

УДК 681.324 : 621.325

В.Е. Кузьменко, М.О. Можаяєв

Національний технічний університет «ХПІ», Харків

## ОЦІНКА ПАРАМЕТРІВ НЕГАУСОВИХ СТОХАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

*Розглянуті результати аналізу негаусових стохастичних процесів. Вивчена проблема застосовності методу максимальної правдоподібності для випадкових процесів. Запропонований метод оцінки числових характеристик випадкової величини.*

**Ключові слова:** стохастичні процеси, максимальна правдоподібність, негаусовий розподіл, математичне сподівання, дисперсія.

## Вступ

**Постановка задачі та аналіз літератури.** Статистичний аналіз стохастичних процесів займає суттєве місце в теоретичних дослідженнях явищ, що мають різну фізичну природу (радіолокація, розсіювання радіохвиль на неоднорідностях, флуктуації параметрів сигналу, дослідження телекомунікаційного трафіка тощо).

Вирішенню завдання статистичного аналізу присвячена значна кількість робіт [1 – 5]. У них розглядаються алгоритми статистичного аналізу випадкових величин і пропонуються оптимальні алгоритми ухвалення рішень при заданих критеріях якості.

Одним з найбільш поширених у теперішній час критеріїв є критерій максимальної правдоподібності, згідно з яким при спостереженні вибірки приймається та з гіпотез, якій відповідає більше значення функції правдоподібності вибірки. Алгоритм, який ґрунтується на цьому критерії, одержав назву алгоритму максимальної правдоподібності, і у ряді випадків (наприклад, для гаусового розподілу стохастичної величини) достатньо повно збігається з оптимальним алгоритмом. Але останнім часом значний практичний інтерес здобули процеси, які не можна описувати як нормальні випадкові процеси, і для таких процесів, які підлягають негаусовим розподілам (наприклад, гіперболічний, ступеневий, Вейбулла та ін.) [6 – 8], застосовність алгоритму максимальної правдоподібності викликає сумніви. От чому аналіз негаусових розподілів випадкових величин і аналіз поведінки оцінки параметрів такого розподілу є **актуальним науковим завданням**.

**Метою даної статті** є аналіз застосовності методу максимальної правдоподібності та розробка методів оцінювання невідомих параметрів.

## Результати теоретичних досліджень

Розглянемо ряд прикладів, до яких метод максимальної правдоподібності не придатний, і слід

проводити оцінки невідомих параметрів іншими методами.

Уявимо, що проводиться прийом або подовжньої, або поперечної складової вектора поляризації електромагнітного поля  $\vec{E}$ . Припустимо, що можливо зміряти тільки подовжню компоненту даного вектора (рис. 1)  $E_t$ , яка може набувати значень від  $E = |\vec{E}|$  до 0.

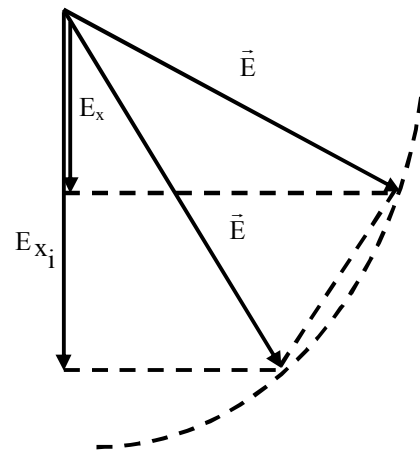


Рис. 1. Розклад вектора поляризації на подовжню компоненту електромагнітного поля

Як легко бачити з простих геометричних міркувань, щільність імовірності того, що в довільний момент часу значення подовжньої компоненти  $E_t$  дорівнює  $E_x$ , має вигляд:

$$p(E; E_x) = \begin{cases} \frac{1}{E} & \text{при } 0 \leq E_x \leq E; \\ 0 & \text{при } E_x > E. \end{cases} \quad (1)$$

Припустимо, що ми вимірювали подовжню компоненту вектора електромагнітного поля  $N$  разів, тобто одержали такий набір вимірювань:

$$\tilde{E}_x = E_{x_1}, E_{x_2}, \dots, E_{x_N}.$$

Імовірність одержати набір  $\tilde{E}_x$  дорівнює:

$$p(E, \tilde{E}_x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{E}\right)^N & \text{при } 0 \leq \tilde{E}_x \leq E; \\ 0 & \text{при } \tilde{E}_x > E. \end{cases} \quad (2)$$

Застосуємо для оцінки (2) принцип максимальної правдоподібності:

$$p(E'; \tilde{E}_x) = \max \text{ при } E' = \bar{E}. \quad (3)$$

Із співвідношення (3) випливає умова:

$$\bar{E} = E_{x_{\max}},$$

де  $E_{x_{\max}}$  – найбільша з компонент величини  $\tilde{E}_x$ .

Насправді, із спаданням  $E'$  ймовірність  $p(E'; \tilde{E}_x)$  зростає доти, поки  $E'$  не стане меншим за яке-небудь зміряне значення  $E_{x_i}$ .

Очевидно, що оцінка (3) дає прийнятне значення  $\bar{E}$ , але в той же час цей результат є випадковим, оскільки даний розподіл істотно відрізняється від гаусового, і тому умову максимальної правдоподібності не можна строго обґрунтувати, як це зроблено в [1].

Крім того, значення величини  $E$  більше значення  $E_{x_{\max}}$  через те, що ймовірність появи серед усіх можливих значень компонент вектора  $E_{x_{\max}}$  компоненти, яка в точності дорівнює  $E$ , нульова.

Для отримання більш обґрунтованої оцінки величини  $E$  розглянемо ймовірність того, що всі  $N$  значень величини  $E_x$  лежать у заданому інтервалі

$$0 \leq E_{x_i} \leq E_x < E \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

Ймовірність виконання нерівності (4) має вигляд:

$$p_N(E; E_x) = \left(\frac{E_x}{E}\right)^N.$$

Введемо дві величини  $E_{x_1}(\varepsilon)$  і  $E_{x_2}(\varepsilon)$  такі, що ймовірність виконання кожної з умов

$$E_{x_{\max}} < E_{x_2}(\varepsilon)$$

та

$$E_{x_{\max}} > E_{x_1}(\varepsilon)$$

дорівнює  $1 - \varepsilon$ .

Тоді маємо:

$$\left(\frac{E_{x_1}(\varepsilon)}{E}\right)^N = \varepsilon$$

та

$$\left(\frac{E_{x_2}(\varepsilon)}{E}\right)^N = 1 - \varepsilon,$$

звідки з урахуванням того, що  $-\ln \varepsilon \ll N$ , можна одержати такі співвідношення:

$$E_{x_1} = E\varepsilon^{1/N} \sim E\left(1 + \frac{\ln \varepsilon}{N}\right);$$

$$E_{x_2} = E(1 - \varepsilon)^{1/N} \sim E\left(1 - \frac{\varepsilon}{N}\right).$$

Тому можна стверджувати, що з великою ймовірністю виконується нерівність:

$$E_{x_{\max}}(1 - \varepsilon)^{1/N} < E < E_{x_{\max}}\varepsilon^{-1/N},$$

якщо припустити, що

$$-\frac{\ln \varepsilon}{N} \ll 1.$$

Також можна скласти і таке співвідношення:

$$E_{x_{\max}}\left(1 + \frac{\varepsilon}{N}\right) < E < E_{x_{\max}}\left(1 - \frac{\ln \varepsilon}{N}\right). \quad (5)$$

Одержана оцінка (5) при достатньо великих  $N$  виявляється дуже точною. Особливо цікаво те, що інтервал (5) спадає пропорційно, а не як  $1/\sqrt{N}$ , що характерне для розподілу Пуассона.

Знайдемо ще одну оцінку, використовуючи середнє значення  $\bar{E}_x$  результатів вимірювань. Якщо визначити середнє значення як:

$$\bar{E}_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_{x_i}$$

і враховуючи незалежність всіх значень  $E_{x_i}$ , можна набути значення математичного сподівання і дисперсії величини  $\bar{E}_x$ :

$$M[\bar{E}_x] = \frac{1}{2} E,$$

$$D[\bar{E}_x] = \frac{E^2}{12N}.$$

Розподіл величини  $\bar{E}_x$  (при не дуже малих  $N$ ) схожий на гаусовий розподіл, і тому можна припустити:

$$\left| \bar{E}_x - \frac{E}{2} \right| < \frac{\alpha E}{\sqrt{12N}},$$

їдè  $\alpha = 3$  ààí  $\alpha = 4$ ,

і тоді, цілком ймовірно, можна одержати такі оцінки для величини  $E$ :

$$\frac{2\bar{E}_x}{1 + \frac{\alpha}{\sqrt{3N}}} < E < \frac{2\bar{E}_x}{1 - \frac{\alpha}{\sqrt{3N}}}. \quad (6)$$

Межі помилки визначення модуля напруженості електричного поля, одержані в результаті оцінки  $N$  вимірювань його подовжньої складової, представлені на рис. 2, як функції від кількості вимірювань при фіксованому значенні  $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-3}$ .

Внутрішні криві графіка одержані на підставі співвідношення (5), а зовнішні – співвідношення (6). Відмітимо, що оцінка (5), що дає інтервал значень, який змінюється обернено пропорційно до кількості вимірювань  $N$ , не враховує помилку вимірювання величини  $E$ .

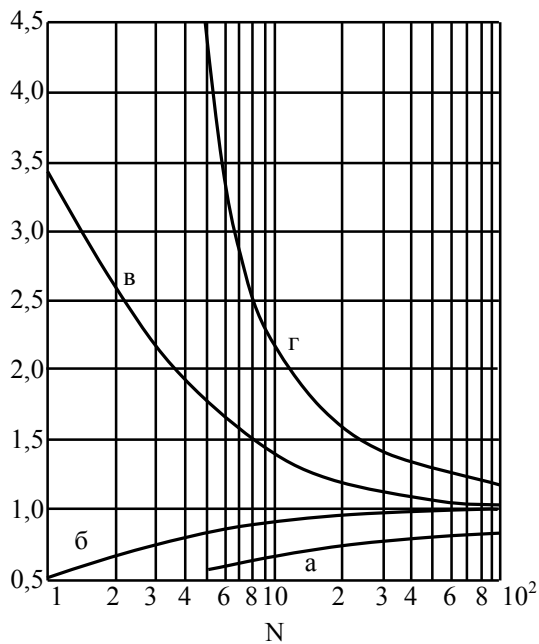


Рис. 2. Межі помилки визначення модуля напруженості електричного поля:  
а, г – межі помилки при  $N \sim 3 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^3$   
б, в – межі помилки при  $N > 3 \cdot 10^3$

Урахування такої помилки призводить до того, що для великих значень  $N$  інтервал значень визначається в основному стандартною помилкою вимірювання величини  $E$  і змінюється обернено пропорційно до квадратного кореня з кількості вимірювань.

## ВИСНОВКИ

У результаті проведених досліджень встановлено, що:

- для випадкової величини, функція розподілу яка описується показовою функцією, метод максимальної правдоподібності не може бути застосований;
- запропонований спосіб визначення невідомих параметрів розподілу дозволив провести оцінки математичного сподівання та дисперсії стохастичної величини;

## ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ НЕГАУССОВЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

В.Е. Кузьменко, М.А. Можаяев

*Рассмотрены результаты анализа негауссовых стохастических процессов. Изучена проблема применимости метода максимального правдоподобия для случайных процессов. Предложенный метод оценки числовых характеристик случайной величины.*

**Ключевые слова:** стохастические процессы, максимальное правдоподобие, негауссовое распределение, математическое ожидание, дисперсия.

## ESTIMATE THE PARAMETERS OF NON-GAUSSIAN STOCHASTIC PROCESSES

V.E. Kuzmenko, M.A. Mozaev

*The results of the analysis of non-Gaussian stochastic processes. Studied the problem of applicability of the method of maximum likelihood for random processes. The proposed method for estimating numerical characteristics of random variable.*

**Keywords:** stochastic processes, maximum likelihood, non-Gaussian distribution, expectation, variance.

– у результаті аналізу наведеного розподілу встановлено, помилка вимірювання невідомої величини змінюється обернено пропорційно до квадратного кореня з кількості вимірювань, а не обернено пропорційно до кількості вимірювань, що характерне для нормального розподілу.

## Список літератури

1. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1. – М.: Сов. радио, 1974. – 552 с.
2. Директор С., Рорер Р. Введение в теорию систем. – М.: Мир, 1974. – 644 с.
3. Можаяев А.А. Вопросы оптимальности временных шкал, использующихся для аппроксимации максимума очереди / А.А. Можаяев, Г.А. Кучук, А.А. Коваленко // Системы обработки информации Збірник наукових праць. – Харків: ХУ ПС. – 2009. – Вып.2(76). – С. 89-92.
4. Пространственно-временная обработка сигналов малой длительности в акустооптических анализаторах спектра / А.И. Стрелков, В.И. Барсов, А.А. Можаяев, А.П. Лытюза, В.В. Коротков // Модульвання та інформаційні технології. – К.: НАНУ, ІПМЕ, 2003. – Вып. 22. – С. 184-195.
5. Можаяев А.А. Оценка достоверности определения параметров телекоммуникационного трафика // Системы обработки информации. – Х.: ХУ ПС. – 2006. – Вып. 9(58). – С. 59-61.
6. Можаяев А.А. Оценка параметров нелинейной динамической модели гетерогенной сети. / А.А. Можаяев, С.М.Порошин, В.Е. Кузьменко, М.А.Можаяев // Системы обработки информации Збірник наукових праць.-Харків: ХУ ПС.-2011р.-Вып.5(95).- С.209-21
7. Можаяев А.А. Исследования поведения фазовой траектории телекоммуникационного трафика гетерогенной сети передачи данных / А.А. Можаяев, С.М. Порошин, В.Е. Кузьменко, М.А. Можаяев, // Системы управления, навигации та зв'язку, Збірник наукових праць Київ 2011, випуск 2(18) С. 255-259.
8. Можаяев О.О. Передача информации у гетерогенных компьютерных сетях : монография / О.О. Можаяев. – Харків : НТУ «ХПИ», 2012. – 220 с.

Надійшла до редколегії 18.07.2013

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. О.О. Серков, Національний технічний університет «ХПИ», Харків.