УДК519.22:311.214

В.Ю. Дубницкий

Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ (г. Киев), Харьков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕРВАЛА НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ ИНДЕКСНОГО МЕТОДА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Поставлена задача определения интервала неопределённости при вычислении значений основных сводных индексов, используемых в экономической статистике: индексов товарооборота, объёма реализации, индексов цен в форме Паше и в форме Ласпейроса. Задача решена в предположении, что данные, необходимые для вычислений, получены по результатам выборочных наблюдений. Определены выражения, необходимые для оценки дисперсии результатов вычислений, абсолютной и относительной погрешности процесса получения численных значений индексов. Получены выражения для определения предельной относительной ошибки при вычислении этих индексов. Приведен численный пример решения поставленной задачи.

Ключевые слова: *индексный метод, индекс товарооборота, индекс объёма реализации, индекс цен, индекс Пааше, индекс Ласпейпроса, интервал неопределённости, предельная абсолютная погрешность, предельная относительная погрешность.*

Введение

В экономической статистике индексный метод служит одним из основных методов исследования динамики экономических систем. Теория этого метода и примеры его применения рассмотрены, например, в работах [1 – 3]. В работе [1] дано такое определение: «Индексы – это относительные системные показатели, которые характеризуют изменения экономических, социальных и других явлений во времени, в пространстве или в сопоставлении с любой базой сравнении (стандартными, плановыми или средними величинами, показателями прошлых периодов, лучших предприятий, организаций, учреждений и т.д.)». В силу сложившейся традиции в индексном методе форма записи формул, несколько отличающаяся от принятой в математике. Примем в качестве исходных данных не только символику, но и названия индексов и способы их определения. В нашем случае структура формул и особенности вычислений будет важнее конкретной предметной области.

Рассмотрим пример (табл. 1), основанный на данных, приведенных в работе [2].

Для последующих расчетов выражения для определения численных значений индексов даны в виде, приведенном в работе [1].

Таблица 1

Пример расчёта индексов

Вид продукции	Базисный период		Отчетный период		Расчётные графы			
	Цена единицы, грн, p_0	Продано единиц, q_0	Цена единицы, грн, p_1	Продано единиц, q_1	p_0q_0	p_0q_1	p_1q_1	p_1q_0
Пр.1	12	18	12	15	216	180	180	216
Пр.2	11	22	10	27	242	297	270	220
Пр.3	9	20	7	24	180	216	168	140
Итого	-	-	-	-	638	693	618	576

Сводный индекс товарооборота принято определять по формуле:

$$I_{pq} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{618}{638} = 0,969 . \qquad (1)$$

Сводный индекс физического объёма реализации принято определять по формуле:

$$I_p = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{693}{638} = 1,086 . \qquad (2)$$

Сводный индекс цен по методу Пааше принято определять по формуле:

$$\Pi_q = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = 0,892. \qquad (3)$$

Сводный индекс цен по методу Ласпейреса принято определять по формуле:

$$L_p = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{576}{638} = 0,903. \qquad (4)$$

Ещё раз отметим, что содержательный смысл полученного результата в рамках данной работы не изучается. Дальнейшее внимание сосредоточим только на вычислительных аспектах индексного метода. Исходные данные, используемые в индексном методе, могут быть получены двумя способами: по результатам обследования генеральной совокупности и по результатам выборочных наблюдений. В первом случае точность метода обусловлена только принятой точностью вычислений. Во втором случае в расчёт вносится неопределённость, обусловленная ошибками выборочного наблюдения.

Постановка задачи: определение интервала неопределённости (предельной абсолютной и относительной погрешности) появляющегося при вычислении значений индексов вида (1…4) и обусловленного применением выборочных методов при сборе исходных данных, необходимых для проведения соответствующих расчётов.

Анализ литературы. Насколько известно автору данного сообщения, одной из первых работ, в которых рассмотрена предлагаемая задача, была работа [4]. Её автор рассматривал три взаимосвязанные проблемы: достоверность в связи с построением экономических показателей; методы ее оценки; чувствительность и устойчивость показателей. Для оценки погрешности определения экономических показателей автор работы [4] использует методы теории погрешности вычислений и методы математической статистики. В частности, именно в работе [4] сформулирована рассматриваемая в настоящем сообщении задача и намечен способ её решения. В работе [5] методами имитационного моделирования было изучено влияние случайных погрешностей на изменение индексов, характеризующих динамику экономических показателей. Следует отметить, что метод решения поставленной задачи, описанный в работе [4], оказался настолько забытым, что в списке литературы, приведенном в диссертационной работе [5], он лишь вскользь упомянут, а в близкой по направленности работе [6] он даже не упомянут. Насколько известно автору настоящей работы, выражения, в явном виде позволяющие решить поставленную задачу, в литературе отсутствуют.

Полученные результаты

Перепишем представленные в выражениях (1…4) индексы в привычной нотации.

Сводный индекс товарооборота представим в виде:

$$I_{pq} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = \sum_{i=1}^{n} p_{1i} q_{1i} \Big/ \sum_{i=1}^{n} p_{0i} q_{0i}\ ,\ i=1,2,\ldots n. \quad (5)$$

В этом и последующих выражениях индекс i=1,2,…n и соответствует строке в табл. 1, обозначающей вид продукции.

Сводный индекс физического объёма реализации представим в виде:

$$I_p = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} = \sum_{i=1}^{n} p_{0i} q_{1i} \Big/ \sum_{i=1}^{n} p_{0i} q_{0i}\ ,\ i=1,2,\ldots n. \quad (6)$$

Сводный индекс цен (по методу Пааше) представим в виде:

$$\Pi_q = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \sum_{i=1}^{n} p_{1i} q_{1i} \Big/ \sum_{i=1}^{n} p_{0i} q_{1i}\ ,\ i=1,2,\ldots n. \quad (7)$$

Сводный индекс цен (по методу Ласпейреса) представим в виде:

$$L_p = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} = \sum_{i=1}^{n} p_{1i} q_{0i} \Big/ \sum_{i=1}^{n} p_{0i} q_{0i}\ ,\ i=1,2,\ldots n. \quad (8)$$

Для удобства дальнейшего изложения введём обозначения, показанные в табл. 2.

Таблица 2

Условные обозначения сумм

Символ суммы	A	B	C	W
Расчётная формула	$\sum_{i=1}^{n} p_{0i} q_{0i}$	$\sum_{i=1}^{n} p_{1i} q_{1i}$	$\sum_{i=1}^{n} p_{0i} q_{1i}$	$\sum_{i=1}^{n} p_{1i} q_{0i}$

Принимая во внимание эти обозначения, представим выражения (5…8) в виде функций многих переменных. Это представление приведено в табл. 3.

Таблица 3

Представление индексов
в виде функций многих переменных

Вид индекса	Сокращённая запись	Количество переменных
Сводный индекс товарооборота	$I_{pq} = \varphi(B, A)$	4n
Сводный индекс физического объёма реализации	$I_q = \varphi(C, A)$	3n
Сводный индекс цен (по методу Пааше)	$\Pi_p = \varphi(B, E)$	3n
Сводный индекс цен (по методу Ласпейреса)	$L_p = \varphi(W, A)$	3n

Так, как по сделанному предположению каждая из входящих в индексы (5…8) переменная есть случайная величина, числовые характеристики которой определяют по результатам выборочных наблюдений, то окончательному результату будет присуща некоторая неопределённость, которая должна быть учтена при анализе полученных результатов.

Для решения поставленной задачи используем концепцию неопределённости измерений [7 – 9]. В соответствии с ней неопределённость делят на две группы. Неопределённость типа А, оцениваемая по результатам статистического анализа повторных наблюдений и неопределённость типа В, оцениваемая нестатистическими методами. Для определения неопределённости типа А используем описанный в

[10] метод линеаризации. Пусть нам известна с точностью до постоянных коэффициентов функция $u = f\left(x_1, x_2, \ldots x_k\right)$, где $x_i, i = 1, 2, \ldots k$ – случайные величины, имеющие, по крайней мере, конечные вторые начальные и центральные моменты.

Тогда среднее значение такой функции:

$$\bar{u} = f\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_k\right), \tag{9}$$

дисперсию результатов определения значений функции $u = f\left(x_1, x_2, \ldots x_k\right)$ определим по формуле:

$$D[u] \approx \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\bar{x}}^2 D[x_i] + 2\sum_{i<j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{\bar{x}}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)_{\bar{x}} r_{ij}\sigma(x_i)\sigma(x_j). \tag{10}$$

Если аргументы функции u попарно независимы, то

$$D[u] \approx \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\bar{x}}^2 D[x_i]. \tag{11}$$

Для определения неопределённости типа В используем следующий приём. Пусть Δx_i – расширенная неопределённость (ширина доверительного интервала) каждой переменной x_i. Придадим этой величине смысл предельной абсолютной ошибки определения величины x_i. Тогда в соответствии с работой [11] абсолютную ошибку определяют по формуле:

$$\Delta u \le \sum_{i=1}^{k}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\left|\Delta x_i\right|, \tag{12}$$

относительную ошибку определяют по формуле:

$$\delta_u = \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial}{\partial x_i}\left|\ln u\right|\Delta x_i. \tag{13}$$

Неотъемлемая часть выражений (10…12) – это выражения вида $\frac{\partial f}{dx_i}$ для каждого из индексов вида [5…8]. Запишем их, используя обозначения, введенные в табл. 2,3.

Для сводного индекса товарооборота $I_{pq} = \varphi(B, A)$ получим:

$$\frac{\partial}{\partial p_{1i}} I_{pq} = \frac{q_{1i}}{A}; \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_{1i}} I_{pq} = \frac{p_{1i}}{A}; \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_{0i}} I_{pq} = -q_{0i}\frac{B}{A^2}; \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_{0i}} I_{pq} = -p_{0i}\frac{B}{A^2}, \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{17}$$

Для сводного индекса физического объёма реализации $I_q = \varphi(C, A)$ получим:

$$\frac{\partial}{\partial p_{0i}} I_q = \frac{q_{1i}}{A} - \frac{q_{0i}}{A^2}, \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_{0i}} I_q = -\frac{p_{oi}}{A^2}, \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{19}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_{1i}} I_q = \frac{p_{0i}}{A}, \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{20}$$

Для сводного индекса цен (по методу Пааше) $\Pi_p = \varphi(B, E)$ получим:

$$\frac{\partial}{\partial p_{1i}} \Pi_p = \frac{q_{1i}}{E}, \; i = 1, 2, \ldots n. \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_{0i}} \Pi_p = -\frac{q_{1i}B}{E^2}, \; i = 1, 2, \ldots n. \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \Pi_p = \frac{p_{1i}}{E} - \frac{p_{0i}B}{E^2}. \; i = 1, 2, \ldots n. \tag{23}$$

Для сводного индекса цен (по методу Ласпейроса) $L_p = \varphi(W, A)$ получим:

$$\frac{\partial L}{\partial p_{1i}} = \frac{q_{0i}}{A}, \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{24}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{0i}} = \frac{p_{1i}}{A} - \frac{p_{0i}W}{A^2}, \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{25}$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_{0i}} = -\frac{q_{0i}}{A^2}, \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{26}$$

Предельную абсолютную ошибку определения сводного индекса товарооборота $I_{pq} = \varphi(B, A)$ определим, принимая во внимание условия (12, 14…17) по выражению:

$$\begin{aligned}\Delta I_{pq} \le &\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{q_{1i}}{A}\right|\left|\Delta p_{1i}\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{p_{1i}}{A}\right|\left|\Delta q_{1i}\right| + \\ &+\sum_{i=1}^{n}\left|-q_{0i}\frac{B}{A^2}\right|\left|\Delta p_{0i}\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|-p_{0i}\frac{B}{A^2}\right|\left|\Delta q_{0i}\right|.\end{aligned} \tag{28}$$

Для сводного индекса физического объёма реализации $I_q = \varphi(C, A)$ предельную абсолютную ошибку определим, принимая во внимание условия (12, 18…20) по выражению:

$$\Delta I_q \le \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{q_{1i}}{A} - \frac{q_{0i}}{A^2}\right|\left|\Delta p_{0i}\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|-\frac{p_{oi}}{A^2}\right|\left|\Delta q_{0i}\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{p_{0i}}{A}\right|\left|\Delta q_{1i}\right|. \tag{29}$$

Для сводного индекса цен (по методу Пааше) $\Pi_p = \varphi(B, E)$ предельную абсолютную ошибку определим, принимая во внимание условия (12, 21…23) по выражению:

$$\begin{aligned}\Delta \Pi_p \le &\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{q_{1i}}{E}\right|\left|\Delta p_{1i}\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|-\frac{q_{1i}B}{E^2}\right|\left|\Delta p_{0i}\right| + \\ &+\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{p_{1i}}{E} - \frac{p_{oi}B}{E^2}\right|\left|\Delta q_{1i}\right|.\end{aligned} \tag{30}$$

Для сводного индекса цен (по методу Ласпейреса) $L_p = \varphi(W, A)$ предельную абсолютную ошибку определим, принимая во внимание условия (12, 21…23) по выражению:

$$\begin{aligned}\Delta L_p \le &\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{q_{0i}}{A}\right|\left|\Delta p_{1i}\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{p_{1i}}{A} - \frac{p_{0i}W}{A^2}\right|\left|\Delta q_{0i}\right| + \\ &+\sum_{i=1}^{n}\left|-\frac{q_{oi}}{A^2}\right|\left|\Delta p_{0i}\right|.\end{aligned} \tag{31}$$

Формулы (10, 11, 14…24) позволяют получить выражения, необходимые для вычисления дисперсии оценок соответствующих индексов, однако корректное рассмотрение возникающих при этом задач выходит за рамки данного сообщения.

Для определения относительной погрешности вычисления индексов воспользуемся условием (13). Тогда относительную ошибку сводного индекса товарооборота (5) вычислим, используя выражение:

$$\delta I_{pq} \le \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{q_{1i}}{B}\right|\left|\Delta p_{1i}\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{p_{1i}}{B}\right|\left|\Delta q_{1i}\right| + + \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{q_{0i}}{A}\right|\left|\Delta p_{0i}\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{p_{0i}}{A}\right|\left|\Delta q_{0i}\right|. \quad (32)$$

Предельную относительную ошибку сводного индекса физического объёма реализации определяют по формуле:

$$\delta I_p \le \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{q_{1i}}{C} - \frac{q_{0i}}{A}\right|\left|\Delta p_{0i}\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{p_{0i}}{C}\right|\left|\Delta q_{1i}\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|-\frac{p_{0i}}{A}\right|\left|\Delta q_{0i}\right|. \quad (33)$$

Предельную относительную ошибку сводного индекса цен (по методу Пааше) определяют по формуле:

$$\delta \Pi_q \le \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{p_{1i}}{B}\right|\left|\Delta p_{1i}\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|-\frac{q_{1i}}{B}\right|\left|\Delta p_{0i}\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{p_{1i}}{B} - \frac{p_{0i}}{E}\right|\left|\Delta q_{1i}\right|. \quad (34)$$

Предельную относительную ошибку сводного индекса цен (по методу Ласпейроса определяют по формуле:

$$\Delta L_p \le \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{q_{0i}}{W}\right|\left|\Delta p_{1i}\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|-\frac{q_{0i}}{A}\right|\left|\Delta p_{0i}\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{p_{1i}}{W} - \frac{p_{0i}}{A}\right|\left|\Delta q_{0i}\right|. \quad (35)$$

Для уяснения содержательного смысла полученного результата рассмотрим численный пример. Предположим, что все данные, приведенные в табл. 1, определены с пятипроцентной относительной ошибкой $(\delta = 0,05)$. Тогда, используя (32), получим, что предельная относительная ошибка сводного индекса товарооборота $\delta I_{pq} = 0,115$. Иными словами, это означает, что при среднем значении индекса равном 0,969 его возможные значения могут находиться в интервале $[0,858;1,08]$. Учитывая, что по предположению, эти данные выборочные, то можно с равным успехом утверждать, что в генеральной совокупности мы наблюдаем спад экономики… или её подъём. Причём оба эти вывода математически корректны. Цифры экономической статистики, они ведь лукавые [12].

Выводы

1. Поставлена задача определения интервала неопределённости при вычислении значений основных сводных индексов, используемых в экономической статистике: индексов товарооборота, объёма реализации, индекса цен в форме Пааше и в форме Ласпейроса.

2. Задача решена в предположении, что данные, необходимые для вычислений, получены по результатам выборочных наблюдений.

3. Получены выражения для определения предельной относительной ошибки при вычислении этих индексов.

4. Приведен численный пример решения поставленной задачи.

Список литературы

1. *Ковалевский Г.В. Статистика: учебник / Г.В. Ковалевский; Харьк. нац. акад. гор. хоз-ва. – Х.: ХНАГХ, 2012. – 445 с.*
2. *Практикум по теории статистики: Учеб. пособие / Под ред. Р.А. Шмойловой. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 416 с.*
3. *Эконометрия / В.И. Суслов, Н.М. Ибрагимов, Л.П. Талышева, А.А. Цыплаков. – Изд.-воСО РАН, 2005. – 744 с.*
4. *Эдельгауз Г.Е. Достоверность статистических показателей / Г.Е. Эдельгауз. – М.: Статистика, 1977. – 278 с.*
5. *Абрамова Ю.С. Исследование проблемы точности планирования финансовых показателей предприятия с помощью имитационно-статистического моделирования: дис…. канд. экон. наук: 08. 00. 05 / Абрамова Юлия Сергеевна. – М., 2005. – 229 с.*
6. *Сильченко Т.Ю. Точность экономических расчётов при обосновании управленческих решений в производственных системах промышленных предприятий. / Т.Ю. Сильченко // TERRA ECONOMICUS. – 2009. – Т. 7, № 3. – С. 86-90.*
7. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement: First edition. – ISO, Switzerland, 1993.*
8. *ДСТУ-Н РМГ 43:2006 Метрологія. Застосування «Руководства по выражению неопределенности измерений» (РМГ 43:2001).*
9. *Поджаренко В.О. Опрацювання результатів вимірювань на основі концепції невизначеності: Навчальний посібник / В.О. Поджаренко, О.М. Васілевський, В.Ю. Кучерук. – Вінниця: ВНТУ, 2008. – 158 с.*
10. *Венцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Венцель. – М.: Наука, 1969. – 576 с.*
11. *Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Наука, 1966. – 664 с.*
12. *Селюнин В. Лукавая цифра / В. Селюнин, Г. Ханин // Новый мир. – 1987. – № 2. – С. 181-201.*

Поступила в редколлегию 24.08.2013

Рецензент: д-р эконом. наук, проф. Г.В. Ковалевский, Харьковский национальный университет городского хозяйства, Харьков.

ВИЗНАЧЕННЯ ІНТЕРВАЛУ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ПРИ ВИКОРИСТАННІ ІНДЕКСНОГО МЕТОДУ ЕКОНОМІЧНОЇ СТАТИСТИКИ

В.Ю. Дубницький

Поставлено задачу визначення інтервалу невизначеності при обчисленні значень основних зведених індексів, які використовують в економічній статистиці: індексів товарообігу, об'єму реалізації, індексів цін у формі Пааше та у формі Ласпейроса. Задача розв'язана в припущенні, що дані, необхідні для обчислень, отримані за результатами вибірко-

вих спостережень. Визначено вирази, необхідні для оцінки дисперсії результатів обчислень, абсолютної і відносної помилки процесу отримання чисельних значень індексів. Отримано вирази для визначення граничної відносної помилки при обчисленні цих індексів .Приведено чисельний приклад розв'язання поставленої задачі.

Ключові слова: *індексний метод, індекс товарообігу, індекс об'єму реалізації, індекс цін, індекс Пааше, індекс Ласпейроса, інтервал невизначеності, гранична абсолютна помилка, гранична відносна помилка.*

DETERMINATION OF INTERVAL OF UNCERTAINTY BY USE OF INDEX METHOD OF ECONOMIC STATISTICS

V.Iu. Dubnytskyi

There is a task for determination of interval of uncertainty by the calculation of values of composite indexes, which are used in economic statistics: indexes of commodity circulation, realization volume, price indexes in a form of Paasche and Laspeyres. A task is decided in supposition that the data needed for calculations, are got on results of selective supervisions. The terms are certain that are necessary for a dispersion estimation of calculations, absolute and relative error of process of receipt of numeral values indexes. There are the terms for determination of maximum relative error by calculation of these indexes. A numeral example of solution of the given problem is made.

Keywords: *index method, index of commodity circulation, index of realization volume, price index, Paasche index, index of Laspeyres, interval of uncertainty, maximum absolute error, maximum relative error.*