), которую представим в развернутом виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \Delta F_{W1,ij} (B, \mu_{ij}) \exp[j2\pi f_0 (\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0) (\bar{r}'_i - \bar{r}'_j) c^{-1}] \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} B(\bar{\vartheta}^n) A_{\text{eff}} (\bar{\vartheta}^n - \bar{\vartheta}_0) \times \\ & \times \exp[j2\pi f_0 (\bar{\vartheta}^n - \bar{\vartheta}_0) (\bar{r}'_i - \bar{r}'_j) c^{-1}] d\bar{\vartheta}^n. \end{aligned} \quad (30)$$

Рассмотрим два эквивалентных подхода к трактовке физической сущности РМИ.

1. Введем обозначение

$$\begin{aligned} V(\bar{\vartheta}_0, f_0 (\bar{r}'_i - \bar{r}'_j) c^{-1}) &= \int_{-\infty}^{\infty} B(\bar{\vartheta}^n) A_{\text{eff}} (\bar{\vartheta}^n - \bar{\vartheta}_0) \times \\ & \times \exp(j2\pi f_0 (\bar{\vartheta}^n - \bar{\vartheta}_0) (\bar{r}'_i - \bar{r}'_j) c^{-1}) d\bar{\vartheta}^n. \end{aligned} \quad (31)$$

Это выражение представляет собой преобразование Фурье на пространственной частоте  $f_{sp} \Delta \bar{r}_{ij} = f_0 (\bar{r}'_i - \bar{r}'_j) c^{-1}$  от  $B(\bar{\vartheta}^n) A_{\text{eff}} (f_0, \bar{\vartheta}^n - \bar{\vartheta}_0)$ . Функция  $V(\cdot)$  – это функция видности на пространственной частоте  $f_0 (\bar{r}'_i - \bar{r}'_j) c^{-1}$ . Набор таких составляющих на всевозможных пространственных частотах определяет полную функцию видности. Перепишем (30) с учетом (31) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \Delta F_{W1,ij} (B, \mu_{ij}) V(\bar{\vartheta}_0, f_0 (\bar{r}'_i - \bar{r}'_j) c^{-1}) \times \\ & \times \exp(j2\pi f_0 (\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0) (\bar{r}'_i - \bar{r}'_j) c^{-1}). \end{aligned} \quad (32)$$

Из анализа (32) следует, что РМИ – это двумерное дискретное преобразование Фурье от произведения  $\Delta F_{W1,ij} (B, \mu_{ij}) V(\bar{\vartheta}_0, f_0 (\bar{r}'_i - \bar{r}'_j) c^{-1})$  по всевозможным пространственным частотам, определяемым в квазимонохроматическом приближении геометрией АР.

Если область частот заполнена эквидистантно с шагом  $f_0 \Delta \bar{r}'_{\min} c^{-1}$ , где  $\Delta \bar{r}'_{\min}$  – шаг, равный наименьшему расстоянию между фазовыми центрами антенн в АР, то восстановленное РМИ будет периодически продолженным с шагом  $1/\Delta \bar{r}'_{\min}$ . В случае, когда область частот заполнена не эквидистантно, т.е. имеются незаполненные области пространственной спектральной чувствительности на некоторых частотах, восстановленное РМИ может быть значительно искажено. Математически это выразим следующим образом. Пусть имеется функция  $\Pi(f_0(\bar{r}'_i - \bar{r}'_j)c^{-1})$ , которая обнуляет некоторые отсчеты эквидистантно заполненной функции видности (эквивалентно пропуску некоторых пространственных частот в функции видности). Тогда восстановленное РМИ примет вид

$$\frac{1}{2} F_{2D}^{-1} \left\{ \Delta F_{W1,ij}(B, \mu_{ij}) V(\bar{\vartheta}_0, f_0(\bar{r}'_i - \bar{r}'_j)c^{-1}) \times \Pi(f_0(\bar{r}'_i - \bar{r}'_j)c^{-1}) \right\},$$

где  $F_{2D}^{-1}\{\cdot\}$  – оператор обратного двумерного дискретного преобразования Фурье.

Используя свойства дискретного преобразования Фурье, перепишем это выражение таким образом

$$\frac{1}{2} F_{2D}^{-1} \left\{ \Delta F_{W1,ij}(B, \mu_{ij}) V(\bar{\vartheta}_0, f_0(\bar{r}'_i - \bar{r}'_j)c^{-1}) \right\} \otimes F_{2D}^{-1} \left\{ \Pi(f_0(\bar{r}'_i - \bar{r}'_j)c^{-1}) \right\}, \quad (33)$$

где  $\otimes$  – оператор свертки.

Таким образом, наличие незаполненных значений функции видности приведет к искажению восстанавливаемого РМИ. При этом оценить влияние «дыр» в области функции видности на результаты формирования РМИ можно имитационным моделированием.

2. Представим функцию видности (31) следующим образом

$$V(\cdot) = B(\bar{\vartheta}^n) \otimes \left[ A_{\text{eff}}(f_0, -\bar{\vartheta}^n + \bar{\vartheta}_0) \times \exp(-j2\pi f_0(\bar{\vartheta}^n - \bar{\vartheta}_0)(\bar{r}'_i - \bar{r}'_j)c^{-1}) \right]. \quad (34)$$

В области пространственного спектра выражение (34) примет вид

$$F_{2,D} \{B(\bar{\vartheta}^n)\} \times F_{2,D} \left\{ A_{\text{eff}}(-\bar{\vartheta}^n + \bar{\vartheta}_0) \times \exp(-j2\pi f_0(\bar{\vartheta}^n - \bar{\vartheta}_0)(\bar{r}'_i - \bar{r}'_j)c^{-1}) \right\}, \quad (35)$$

а левая часть (19) примет вид

$$\frac{1}{2} F_{2D}^{-1} \left\{ \Delta F_{W1,ij}(B, \mu_{ij}) F_{2,D} \{B(\bar{\vartheta}^n)\} \times A_{\text{eff}}(-\bar{\vartheta}^n + \bar{\vartheta}_0) \times \exp(-j2\pi f_0(\bar{\vartheta}^n - \bar{\vartheta}_0)(\bar{r}'_i - \bar{r}'_j)c^{-1}) \right\}. \quad (36)$$

Из анализа (36) следует, что РМИ – это обратное двумерное дискретное преобразование Фурье от про-

изведения Фурье-спектров (по пространственным частотам) истинной радиояркости и радиоинтерферометрической ДН. Если при этом спектр пространственных частот радиоинтерферометрической ДН (область пространственной спектральной чувствительности системы) будет содержать пропуски (отсутствуют определенные базы между парами антенн в АР), то восстановленное РМИ, как и в предыдущем случае, будет искажено. Степень этого искажения можно оценить имитационным моделированием.

### ФН узкополосных радиометрических систем апертурного синтеза

Выделим в (19) ФН системы, реализующей оптимальный алгоритм, в виде (выполнена нормировка)

$$\Psi_H(\bar{\vartheta}, \bar{\vartheta}^n, \bar{\vartheta}_0, f_0, \bar{r}'_i - \bar{r}'_j, \mu_{ij}, A_{\text{eff}}) = \frac{1}{2} A_{\text{eff}}(\bar{\vartheta}^n - \bar{\vartheta}_0) \times \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \Delta F_{W1,ij}(B, \mu_{ij}) \exp(j2\pi f_0(\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0)(\bar{r}'_i - \bar{r}'_j)c^{-1}) \times \exp(j2\pi f_0(\bar{\vartheta}^n - \bar{\vartheta}_0)(\bar{r}'_i - \bar{r}'_j)c^{-1}) \times \left[ \frac{1}{2} A_{\text{eff}}(\bar{\vartheta}^n - \bar{\vartheta}_0) \sum_{i=1}^M \Delta F_{W1,ii}(B, \mu_{ii}) \right]^{-1}. \quad (Д.20)$$

Эту ФН разделим на две составляющих, соответствующих операциям обработки сигналов, выделенных в скобках  $\{\cdot\}_{B1}, \{\cdot\}_{B2}$  следующим образом

$$\Psi_H(\cdot) = \Psi_{B1}(\cdot) + \Psi_{B2}(\cdot) = \left\{ \frac{A_{\text{eff}}(\bar{\vartheta}^n - \bar{\vartheta}_0)}{A_{\text{eff}}(\bar{\vartheta}^n - \bar{\vartheta}_0)} \right\}_{B1} + \left\{ 2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=i+1}^M \left[ \frac{\Delta F_{W1,ij}(B, \mu_{ij})}{\sum_{i=1}^M \Delta F_{W1,ii}(B, \mu_{ii})} \right] \times \exp(j2\pi f_0(\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0)(\bar{r}'_i - \bar{r}'_j)c^{-1}) \times \frac{A_{\text{eff}}(\bar{\vartheta}^n - \bar{\vartheta}_0)}{A_{\text{eff}}(\bar{\vartheta}^n - \bar{\vartheta}_0)} \exp(j2\pi f_0(\bar{\vartheta}^n - \bar{\vartheta}_0)(\bar{r}'_i - \bar{r}'_j)c^{-1}) \right\}_{B2}. \quad (37)$$

Учитывая (29) несложно видеть, что

$$\max \{ \Psi_{B1}(\cdot) \} \ll \max \{ \Psi_{B2}(\cdot) \}$$

и, соответственно, ФН  $\Psi_{E2}(\cdot)$  существенно влияет на структуру формируемого РМИ, чем ФН  $\Psi_{E1}(\cdot)$ . Последняя представляет собой нормированную эффективную площадь единичной антенны в АР и характеризуется относительно более низкой разрешающей способностью в сравнении с ФН  $\Psi_{E2}(\cdot)$  многоканальной кросскорреляционно-компенсационной радиометрической системы, реализующей алгоритм (26) или (27).

Отметим особенность восстановления РМИ в узкополосных системах АС. Выше было показано (см. вторую трактовку физической сущности РМИ),

что если пространственная спектральная чувствительность системы (двумерное преобразование Фурье от ФН) будет заполнена не плотно, то восстановленное РМИ будет искажено. Проиллюстрируем это с помощью рис. 1 и 2. На рис. 1 приведена геометрия заполненной АР из 1089 антенн ( $33 \times 33$  антенн), ФН  $\Psi_{E2}(\cdot)$  и область пространственной спектральной чувствительности (двумерное преобразование Фурье от ФН) системы. При построении графиков реализован алгоритм параллельного АС и полагалось, что центральная частота  $f_0 = 9,75$  ГГц, а ширина полосы частот 0,5 ГГц. ФН, показанная на рис. 1, б, имеет единственный главный лепесток и существенно уже главного лепестка одиночной антенны, а область пространственной спектральной чувствительности не содержит «дыр».

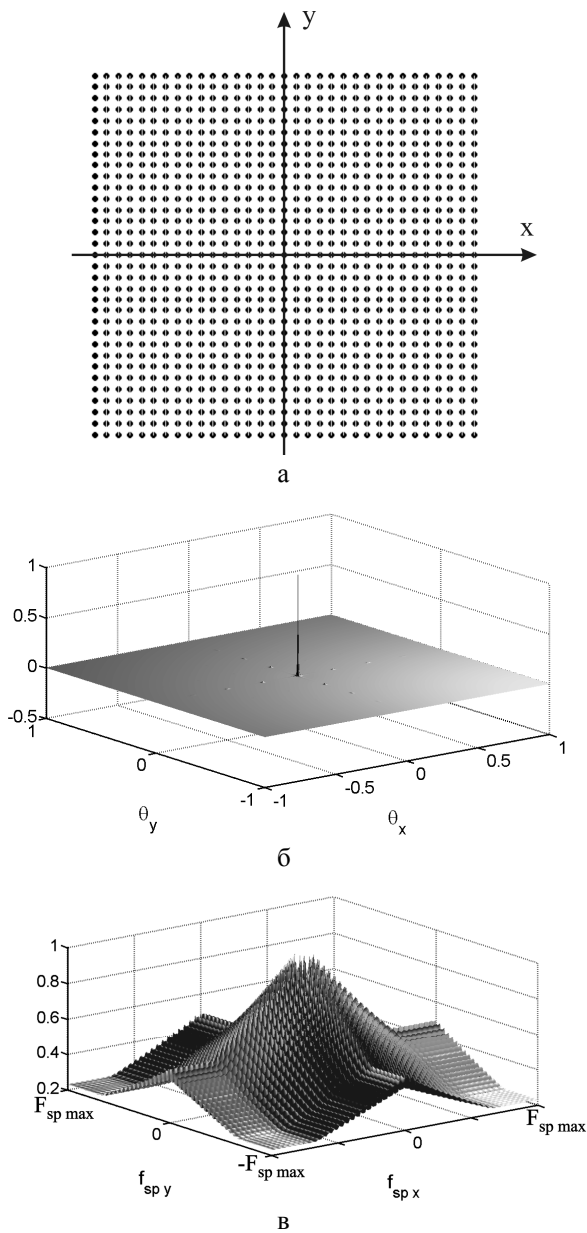


Рис. 1. Плотная АР: геометрия (а), ФН  $\Psi_{E2}(\cdot)$  (б) и область пространственной спектральной чувствительности (в)

На рис. 2 показана геометрия разреженной АР такого же размера но из 25 антенн ( $5 \times 5$  антенн). ФН  $\Psi_{E2}(\cdot)$  такой системы многолепестковая и не позволяет однозначно измерять параметры источника радиотеплового излучения. На рис. 1, 2  $F_{sp \max}$  – максимальное значение пространственной частоты.

Для выполнения однозначных измерений с использованием незаполненной решетки требуется реализовать алгоритм последовательного АС. Это потребует или изменения конфигурации АР в процессе измерений (соответственно существенно увеличится время наблюдения, что неприменимо для исследования радиоисточников с нестабильными статистическими характеристиками излучения), или переключения поддиапазона рабочих частот в широких пределах таким образом, чтобы без пробелов

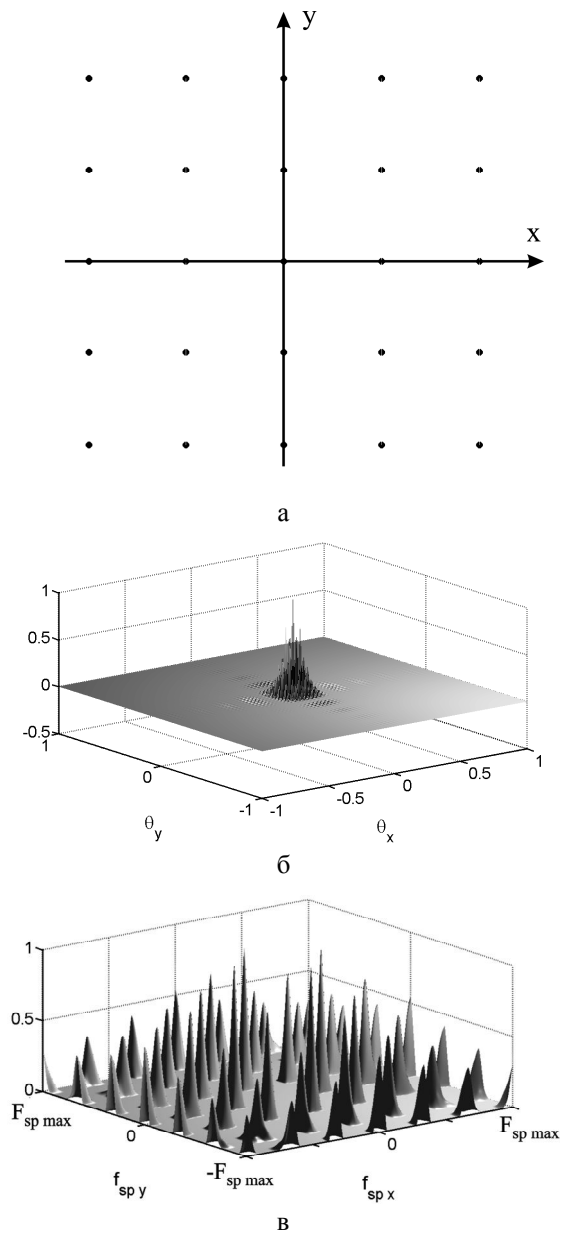


Рис. 2. Разреженная АР: геометрия (а), ФН  $\Psi_{E2}(\cdot)$  (б) и область пространственной спектральной чувствительности (в)

заполнить область пространственной спектральной чувствительности (например, аналогично области, показанной на рис. 1, в). Наиболее перспективно [4] здесь использовать сверхширокополосные входные тракты приемников с соответствующей обработкой.

## Выводы

Решена задача статистического синтеза алгоритма восстановления РМИ в узкополосных многоантенных радиометрических системах АС.

Показано, что оптимальный алгоритм содержит два основных вида операций, которые могут быть реализованы в компенсационном и кросскорреляционно-компенсационном типах радиометров.

Обоснована целесообразность перехода к квазиоптимальному алгоритму, реализуемому кросскорреляционно-компенсационную обработку.

Найдена предельная погрешность оценивания, которая зависит от соотношения сигнал/шум, времени наблюдения, ширины полосы частот всех каналов с учетом декоррелирующих фильтров и геометрии АР.

Оценены потери точности, возникающие за счет отказа от оптимальной обработки.

Найдено аналитическое выражение радиометрической ФН узкополосной системы АС, реализующей оптимальные операции обработки сигналов. Вид этой ФН зависит от соотношения сигнал/шум, геометрии АР и центральной частоты настройки входных цепей радиометра.

Показано, что ФН кросскорреляционно-компенсационной системы существенно влияет на восстанавливаемое РМИ, чем ФН многоканального компенсационного радиометра.

Недостатки узкополосных систем АС следующие:

– необходимость использования большого числа антенн и плотно заполненных АР с реализацией алгоритмов параллельной обработкой сигналов;

– значительное увеличение времени наблюдения малым числом антенн или изменяемой геометрией АР, или перестраиваемым по частоте приемником в алгоритмах последовательного АС.

Оба этих недостатка отсутствуют в сверхширокополосных системах АС [4].

## Список литературы

1. Борн М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф; Перевод с англ. – М.: Наука, 1973. – 720 с.

2. Караваев В.В. Статистическая теория пассивной локации / В.В. Караваев, В.В. Сазонов. – М.: Радио и связь, 1987. – 240 с.

3. Павликов В.В. Статистический синтез алгоритмов формирования радиометрических изображений в двухантенных сверхширокополосных системах апертурного синтеза / В.В. Павликов // Физические основы приборостроения. – 2013. – Т. 2, № 2. – С. 88-96.

4. Павликов В.В. Оптимальное восстановление радиометрических изображений в многоантенных сверхширокополосных радиометрических системах / В.В. Павликов // Системи озброєння і військова техніка: науково-технічний журнал. – 2013. – № 1 (33). – С. 103-111.

5. Волосюк В.К. Статистическая теория радиотехнических систем дистанционного зондирования и радиолокации / В.К. Волосюк, В.Ф. Кравченко. Под ред. В.Ф. Кравченко. – М.: Физматлит, 2008. – 740 с.

6. Шифрин Я.С. Антенны / Я.С. Шифрин. – Х.: ВИРТА, 1976. – 408 с.

Поступила в редколлегию 20.05.2013

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. А.В. Тоцкий, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

## СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ І КВАЗІОПТИМАЛЬНИХ ВУЗЬКОСМУГОВИХ СИСТЕМ АПЕРТУРНОГО СИНТЕЗУ

В.К. Волосюк, В.В. Павліков, С.С. Жила

Синтезується алгоритм оптимального відтворення радіометричного зображення (РМЗ) у вузькосмугових багатоканальних радіометричних системах апертурного синтезу. Досліджується гранична похибка оцінювання РМЗ. Обґрунтовується доцільність переходу до квазіоптимальної обробки просторово-часових сигналів в багатоканальній кросскорреляційно-компенсаційній радіометричній системі і досліджуються втрати точності, пов'язані з відмовою від оптимальної обробки. Знайдено аналітичні вирази для функцій невизначеності систем, що реалізують оптимальні та квазіоптимальні операції обробки сигналів.

**Ключові слова:** вузькосмугова система апертурного синтезу, функція невизначеності радіометричної системи, кросскорреляційно-компенсаційна радіометрична система, багатоелементна антенна решітка, радіометричне зображення.

## SYNTHESIS OF OPTIMAL AND QUASIOPTIMAL NARROW-BAND SYSTEMS OF APERTURE SYNTHESIS

V.K. Volosyuk, V.V. Pavlikov, S.S. Zhyla

The algorithm of optimal restoration of the radiometric image (RMI) in narrow-band multiantenna radiometric systems of aperture synthesis is synthesized. The limit error of RMI estimation is investigated. Reasonability of transition to quasioptimal spatio-temporal signal processing in multichannel cross-correlation-compensation radiometric system and the losses of the accuracy matched with refusal of optimal processing are investigated. Analytical expressions for ambiguity functions of the systems realizing optimal and quasioptimal operations of signal processing are found.

**Keywords:** narrow-band system of aperture synthesis, ambiguity function of radiometric system, cross-correlation-compensation radiometric system, multielement antenna array, radiometric image.