УДК 681

Ю.Д. Полисский

Научно-исследовательский институт автоматизации черной металлургии, Днепропетровск

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГРУППОВОГО СРАВНЕНИЯ ЧИСЕЛ В СИСТЕМЕ ОСТАТОЧНЫХ КЛАССОВ

Рассмотрены операции сравнения группы чисел в системе остаточных классов. Предложены алгоритмы, обеспечивающие эффективное решение задач группового сравнения.

Ключевые слова: *группа чисел, сравнение, система остаточных классов, алгоритмы.*

Введение

Постановка проблемы. Одной из основных функций любой системы управления является сравнение в каждый момент времени состояния управляемых объектов с заданным состоянием или друг с другом.

Операции сравнения включают обнаружение факта совпадения или несовпадения состояний сравниваемых объектов, оценку степени их несовпадения выделение объектов с доминирующим в некотором смысле состоянием и оценку степени доминирования и т.п.

Если состояния объектов оценивать числами, то указанные результаты могут быть получены при выполнении операций сравнения чисел.

Сравнение чисел подразделяется на попарное и групповое. При решении задач попарного сравнения выполняется сопоставление значений двух чисел и проверка наличия того или иного признака у результата При групповом сравнении анализируется группа чисел, а результат представляет собой наибольшее или наименьшее их значение, длину диапазона значений анализируемых чисел, признак положения чисел по отношению к граничным либо к некоторым фиксированным значениям чисел.

Развитие систем управления связано в настоящее время с внедрением принципов параллельной обработки информации, основанной на представлении данных в системе остаточных классов (СОК)[1].

Формулирование цели статьи. Достоинства и недостатки СОК подробно рассмотрены в [2]. К достоинствам относятся высокая эффективность вычислений, малая разрядность остатков, высокая точность и надежность, способность системы к самокоррекции. Недостатки обусловлены трудностями при реализации немодульных операций. К таким операциям относится сравнение чисел, с помощью которого могут быть выполнены все остальные немодульные операции [3]. В связи с этим целью статьи является рассмотрение алгоритмов ускоренного решения задач группового сравнения чисел, представленных в системе остаточных классов.

Изложение основного материала

Системой остаточных классов называется система счисления, в которой произвольное число N представляется в виде набора наименьших неотрицательных остатков по модулям $m_1, m_2, \ldots, m_n$, т.е.
$N = \left[N(\mathrm{mod}\, m_1), N(\mathrm{mod}\, m_2), \ldots, N(\mathrm{mod}\, m_n)\right]$ или

$$N = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

где $\alpha_i = N(\mathrm{mod}\, m_i)$, при этом, если все целые числа N принадлежат диапазону $[0, M)$, объем которого

$$M = m_1 m_2 \ldots m_n,$$

а модули m_i взаимно простые, то каждому набору $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ соответствует только одно число N из этого диапазона.

Пусть

$$N^1 = \left(\alpha^1{}_1, \alpha^1{}_2, \ldots, \alpha^1{}_i, \ldots, \alpha^1{}_n\right);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$N^j = \left(\alpha^j{}_1, \alpha^j{}_2, \ldots, \alpha^j{}_i, \ldots, \alpha^j{}_n\right);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$N^k = \left(\alpha^k{}_1, \alpha^k{}_2, \ldots, \alpha^k{}_i, \ldots, \alpha^k{}_n\right) \quad –$$

сравниваемые числа.

В соответствии с определением группового сравнения чисел при выполнении операций сравнения в СОК решаются следующие задачи:

- определение максимального $N_{max} = \max\left\{N^1, N^2, \ldots, N^j, \ldots, N^k\right\}$ и минимального $N_{min} = \min\left\{N^1, N^2, \ldots, N^j, \ldots, N^k\right\}$ чисел группы,
- определение длины L_Δ диапазона $\Delta = \left[N_{max}, N_{min}\right]$ группы чисел,
- определение положения чисел группы по отношению к некоторому фиксированному числу,
- определение чисел, лежащих внутри некоторого поддиапазона $\Delta_t \in \Delta$,
- определение числа, ближайшего к заданному числу,

- определение числа, ближайшего большего к заданному и ближайшего меньшего к заданному числу.

Алгоритмы решения перечисленных задач построены на основе впервые предложенного в [4] и подробно рассмотренного в [5] нового принципа сравнения чисел. Для каждого

$$N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in M-1,\ M = \prod_{i=1}^{n} m_i$$

составляются разности $\tilde{\alpha}_i = (\alpha_i - \alpha_n)(\mathrm{mod}\, m_i),\ i = \overline{1, n-1}$. При этом весь диапазон чисел M оказывается разбитым на $K = M/m_n$ поддиапазонов длины m_n, внутри каждого из которых значения приведенных остатков $\tilde{\alpha}_i$ одинаковы.

Работа алгоритма сравнения n - модульных чисел для одновременного определения наибольшего и наименьшего чисел группы состоит из $n-1$ итераций, каждая из которых включает получение приведенных остатков по m_i -му модулю и формальное деление приведенных остатков на m_i. Работа алгоритма сравнения группы чисел

$$N^1 = 15555,\ N^2 = 10999,\ N^3 = 10111,$$

$$N^4 = 18787,\ N^5 = 16777,\ N^6 = 12111,\ N^7 = 15643$$

в системе модулей $m_1 = 5, m_2 = 13, m_3 = 17, m_4 = 19$ иллюстрируется табл. 1. Результаты сравнения определяются на основе значений приведенных остатков после завершения $(n-1)$ -й итерации.

Справедливо следующее утверждение:

Если $N^1 > N^2$, то $\tilde{N}^1 = N^1 - \alpha^1{}_i \geq \tilde{N}^2 = N^2 - \alpha^2{}_i$ т.е. соотношение чисел не изменится на противоположное.

Док-во. Пусть $N^1 = t_1 m_i + \alpha^1{}_i$ и $N^2 = t_2 m_i + \alpha^2{}_i$. Если $t_1 > t_2$, то $\tilde{N}^1 > \tilde{N}^2$. Если же $t_1 = t_2$, то $\tilde{N}^1 = \tilde{N}^2$.

В результате завершения $(n-1)$ -й итерации получены значения чисел, которые согласно утверждению соответствуют числам сравниваемой группы. Максимальное значение $\tilde{N}_{max} = \tilde{N}^4 = 4$ определяет максимальное число группы $N_{max} = N^4 = 18787$.

Наименьшие значения $\tilde{N}_{наим} = 2$ получены для второго, третьего и шестого чисел. Для определения минимального сопоставим приведенные остатки этих чисел на предыдущей итерации. Для второго числа $\tilde{N}^2 = 8$, для третьего $\tilde{N}^3 = 5$, для шестого $\tilde{N}^6 = 11$. Минимальное значение $\tilde{N}^3 = 5$ определяет минимальное число группы $N_{min} = N^3 = 10111$. Если необходимо найти длину L_Δ диапазона $\Delta = [N_{max}, N_{min}]$ группы чисел, алгоритм дополняется n -й итерацией $L_\Delta = N_{max} - N_{min}$.

Таблица 1

Работа алгоритма сравнения

		МОДУЛИ			
ЧИСЛА		5	13	17	19
15555		0	7	0	13
10999		4	1	0	17
10111	Итера-	1	10	13	3
18787	ция	2	2	2	15
16777		2	7	15	0
12111		1	8	7	8
15643		3	4	3	6
15542		2	7	4	0
10982		2	10	0	0
10108		3	7	10	0
18772		2	0	4	0
16777		2	7	15	0
12103		3	0	16	0
15637		2	11	14	0
818	1	3	12	2	
578		3	6	0	
532		2	12	5	
988		3	0	2	
883		3	12	16	
637		2	0	8	
823		3	4	7	
816		1	10	0	
578		3	6	0	
527		2	7	0	
986		1	11	0	
867		2	9	0	
629		4	5	0	
816		1	10	0	
48	2	3	9		
34		4	8		
31		1	5		
58		3	6		
51		1	12		
37		2	11		
48		3	9		
39		4	0		
26		1	0		
26		1	0		
52		2	0		
39		4	0		
26		1	0		
39		4	0		
3	3	***3***			
2		***2***			
2		***2***			
4		***4***			
3		***3***			
2		***2***			
3		***3***			

Алгоритм определения положения чисел группы по отношению к некоторому фиксированному числу заключается в одновременном сравнении каждого из чисел группы с данным числом и получении результата в зависимости от соотношения $N > N_ф$, $N < N_ф$ или $N = N_ф$.

Для определения чисел, лежащих внутри некоторого поддиапазона $\Delta_t \in \Delta$, заданного фиксированными граничными значениями $N_{tф1}$ и $N_{tф2}$, выполняется одновременное сравнение каждого из чисел группы с $N_{tф1}$ и $N_{tф2}$, а также сравнение $N_{tф1}$ с $N_{tф2}$. Пусть $N_{tф1} > N_{tф2}$. Тогда решением задачи являются все числа группы $\left\{N^1, N^2, \ldots, N^j, \ldots, N^k\right\}$, удовлетворяющие условию $N_{tф1} \ge N^J \ge N_{tф2}$.

Алгоритм определения числа, ближайшего к заданному числу, включает две итерации. На первой выполняется попарное сравнение каждого числа группы с заданным числом для определения большего

$$N^j{}_{max} = \max\left\{N_з, N^J\right\}$$

и меньшего

$$N^j{}_{min} = \min\left\{N_3, N^J\right\}$$

в каждой паре и определяются значения $\delta^j = N^j{}_{max} - N^j{}_{min}, j = 1, 2, \ldots, k$. На второй итерации выполняется групповое сравнение чисел δ^j для получения $\delta^j{}_{min} = \min\left\{\delta^1, \delta^2, \ldots, \delta^j, \ldots, \delta^k\right\}$.

Определение числа, ближайшего большего к заданному и ближайшего меньшего к заданному числу осуществляется также за две итерации. Первая итерация аналогична первой итерации предыдущего алгоритма. На второй итерации выполняется групповое сравнение чисел $\delta^j{}_б$, больших заданного, для получения $\delta^j{}_{бmin} = \min\left\{\delta^1{}_б, \delta^2{}_б, \ldots, \delta^j{}_б, \ldots, \delta^k{}_б\right\}$ и групповое сравнение чисел $\delta^j{}_м$, меньших заданного, для получения $\delta^j{}_{мmin} = \min\left\{\delta^1{}_м, \delta^2{}_м, \ldots, \delta^j{}_м, \ldots, \delta^k{}_м\right\}$.

Выводы

1. Рассмотрены алгоритмы решения задач группового сравнения чисел, представленных в системе остаточных классов.

2. Алгоритмы базируются на «внутреннем» по отношению к системе счисления способе – определении приведенных остатков без предварительного преобразования непозиционного представления чисел в позиционное.

3. Алгоритмы обеспечивают получение комплекса результатов группового сравнения чисел.

4. На основе предложенных алгоритмов достигается повышение быстродействия выполнения операций сравнения.

5. Представляется целесообразным применить предложенные алгоритмы в качестве направления исследований для получения эффективных решений задач сравнения чисел в системе остаточных классов.

6. Полученные результаты могут быть использованы для разработки патентноспособных и несложных при схемной реализации вычислительных структур.

Список литературы

1. Акушский И.Я. Машинная арифметика в остаточных классах. / И.Я. Акушский, Д.И. Юдицкий. – М.: Сов. радио. - 1968. - 440 с.

2. Червяков Н.И. Методы и принципы построения модулярных нейрокомпьютеров. / Н.И. Червяков // МИЭТ. - Труды МНТК «50 лет модулярной арифметики», Москва, Зеленоград, 23-25 ноября 2005. – С. 232 - 242.

3. Полисский Ю.Д. Формирование позиционных характеристик при табличной реализации алгоритмов системы остаточных классов / Ю.Д. Полисский // Моделирование-2008. - Т. 2. – К., 2008. – С. 489-495.

4. Факторович М.Г. Устройство для сравнения чисел, выраженных в системе остаточных классов./ М.Г. Факторович, Ю.Д. Полисский // Авт. свид. СССР №608155 М.Кл^2 G 06 F 7/04, - 1978.

5. Полисский Ю.Д. Некоторые вопросы выполнения сложных операций в системе остаточных классов / Ю.Д. Полисский // Электронное моделирование - 2008. - Т. 30. – № 2. – С. 115 - 120.

Поступила в редколлегию 10.07.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.А. Краснобаев, Полтавский национальный технический университет имени Ю. Кондратюка, Полтава.

АЛГОРИТМИ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ ГРУПОВОГО ПОРІВНЯННЯ ЧИСЕЛ, ПРЕДСТАВЛЕНИХ В СИСТЕМІ ЗАЛИШКОВИХ КЛАСІВ

Ю.Д. Поліський

Розглянуті операції порівняння групи чисел в системі залишкових класів. Запропоновані алгоритми, що забезпечують ефективне вирішення задач групового порівняння.

Ключові слова: *група чисел, порівняння, система залишкових класів, алгоритми*

THE ALGORITHMS OF PROBLEM SOLVING FOR GROUP COMPARISON OF NUMBERS PRESENTED IN THE SYSTEM OF RESIDUAL CLASSES

Yu.D. Polissky

The operations of comparison for group of numbers are considered in the system of residual classes. Algorithms are offered providing the effective solving the problem of group comparison.

Keywords: *agroup of numbers, the comparison, the system of residual classes, algorithms.*