УДК 519.87:316.458.6

Л.Г. Раскин

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

МЕТОД РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БОЕВЫХ СРЕДСТВ ОПЕРИРУЮЩИХ ГРУППИРОВОК В УСЛОВИЯХ НЕДОСТАТОЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ПРОТИВНИКЕ

В статье рассмотрен метод решения оптимизационной задачи распределения боевых средств оперирующих группировок в условиях недостаточной информации о противнике.

Ключевые слова: *оптимальное управление, матрицы управления.*

Введение

Постановка задачи. Задачи оптимального управления разнородных боевых средств в боевых действиях группировок вооружённых сил описываются следующими соотношениями:

$$J(u)=\int_{t_0}^{T} f^0\left(x(t), y(t), t\right)dt+\Phi\left(x(T)\right)\to \min; \quad (1)$$

$$\frac{dx(t)}{dt}=f\left(x(t), y(t), t\right),$$
$$t_0\le t\le T,\quad x\left(t_0\right)=x^0; \quad (2)$$

$$u=u(t)\in U\le l_2^r\left[t_0, T\right], \quad (3)$$

где $x=\left[x_1, x_2, \cdots, x_n\right]^{/}$, $u=\left[u_1, u_2, \cdots, u_r\right]^{/}$,

а функции $f^0\left(x(t), y(t), t\right)$,

$$f\left(x(t), y(t), t\right)=\begin{bmatrix} f_1\left(x(t), y(t), t\right), f_2\left(x(t), y(t), t\right), \cdots, \\ f_n\left(x(t), y(t), t\right) \end{bmatrix},$$

$\Phi(x)$ от переменных $(x, u, t)\in R^n * R^r * \left[t^0, T\right]$ принадлежат банахову пространство измеряемых вектор-функций с конечной нормой

$$\|u\|_2=\left(\int_0^T |u(t)|^2\,dt\right)^{1/2},\quad |u(t)|=\sum_{i=1}^{r}\left|u_i(t)\right|^2,$$

моменты времени t^0, T заданы.

В условиях недостаточной информации о состоянии противодействующих группировок необходимо найти управление $u\in U$, являющееся решением задачи (1 – 3). В решаемой задаче рассматриваются функционалы

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \bar{y}_j(T), \sum_{i=1}^{m} z_i \bar{x}_i(T),\quad \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{j=1}^{n} w_j \bar{y}_j(t)\,dt,$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{i=1}^{m} z_i \bar{x}_i(T)\,dt,\qquad \frac{\sum_{i=1}^{m} z_i \bar{x}_i(T)}{\sum_{j=1}^{n} w_j \bar{y}_j(T)},$$

$$\sum_{i=1}^{m} z_i \bar{x}_i(T)-\sum_{j=1}^{n} w_j \bar{y}_j(T),$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T\left[\sum_{i=1}^{m} z_i \bar{x}_i(t)-\sum_{j=1}^{n} w_j \bar{y}_j(t)\right]dt$$

как функционалы от управления α, непрерывные и дифференцируемые по α. Если в функционалах подынтегральная функция, терминальная составляющая и правые части системы дифференциальных уравнений, описывающих рассматриваемые задачи, непрерывны по совокупности своих аргументов вместе со своими частными производными по переменным $\bar{x}, \bar{y}, \alpha$, и их приращения ограничены, то функционал $J(\alpha)$ непрерывен и дифференцируем по $\alpha=\alpha(t)$.

Как следует из этого утверждения, градиент целевого функционала возможно представить в виде:

$$\nabla J(\alpha)=-\nabla_{\alpha} H\left(\bar{x}, \bar{y}, \varphi_0, \varphi, \eta, \alpha\right)=\left\|-\frac{\partial H}{\partial \alpha_{ji}}\right\|_{n, m}, \quad (4)$$

где $H\left(\bar{x}, \bar{y}, \varphi_0, \varphi, \eta, \alpha\right)$ – функция Гамильтона-Понтрягина соответствующей задачи оптимального управления.

Нетрудно заметить, что во всех функциях Гамильтона-Понтрягина соответствующих задач оптимального управления распределением разнородных ресурсов в условиях наличия информации об управлении противника и состоянии противодействующих сторон, или отсутствия информации о состоянии хотя бы одной из сторон, выражение, зависящее от управления α, одинаково и имеет вид:

$$-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} P_A\left[\bar{y}_j(t)\right]\alpha_{ji}(t)a_{ji}\bar{x}_i(t)\xi_i(t)\eta_j(t). \quad (5)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_{ji}} = -P_A\left[\bar{y}_j(t)\right]a_{ji}x_i(t)\xi_i(t)\eta_j(t), \quad j=\overline{1,n}, \quad i=\overline{1,m}, \quad (6)$$

и

$$\nabla J(\alpha) = \left\| P_A\left[\bar{y}_j(t)\right]a_{ji}\bar{x}_i(t)\xi_i(t)\eta_j(t)\right\|_{n,m}. \quad (7)$$

Отсюда следует, что условие Липшица для градиента $\nabla J(\alpha)$ выполняется тривиально с константой $L=0$.

Анализ литературы. При выборе метода решения рассматриваемой задачи будем исходить из следующих соображений [1 – 6].

В задачах оптимального управления распределением разнородных ресурсов оперирующая сторона A стремится выбрать свои управляющие параметры

$$\alpha(t) = \left\|\alpha_{ji}(t)\right\|_{n,m}$$

таким образом, чтобы максимизировать (минимизировать) функционал $J(\alpha)$, где $J(\alpha)$ – любой из показателей эффективности.

Математические формулировки рассмотренных задач в условиях определённости или неполной информации отличаются друг от друга лишь видом критерия оптимизации, поэтому в общем виде они могут быть представлены следующим образом:

$$J(\alpha) \to \min_{\{\alpha\}}\left(\max_{\{\alpha\}}\right). \quad (8)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}_i}{dt} = -P_B\left[\bar{x}_i(t)\right]\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}(t)b_{ij}\bar{y}_j(t)\psi_j(t)+u_i(t), \\ i=\overline{1,m}; \\ \dfrac{d\bar{y}_j}{dt} = -P_A\left[\bar{y}_j(t)\right]\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ji}(t)a_{ji}\bar{x}_i(t)\xi_i(t)+v_j(t), \\ j=\overline{1,n}; \\ \bar{x}_i(0)=x_i^0, \quad i=\overline{1,m}; \quad \bar{y}_j(0)=y_j^0, \\ j=\overline{1,n}. \end{cases} \quad (9)$$

$$\xi_i(t) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\text{siqn}\left[\lambda_i\int_0^t \bar{x}_i(t)\,dt - N_i^A\right], \quad i=\overline{1,m}; \quad (10)$$

$$\psi_j(t) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\text{siqn}\left[\mu_j\int_0^t \bar{y}_i(t)\,dt - N_j^B\right], \quad j=\overline{1,n}. \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\beta_{ij}(t)=1; \; i=\overline{1,n}; \; \beta_{ij}(t)\ge 0; \; i=\overline{1,m}, \, j=\overline{1,n};$$

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}(t)=1; \; i=\overline{1,m}; \; \alpha_{ji}(t)\ge 0; \; j=\overline{1,n}; \; i=\overline{1,m};$$

$$\begin{cases} 0\le u_i(t)\le c_i; \; i=\overline{1,m}; \\ \int_0^T u_i(t)dt \le A_i; \; i=\overline{1,m}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0\le v_j(t)\le d_j; \; j=\overline{1,n}; \\ \int_0^T v_j(t)dt \le B_j; \; j=\overline{1,n}, \end{cases}$$

где $\beta_{ij}(t), \alpha_{ji}(t), b_{ij}, a_{ji}, x_i^0, y_j^0, \lambda_i, \mu_j, N_i^A, N_j^B, T, v_j(t), u_i(t)$ – известные параметры и функции.

Целью статьи является разработка метода решения оптимизационной задачи распределения боевых средств оперирующих группировок в условиях недостаточной информации о противнике

Основной материал

Рассмотрим возможность численного решения систем дифференциальных уравнений вида $Z' = AZ$ и $Z(0)=Z_0$, описывающих конфликтную ситуацию. В общем случае каждая из этих систем имеет n постоянных времени, определяемых порядком системы. В случае, если любые постоянные времени сильно отличаются по величине или тогда, когда одна из них достаточно мала по сравнению с интервалом времени, для которого отыскивается решение, то возможно возникновение ситуации, при которой задача становится «жёсткой», т.е. такой, что расчёт по формуле Рунге-Кутта приводит к численной неустойчивости. В соответствии с [3] матричные экспоненты e^{Ah}, где h – шаг интегрирования, A – матрицы коэффициентов аппроксимируются в виде

$$F = E + hA + \frac{(hA)^2}{2} + \frac{(hA)^3}{6} + \frac{(hA)^4}{24}$$

из первых пяти членов ряда

$$e^{Ah} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(hA)^r}{r!}.$$

В [4] показано, что алгоритм

$$y_n = F^n y_0 = \left(\sum_{k=0}^{S}\frac{(hA)^r}{r!}\right)^n y_0$$

устойчив, если $\frac{\|A\|h}{6} \langle 1$, где $\|A\|$ – норма матрицы. Это условие выполняется выбором величины шага интегрирования.

Решение задачи сводится к последовательному определению вспомогательного приближения, определению шага поиска и определению момента окончания вычислений.

Этап определения вспомогательного приближения.

Градиент функционала $J(\alpha)$ имеет следующий вид:

$$\Delta J(\alpha) = = \left\| P_A \left[\bar{y}_j(t) \right] a_{ji}\, x_i(t)\, \xi_i(t)\, \eta_j(t) \right\|_{n,\,m}. \quad (12)$$

Определение вспомогательного приближения. Вычислим

$$\min_{\alpha\in D} \left\langle \nabla J\left(\alpha^k\right),\ \ \alpha \right\rangle = = \min_{\alpha\in D} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\begin{matrix} P_A\left[\bar{y}_j(t)\right] a_{ji}\, \bar{x}_i^k(t)\, \xi_i(t) \times \\ \eta_j^k \times (t)\, \alpha_{ji}(t) \end{matrix} \right) \right] dt, \quad (13)$$

где α^k – k - ое приближение решения задачи.

Интегралы в (12) можно вычислить приближённо по формуле прямоугольников

$$I_{ji}^k = \int_0^T \left(\begin{matrix} P_A\left[\bar{y}_j(t)\right] a_{ji}\, \bar{x}_i^k(t) \times \\ \times \xi_i(t)\, \eta_j^k(t)\, \alpha_{ji}(t)\, dt \end{matrix} \right) \approx$$

$$\approx \frac{a_{ji} T}{N} \sum_{s=0}^{N-1} \left(\begin{matrix} P_A\left[\bar{y}_j^k\left(t_s\right)\right] \alpha_{ji}\left(t_s\right) \bar{x}_i^k \times \\ \times \left(t_s\right) \xi_i\left(t_s\right) \eta_j^k\left(t_s\right) \end{matrix} \right),$$

$$i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n},$$

где N – количество промежутков разбиения отрезка $[0; T]$,

$$t_s = \frac{sT}{N}, \quad s = \overline{0, N-1},$$

а значения функций $\bar{x}_i^k(t_s)$, $\bar{y}_j^k(t_s)\, \eta_j^k(t_s)$ при $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $s = \overline{0, N-1}$ находятся в результате численного решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (13) и задачи Коши для сопряжённой системы (14) по методу Рунге – Кутта 4-го порядка при $\alpha = \alpha^k(t)$:

$$\frac{d\bar{x}_i^k}{dt} = -P_B\left[\bar{x}_i^k(t)\right] \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(t)\, b_{ij}\, \bar{y}_j^k(t)\, \psi_j(t) + u_i(t),$$

$$i = \overline{1, m};$$

$$\frac{d\bar{y}_j^k}{dt} = -P_A\left[\bar{y}_j^k(t)\right] \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji}^k(t)\, a_{ji}\, \bar{x}_i^k(t)\, \xi_i(t) + v_i(t),$$

$$j = \overline{1, n};$$

$$\bar{x}_i^k(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, m}; \quad \bar{y}_j^k(0) = y_j^0, \quad j = \overline{1, n}.$$

$$\frac{d\varphi_i^k}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{dP_B\left[\bar{x}_i^k(t)\right]}{d\bar{x}_i} \beta_{ij}(t) b_{ij}\, \bar{y}_j^k(t)\, \psi_j(t)\, \varphi_i^k(t) + \right.$$

$$\left. + P_A\left[\bar{y}_j^k(t)\right] \alpha_{ji}^k(t) a_{ji} \xi_i(t)\, \eta_j^k(t) \right\}, \quad i = \overline{1, m};$$

$$\frac{d\eta_j^k}{dt} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} P_B\left[\bar{x}_i^k(t)\right] \beta_{ij}(t) b_{ij}\, \psi_j(t)\, \varphi_i^k(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{dP_A\left[\bar{y}_j^k(t)\right]}{d\bar{y}_j} \alpha_{ji}^k(t) a_{ji}\, \bar{x}_i(t)\, \xi_i(t)\, \eta_j^k(t) \right\}, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\varphi_i^k(T) = \varphi_i^T, \quad i = \overline{1, m};$$

$$\eta_j^k(T) = \eta_j^T, \quad j = \overline{1, n}$$

Так как для сопряжённой системы известны конечные условия, то её интегрирование проводится в обратном порядке от $t = T$ к $t = 0$.

Таким образом, задача (11) сводится к следующей задаче:

$$\min_{\alpha\in D} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} I_{ji}^k =$$

$$= \frac{T}{N} \min_{\alpha\in D} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=0}^{N-1} P_A\left[\bar{y}_j^k\left(t_s\right)\right] a_{ji}\, \bar{x}_i^k\left(t_s\right);$$

$$\xi_i\left(t_s\right) \eta_j^k\left(t_s\right) \alpha_{ji}\left(t_s\right) =$$

$$= \frac{T}{N} \min_{\alpha\in D} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i^k\left(t_s\right) \xi_i\left(t_s\right) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{n} P_A\left[\bar{y}_j^k\left(t_s\right)\right] a_{ji}\, \eta_j^k\left(t_s\right) \alpha_{ji}\left(t_s\right),$$

или к следующим задачам линейного программирования:

$$\sum_{j=1}^{n} P_A\left[\bar{y}_j^k\left(t_s\right)\right] a_{ji}\, \eta_j^k\left(t_s\right)\ \alpha_{ji}\left(t_s\right) \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}\left(t_s\right) = 1, \quad \alpha_{ji}\left(t_s\right) \ge 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad (14)$$

$$i = \overline{1, m}; \quad s = \overline{0, N-1}; \quad t_0 = 0,$$

допустимые множества которых представляют собой n-мерные неотрицательные симплексы.

Следовательно, решение этих задач имеет вид:

$$\overline{\alpha}_{ji}^{k}\left(t_s\right)=\begin{cases}1, & j=j_{is}^{k};\\ 0, & j\neq j_{is}^{k},\end{cases} \qquad (15)$$

где

$$j_{is}^{k}=\arg\min_{1\le j\le n}\left\{P_A\left[\overline{y}_j^{k}\left(t_s\right)\right]a_{ji}\eta_j^{k}\left(t_s\right)\right\}. \qquad (16)$$

Этап определения шага поиска.

Приближение α^{k+1} будем находить из соотношения:

$$\alpha^{k+1}(t)=\alpha^{k}(t)+\rho_k\left(\overline{\alpha}^{k}(t)-\alpha^{k}(t)\right),$$
$$0\le\rho_k\le 1, \qquad (17)$$

где

$$\overline{\alpha}^{k}(t)=\left\|\overline{\alpha}_{ji}^{k}(t)\right\|_{n,m};$$
$$\overline{\alpha}_{ji}^{k}(t)=\left\{\overline{\alpha}_{ji}^{k}\left(t_s\right),\ t\in\left[t_s,t_{s+1}\right];\ s=\overline{0,\ N-1}\right\};$$
$$t_N=T.$$

Определим длину шага ρ_k из соотношения

$$\varphi\left(\rho_k\right)=\min_{0\le\rho\le1}\varphi(\rho)=$$
$$=\min_{0\le\rho\le1}J\left[\alpha^{k}(t)+\rho\left(\overline{\alpha}^{k}(t)-\alpha^{k}(t)\right)\right]. \qquad (18)$$

Так как точное определение ρ_k из этого условия затруднительно, то применяется метод дробления шага, заключающийся в следующем.

Полагаем $\rho=1$ и проверяем условие монотонности убывания функционала:

$$\varphi(1)<\varphi(0).$$

Затем при необходимости следует дробить шаг ρ до тех пор, пока не выполнится условие монотонности, т.е. $\rho:=\Theta\rho$ и проверка выполнения неравенства

$$\varphi(\Theta\rho)<\varphi(0),$$

где $\Theta\in[0.5;\,0.8]$ – константа дробления.

Этап определения окончания вычислений. Последовательность

$$\left\{J\left(\alpha^{k}(t)\right)\right\}$$

сходится к своей нижней грани на компактном множестве D, поэтому критерием окончания вычислений является выполнение неравенства:

$$\Delta_k=\left|J\left(\alpha^{k+1}(t)\right)-J\left(\alpha^{k}(t)\right)\right|\langle\,\varepsilon;\quad\varepsilon\,\rangle\,0. \qquad (19)$$

Выводы

Матрица управления в разработанном методе оптимизации является функцией времени, и при определении вспомогательного приближения решения используется результат численного решения задач Коши для исходной и сопряжённой системы с конечными условиями, находимыми из условий трансверсальности, а при вычислении очередного значения целевого функционала используется процедура дробления шага.

Список литературы

1. *Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс / Б. Банди. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.*
2. *Беллман Р. Прикладные задачи динамического программирования / Р. Беллман, Х. Дрейфус. – М.: Наука, 1965. – 458 с.*
3. *Брайсон А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо-Ю-ши. – М.: Мир, 1972. – 544 с.*
4. *Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1980. – 518 с.*
5. *Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1981. – 400 с.*
6. *Раскин Л.Г. Континуальное программирование. Монография / Л.Г. Раскин, И.О. Кириченко. – Х.: Военн. инст. внутр. войск МВД Укр., 2005. – 176 с.*

Поступила в редколлегию 30.08.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Б.Т. Кононов, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

МЕТОД ВИРЕШЕННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ РОЗПОДІЛЕННЯ БОЙОВИХ ЗАСОБІВ ОПЕРУЮЧИХ УГРУПУВАНЬ В УМОВАХ НЕДОСТАТНЬОЇ ІНФОРМАЦІЇ ПРО СУПРОТИВНИКА

Л.Г. Раскін

В статті розглядається метод вирішення оптимізаційної задачі розподілення бойових засобів оперуючих угрупувань в умовах недостатньої інформації про супротивника.

Ключові слова: *оптимальне управління, матриці управління.*

METHOD OF DECISION OF OPTIMIZATION TASK OF DISTRIBUTING BATTLE FACILITIES OF OPERATING GROUPMENTS IN TERMS TO INSUFFICIENT INFORMATION ABOUT OPPONENT

L.G. Raskin

In the article the method of decision of optimization task of distributing of battle facilities of operating groupments is considered in the conditions of insufficient information about an opponent.

Keywords: *optimum management, management matrices.*