УДК.621.39:681.327.8

Н.Д. Рысаков, В.В. Куценко, И.Л. Костенко, А.П. Кулик, Д.Н. Воронов

Харьковский университет Воздушных Сил имени Ивана Кожедуба, Харьков

СПОСОБ РЕАЛИЗАЦИИ ЦИКЛИЧЕСКИХ КОДОВ С ИСПРАВЛЕНИЕМ МНОГОКРАТНЫХ ОШИБОК В ПРИНЯТОЙ КОМБИНАЦИИ

Проанализирована возможность построения циклических кодов с исправлением многократных ошибок. Предложены образующие и проверочные полиномы для построения циклических кодов, позволяющих исправлять двух, трех и четырехкратные ошибки в принятой кодовой комбинации. Получены проверочные матрицы для таких кодов. Предложен и обоснован алгоритм трехэтапной обработки декодером синдрома принятой комбинации циклического кода, позволяющий существенно сократить объем памяти декодера и число расчетных операций для определения искаженных разрядов.

Ключевые слова: *циклический код, систематический код, синдром, кодовое расстояние, кодер, декодер.*

Введение

Постановка проблемы. Одним из основных методов повышения достоверности передаваемых сообщений по калам связи является применение избыточных кодов. Для кодирования сообщений широко используются систематические коды, которые строятся и реализуются по общим правилам. Однако эти правила не гарантируют оптимальность ввода в кодовые комбинации сообщений проверочных разрядов. Исключение среди систематических кодов составляют циклические коды, которые обеспечивают оптимальность применения избыточности для исправления ошибок. Однако для них неприемлемы общие правила их построения. Поэтому авторы статьи на основе анализа правил образования циклических кодов получили и предлагают ряд вариантов циклических кодов со способностью исправлять многократные ошибки.

Анализ последних исследований и публикаций. Первые учебники по теории построения помехоустойчивых кодов появились более 40 лет назад. В последующие годы эта теория получила дальнейшее развитие [1, 2]. В настоящее время также уделяется внимание ученых развитию этой теории. Так в докладе [3] для цифрового кодирования данных предлагается использовать псевдослучайную последовательность информационных разрядов и код Хемминга для передачи этой последовательности по каналу связи. В статье [4] рассматривается синтез пороговых схем для декодеров корректирующих кодов, а в статье [5] обосновывается возможность создания эффективных декодеров переданной информации на основе применения метода унитарного кодирования. В статье [6] предложен способ получения проверочных матриц для циклических кодов без выполнения каких-либо расчетов.

Цель статьи. На основе анализа правил образования циклических кодов получить и предложить пользователям ряд вариантов циклических кодов со способностью исправлять многократные ошибки. Предложить способ упрощения схемной реализации кодеров и декодеров без ущерба для способности декодера исправлять ошибки в принятой кодовой комбинации.

1. Проверочные матрицы для циклических кодов с исправлением многократных ошибок в принятой комбинации

Важное место при кодировании сообщений среди систематических кодов (СК) занимают циклические коды (ЦК). Они позволяет оптимально использовать избыточность кода для обнаружения и исправления ошибок в принятых кодовых комбинациях. Однако они строятся по правилам, отличающимся от общих правил для СК. А именно ЦК задаются не порождающей матрицей $\mathbf{G}_{n,k}$ [1, 2, 3], а образующим полиномом $q(x)$ степени $m = n - k$, на который делится без остатка двучлен $1 + x^n$. В результате деления двучлена $1 + x^n$ на полином $q(x)$ образуется полином $h(x)$ степени k, называемый проверочным:

$$h(x) = (1 + x^n)/q(x). \qquad (1)$$

Правила (1) свидетельствуют о том, что нельзя получить ЦК любой степени. В статье [6] проанализированы параметры ЦК не высокой степени $n \le 7$. Такие ЦК позволяет исправлять лишь одиночные ошибки. Поэтому на основе анализа правила (1) были получены 6 вариантов ЦК, позволяющих исправлять двух, трех и четырехкратные ошибки, и предлагаются для использования в аппаратуре передачи данных. Первичные параметры $(1 + x^n)$, $q(x)$, $h(x)$ этих кодов, а также кодовое расстояние d_k и число информационных разрядов k приведены в табл. 1.

Таблица 1

Первичные параметры ЦК

№	$1+x^n$	q(x)	h(x)	$d_k \ge$	k
1	$1+x^{14}$	1101111001	111001	6	5
2	$1+x^{14}$	1001111011	100111	6	5
3	$1+x^{15}$	111101011001	11001	8	4
4	$1+x^{15}$	100110101111	10011	8	4
5	$1+x^{21}$	11111010100110001	110001	10	5
6	$1+x^{21}$	10001100101011111	100011	10	5

Для получения кодовых комбинаций ЦК, представленных в табл. 1, нужно построить образующие матрицы $\mathbf{G}^{ц}_{n,k}$ ЦК по следующим правилам. А именно, полином $q(x)$, дополненный m $(m = n - k)$ нулями, образует первую строку матрицы $\mathbf{G}^{ц}_{n,k}$, а последующие m строк образуются умножением полинома $q(x)$ на одночлен x^i $(i = 1, 2, .., m)$, что соответствует циклической перестановке разрядов предыдущей строки матрицы $\mathbf{G}^{ц}_{n,k}$, [1, 2, 3]:

$$\mathbf{G}^{ц}_{n,k} = \begin{Vmatrix} q(x) \\ q(x)\cdot x \\ q(x)\cdot x^2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ q(x)\cdot x^m \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} s_1 s_2 \dots s_k & 0\ \ 0\ \dots 0 \\ 0\ s_1 \dots s_{k-1} & s_k\ \ 0 \dots 0 \\ 0\ 0 \dots s_{k-2} & s_{k-1} s_k \dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0\ 0 \dots s_1 & s_2\ \ s_3 \dots s_k \end{Vmatrix}. \qquad (2)$$

Как следует из (2), по матрице нельзя получить проверочную матрицу, позволяющую получить выражения для алгоритмов кодирования сообщений и для алгоритмов декодирования принятых кодовых комбинаций. Поэтому в статье [6] предложен способ получения проверочных матриц для циклических кодов без выполнения каких-либо расчетов. Сущность предлагаемого способа сводится к следующему:

после получения всех комбинаций циклического кода на основе матрицы (2) выбрать кодовые комбинации, в которых бы первые k разрядов содержали по одной единице;

выбранные такие комбинации разместить по строкам так, чтобы они образовали единичную матрицу $\mathbf{J}_k$.

При этом составленная таким образом (восстановленная) производящая матрица $\mathbf{G}^{В}_{n,k}$ приобретает вид:

$$\mathbf{G}^{В}_{n,k} = \begin{Vmatrix} S_\delta \\ S_\varepsilon \\ \dots \\ S_\gamma \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 100\dots0 & s_{\delta k} s_{\delta k+1} \dots s_{\delta n} \\ 010\dots0 & s_{\varepsilon k} s_{\varepsilon k+1} \dots s_{\varepsilon n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ 000\dots1 & s_{\gamma k} s_{\gamma k+1} \dots s_{\gamma n} \end{Vmatrix}, \qquad (3)$$

где $S_\delta, S_\varepsilon, S_\gamma$ – соответствующие дозволенные комбинации циклического кода, заданного матрицей (2).

Тогда на основе матрицы (3) можно получить проверочную матрицу и по правилам СК строить алгоритмы кодирования и декодирования. Правила (2) и (3) применимы для третьего из приведенных в табл. 1 полиномов q(x). Имеем:

$$\mathbf{G}^{ц}_{15,4} = \begin{Vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 111101011001000 \\ 011110101100100 \\ 001111010110010 \\ 000111101011001 \end{Vmatrix}. \qquad (4)$$

Строки матрицы (4) представляют собой 4 разрешенные комбинации рассматриваемого ЦК. Суммируя по две, по три и четыре кодовые комбинации матрицы получим остальные разрешенные комбинации ЦК. Такие комбинации приведены в табл. 2, где тремя столбцами (1, 2, 3) представлены номера комбинации S_i, номера суммируемых комбинаций и их значения в двоичном коде. Из анализа 15 комбинаций ЦК (15,4) видно, что предложенному правилу (3) построения восстановленной матрицы $\mathbf{G}^{В}_{7,4}$ соответствуют кодовые комбинации S_5, S_8, S_{10}, S_4:

$$\mathbf{G}^{В}_{15,4} = \begin{Vmatrix} S_5 \\ S_8 \\ S_{10} \\ S_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1000 & 11110101100 \\ 0100 & 01111010110 \\ 0010 & 00111101011 \\ 0001 & 11101011001 \end{Vmatrix}. \qquad (5)$$

Убедиться в том, что матрица (5) является производящей для ЦК (15,4), можно путем суммирования по две, по три и четыре кодовые комбинации матрицы (5) и получения остальных комбинаций табл. 2. Одновременно матрица (5) свидетельствует о том, что ЦК (15,4) является разновидностью СК. По правилам (2) и (3) для 1-го ЦК (14,5) в табл. 2 можно получить следующую производящую матрицу:

Таблица 2

Значения кодовых комбинаций ЦК (15,4)

1	2	3	S_8	2+3	010001111010110
S_1	1+0	111101011001000	S_9	2+4	011001000111101
S_2	2+0	011110101100100	S_{10}	3+4	001000111101011
S_3	3+0	001111010110010	S_{11}	+2+3	101100100011110
S_4	4+0	000111101011001	S_{12}	+2+4	100100011110101
S_5	1+2	100011110101100	S_{13}	+3+4	110101100100011
S_6	1+3	110010001111010	S_{14}	2+3+4	010110010001111
S_7	1+4	111010110010001	S_{15}	,2,3.4	101011001000111

$$\mathbf{G}_{14,5}^{\mathrm{B}} = \begin{Vmatrix} S_{1+2+3} \\ S_{2+3+4} \\ S_{3+4+5} \\ S_{4+5} \\ S_5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 10000 & 110111100 \\ 01000 & 011011110 \\ 00100 & 001101111 \\ 00010 & 110001011 \\ 00001 & 101111001 \end{Vmatrix}. \qquad (6)$$

По этим же правилам для 5-го ЦК (21,5) в табл. 2 можно получить:

$$\mathbf{G}_{21,5}^{\mathrm{B}} = \begin{Vmatrix} S_{1+2} \\ S_{2+3} \\ S_{3+4} \\ S_{4+5} \\ S_5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 10000 & 1111101010011000 \\ 01000 & 0111110101001100 \\ 00100 & 0011111010100110 \\ 00010 & 0001111101010011 \\ 00001 & 1111010100110001 \end{Vmatrix}. \qquad (7)$$

Тогда правилам СК по кодовым комбинациям производящих матриц (5), (6) и (7) можно перейти к проверочным матрицам путем транспонирования последних k столбцов этих матриц и добавления единичных матриц размерностью n. Так для матрицы (5) проверочная матрица приобретает вид:

$$\mathbf{H}_{15,11} = \begin{Vmatrix} 1001 & 10000000000 \\ 1101 & 01000000000 \\ 1111 & 00100000000 \\ 1110 & 00010000000 \\ 0111 & 00001000000 \\ 1010 & 00000100000 \\ 0101 & 00000010000 \\ 1011 & 00000001000 \\ 1100 & 00000000100 \\ 0110 & 00000000010 \\ 0011 & 00000000001 \end{Vmatrix}. \qquad (8)$$

Проверочная матрица (8) и аналогичные матрицы для образующих матриц (6) и (7) определяют правила кодирования сообщений и декодирования принятых кодовых комбинаций. Так в соответствии с проверочной матрицей (8) правила кодирования сообщений (вычислений проверочных разрядов $s_5, s_6, \ldots, s_{13}$) имеют вид:

$$\begin{aligned} &s_5 = s_1 \oplus s_4, \qquad s_6 = s_1 \oplus s_2 \oplus s_4, \\ &s_7 = s_1 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_4, \\ &s_8 = s_1 \oplus s_2 \oplus s_3, \; s_9 = s_2 \oplus s_3 \oplus s_4, \\ &s_{10} = s_1 \oplus s_3, \qquad s_{11} = s_2 \oplus s_4, \\ &s_{12} = s_1 \oplus s_3 \oplus s_4, s_{13} = s_1 \oplus s_2, \\ &s_{14} = s_2 \oplus s_3, \qquad s_{15} = s_3 \oplus s_4. \end{aligned} \qquad (9)$$

Правила декодирования принятых комбинаций вытекают также из проверочной матрицы (8) и сводятся к нахождению 11-ти разрядного синдрома

$$D_{11} = r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7 r_8 r_9 r_{10} r_{11}. \qquad (10)$$

Значения каждого разряда находятся путем решения системы из 11 проверочных уравнений $r_1, r_2, \ldots, r_{11}$:

$$\begin{aligned} &r_1 = s_1 \oplus s_4 \oplus s_5, \qquad r_2 = s_1 \oplus s_2 \oplus s_4 \oplus s_6, \\ &r_3 = s_1 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_7, \\ &r_4 = s_1 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_8, \\ &r_5 = s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_9, r_6 = s_1 \oplus s_3 \oplus s_{10}, \\ &r_7 = s_2 \oplus s_4 \oplus s_{11}, \qquad r_8 = s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_{12}, \\ &r_9 = s_1 \oplus s_2 \oplus s_{13}, \qquad r_{10} = s_2 \oplus s_3 \oplus s_{14}, \\ &r_{11} = s_3 \oplus s_4 \oplus s_{15}. \end{aligned} \qquad (11)$$

Тогда правила декодирования к однозначному определению номеров искаженных разрядов по значениям 11-ти разрядного кода синдрома (11). Рассматриваемый код позволяет исправить до трех искаженных разрядов.

2. Алгоритм трехэтапной обработки декодером синдрома принятой комбинации циклического кода

Однако система из 11 уравнений для нахождения значений разрядов синдрома свидетельствует о сложности аппаратурной реализации декодера синдрома. Действительно, для определения до трех любых искаженных разрядов принятой комбинации декодер должен различать множество значений синдрома. Число $N_{\le 3}$ таких значений, включая нулевое значение (значения отсутствия искажений), вычисляется по формуле:

$$N_{\le 3} = C_{15}^0 + C_{15}^1 + C_{15}^2 + C_{15}^3 = 576\,.$$

Желательно для упрощения схемы декодера необходимое число анализируемых и запоминаемых декодером значений синдрома существенно сократить. Для этого можно предложить *следующий способ декодирования принятой комбинации*, приемлемый для ЦК с единичными синдромами для одиночных ошибок в проверочных разрядах. Сущность предлагаемого способа сводится к трехэтапному принципу декодирования синдрома:

1-й этап − исключение из обработки синдромов с ошибками лишь в проверочных разрядах;

2-й этап − “исправление” синдромов с ошибками в информационных и проверочных разрядах;

3-й этап − декодирование синдрома и исправление ошибок в информационных разрядах.

Обоснуем возможность реализации такого способа обработки декодером принятых комбинаций и охарактеризуем сущность каждого этапа.

Первый этап обработки вытекает из возможности реализации следующего принципа работы декодера: при обнаружении ошибок лишь в проверочных разрядах нет необходимости вносить исправления искаженных разрядов принятой комбинации. Поэтому для исправления одиночных, двойных и тройных ошибок в принятой кодовой комбинации желательно в алгоритме декодера предусмотреть дополнительный признак различения номеров искаженных разрядов. Таким признаком в принятой комбинации является единичное значение синдрома для комбинаций с одиночными ошибками в проверочных разрядах.

Проанализируем такую возможность для кодов, задаваемых образующими полиномами $q(x)$ (табл. 1). Из таблицы видно, что коды, задаваемые полиномами 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6, обладают одинаковой способностью к исправлению многократных ошибок из-за одинаковых кодовых расстояний. Однако из анализа значений синдромов этих кодов следует, что первые (1, 3, 5) по отношению ко вторым (2, 4, 6) отличаются тем, что значения их синдромов при однократных ошибках в проверочных разрядах имеют по одной единицы, а остальные разряды являются нулевыми. В табл. 3 приведены значения синдрома $D_{11,i}$ при одиночных ошибках ЦК (15,4), задаваемого производящей матрицей (5).

Таблица 3

Синдромы одиночных ошибок ЦК (15,4)

i	1	2	3
$D_{11,i}$	11110101100	01111010110	00111101011
i	4	5	6
$D_{11,i}$	11101011001	10000000000	01000000000
i	7	8	9
$D_{11,i}$	00100000000	00010000000	00001000000
i	10	11	12
$D_{11,i}$	00000100000	00000010000	00000001000
i	13	14	15
$D_{11,i}$	00000000100	00000000010	00000000001

Можно убедиться, что синдромы одиночных ошибок в проверочных разрядах для кодов, задаваемых производящими матрицами (6) и (7), также имеют по одной единице. Это означает, что при наличии искажений в информационных и проверочных разрядах, значения синдромов будут представлять сумму по модулю 2 соответствующих синдромов ошибок в информационных и синдромов ошибок в проверочных разрядах. Такая особенность значений синдромов таких ЦК и обуславливает принцип 1-го и 2-го этапа обработки синдрома.

Так при двух, трех и четырехкратных ошибках в проверочных разрядах эти синдромы имеют соответственно по две, три и четыре единицы. Такую особенность синдромов можно заложить в алгоритм работы декодера для исключения из дальнейшей обработки таких комбинаций. Различение таких искажений в проверочных разрядах можно осуществлять на основе подсчета единиц в цифровом коде синдрома. Однако из анализа типовой схемы построения декодера следует, что значения синдрома формируется в параллельном коде. Поэтому счетчик единиц синдрома можно строить по схеме сумматора напряжений U_1 разрядных импульсов ($i = 1, 2, \ldots, 11$) синдрома. Алгоритм работы такого счетчика для системы (11) можно описать выражением:

$$U_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{11} U_i = \begin{bmatrix} \le -5U_o = 0, \\ > -5U_o = 1, \end{bmatrix} \qquad (12)$$

где U_o – амплитуда разрядного импульса.

Первые условия выражения (12) означают, что при наличии до трех единиц в коде синдрома ($U_{\Sigma} \le (3-8)U_o$) на выходе сумматора формируется нулевой потенциал, который свидетельствует о том, что в информационных разрядах принятой комбинации нет искажений и можно преобразовывать ее в сигнал управления или сигнализации. Здесь заметим, что этому условию удовлетворяет и нулевой синдром, то есть принятая комбинации не имеет искажений.

Вторые условия выражения (12) означают, что при наличии более трех единиц в коде синдрома на выходе сумматора формируется единичный потенциал, который свидетельствует о том, что в принятой комбинации есть искажения в информационных разрядах и нужно переходить ко второму этапу обработки синдрома.

В результате реализации первого этапа названной обработки удается существенно сократить число анализируемых декодером синдромов. Для кода (15,4) число $N_{пр}$ таких значений вычисляется как

$$N_{пр} = C_{11}^1 + C_{11}^2 + C_{11}^3 = 231.$$

Таким образом, реализация такого этапа обработки позволяет из всех значений (576) синдрома исключить из анализа (из памяти декодера) почти половину (231) значений.

Второй этап обработки синдрома принятой комбинации сводится к выявлению наличия искажений лишь в информационных разрядах или в информационных и проверочных разрядах одновременно. В первом случае осуществляется переход к третьему этапу обработки. Во втором же случае осуществляется "исправление" значения синдрома. Уточним сущность такого исправления.

Если в принятой комбинации имеются искажения как в информационных, так и в проверочных разрядах, то из-за названного свойства синдрома для проверочных разрядов появляется возможность преобразовать значение синдрома к значению, соответствующему искажениям только в информационных разрядах. Действительно, искажения, например, 5-го, 11-го или 13-го разрядов кода (15,4) соответствует искажениям 1-го, 7-го или 9-го (5-4, 11-4 или 13-4) разрядов синдрома с искажениями только в информационных разрядах принятой комбинации. Аналогичное соответствие имеет место при, например, одном искажении в информационных и двух в проверочных разрядах.

Для названного преобразования (“исправления”) синдрома нужно знать значения синдромов с рассматриваемым количеством искажений в информационных разрядах. Значения синдромов для таких ошибок приведены в табл. 4. Из табл. 4 видно, при одном ($q = i$), двух ($q = i+j$) или трех ($q = i+j+k$) искажениях в разрядах синдромы соответственно имеют 7, 6 или 5 единиц.

Таблица 4

Синдромы ошибок
в информационных разрядах кода (15,4)

q	1	2	3
$D_{11,q}$	11110101100	01111010110	00111101011
q	4	5 (1+2)	6 (1+3)
$D_{11,q}$	11101011001	10001111010	11001000111
q	7 (1+4)	8 (2+3)	9 (2+4)
$D_{11,q}$	00011110101	01000111101	10010001111
q	10 (3+4)	11 (1+2+3)	12 (1+2+4)
$D_{11,q}$	11010110010	10110010001	01100100011
q	13 (1+3+4)	14 (2+3+4)	
$D_{11,q}$	00100011110	10101100100	

.Для исправления ненулевого или не “единичного” синдрома $D_{пр}$ принятой комбинации предлагается его значение просуммировать по модулю 2 с синдромами $D_{11,q}$ однократных, двукратных и трехкратных искажений в информационных разрядах и выбрать сумму $D_{\sum q}$ с минимальным числом единиц $D_{\sum q_{min}}$. Очевидно, что такой сумме синдромов будет соответствовать минимальное значение $U_{\sum q_{min}}$ суммарного напряжения $U_{\sum q}$ напряжений $U_{i\sum}$ разрядных импульсов ($i = 1, 2, \ldots, 11$) просуммированных синдромов $D_{\sum q}$. Последовательность получения суммы $D_{\sum q_{min}}$ синдромов можно представить следующим алгоритмом:

$$D_{\Sigma q_{min}} = D_{пр} \oplus D_{11,1};\ U_{\Sigma q_{min}} = \sum_{i=1}^{11} U_{i\Sigma},\ q = \overline{2,14},$$

$$D_{\Sigma q} = D_{пр} \oplus D_{11,q}, \quad U_{\Sigma q} = \sum_{i=1}^{11} U_{i\Sigma}, \tag{13}$$

$$U_{\Sigma q} = \begin{cases} < U_{\Sigma q_{min}} : U_{\Sigma q_{min}} = U_{\Sigma q}; D_{\Sigma q_{min}} = D_{\Sigma q}, \\ > U_{\Sigma q_{min}} : q = q+1, \end{cases}$$

где $D_{11,q}$ − синдромы (табл. 4) одиночных, двойных и тройных ошибок в информационных разрядах.

Синдром $D_{11,q}$ с такой суммой единиц $U_{\sum q} = U_{\sum q_{min}}$ и является синдромом с искажениями только в информационных разрядах. Убедимся в этом на двух примерах.

Предположим, что в принятой комбинации искажены 2-й, 7 и 13 разряды. В этом случае синдром $D_{пр}$ имеет значение:

$$D_{пр} = D_{11,2+7+12} = 01011011110.$$

Просуммируем его с синдромами одно, двух и трехкратных ошибок в информационных разрядах ($D_{11,q}$, $q = 1, 2, ..., 14$ в табл. 4). Проиллюстрируем сущность 2-го этапа обработки (13) синдрома $D_{пр}$ путем суммирования его с синдромами $D_{11,1}$, $D_{11,2}$, $D_{11,3}$:

$$\begin{array}{lll} 1)\ 11110101100 & 2)\ 01111010110 & 3)\ 00111101011 \\ \quad\oplus & \quad\oplus & \quad\oplus \\ \ \ 01011011110 & \ \ 01011011110 & \ \ 01011011110 \\ \hline \ \ 10101110010 & \ \ 00100001000 & \ \ 01100110101 \end{array}.$$

Просуммировав синдром $D_{пр}$ принятой комбинации с синдромами $D_{11,4}$, $D_{11,5}, \ldots$ $D_{11,14}$ (табл. 4) получим соответственно следующие значения $D_{\sum q}$ сумм: 4) 10110001111, 5) 11010100100, 6) 10010011001, 7) 01000101011, 8) 00011100011, 9) 11001010001, 10) 10001101100, 11) 11101001111, 12) 00111111101, 13) 01111000000, 14) 11110111010.

Выполнив аналогичные суммирования (13) для синдрома $D_{пр}$ принятой комбинации с искажениями в двух информационных (1 и 3) разрядах и в одном (11) проверочном разряде $D_{пр} = D_{11,1+3+11} = 11001010111$, получим следующие значения сумм: 1) 00111111011, 2) 10110000001, 3) 11110111100, 4) 00100001110, 5) 01000101101, 6) 00000010000, 7) 11010100010, 8) 10001101010, 9) 01011011000, 10) 00011100101, 11) 01111000110, 12) 10101110100, 13) 11101001001, 14) 01100110011.

Из полученных сумм синдромов видно, что в первом случае вторая, а во втором − шестая сумма имеет наименьшее количество единиц, соответствующее числу искаженных проверочных разрядов в принятой комбинации. Очевидно, что в случае искажений только в информационных разрядах одна из сумм будет состоять из нулевых разрядов. В этом случае осуществляется переход к третьему этапу.

Если же искажения есть как в информационных, так и в проверочных разрядах, то, выделив из всех сумм суммы с одной или двумя единицами и поразрядно просуммировав их по модулю 2 с синдромом принятой комбинации, можно получить синдром, соответствующий искажениям только в информационных разрядах. В этом заключается второй этап обработки. После этого можно переходить к третьему этапу.

Третий этап обработки синдрома принятой комбинации сводится к выявлению и исправлению искаженных информационных разрядов. Действительно, на втором этапе обработки выявили или получили синдромы искажений в информационных разрядах. Уточним правила третьего этапа обработки синдрома.

Для одно, двух, и трехкратных ошибок в информационных разрядах для рассматриваемого кода (15,4) можно предложить простые правила нахождения и исправления этих ошибок. В соответствии с системой проверочных уравнений (11) для определения номера искаженного разряда просуммируем по модулю 2 те разряды r_i синдрома, в уравнения которых входят этот разряд. При этом если такая сумма p_i ($i = 1, 2, 3, 4$) равна единицы $p_i = 1$, то это означает, что i-й разряд комбинации искажен и его нужно инвертировать, если же $p_i = 0$ то i-й разряд неискажен и его инвертировать не надо. Применительно для ЦК (15,4) в соответствии с системой (11) получим:

$$\begin{aligned} p_1 &= r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_6 + r_8 + r_9, \\ p_2 &= r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_7 + r_9 + r_{10}, \\ p_3 &= r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_8 + r_{10} + r_{11}, \\ p_4 &= r_1 + r_2 + r_3 + r_5 + r_7 + r_8 + r_{11}. \end{aligned} \qquad (14)$$

Проверим правомочность алгоритм (14) для одно (1-й), двух (2-й и 3-й), и трехкратных (1-й, 2-й и 4-й разряды) ошибок в информационных разрядах. Для названных ошибок синдромы имеют значения (табл. 4): $D_{11,1} = 11110101100$, $D_{11,8} = 01000111101$ и $D_{11,12} = 01100100011$. Тогда в соответствии с (14) для трех вариантов ошибок получим

− искажен 1-й разряд: $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$ и $p_4 = 0$;

− искажены 2-й и 3-й разряды: $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$ и $p_4 = 0$;

− искажены 1-й, 2-й и 4-й разряды: $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 0$ и $p_4 = 1$.

Можно убедиться, что для остальных вариантов искажений (табл. 4) выполняются предложенные правила (14) нахождения искажений в информационных разрядах.

Таким образом, выражения (12), (13) и (14) характеризуют сущность трехэтапной обработки синдрома для исправления до трех ошибок принятой комбинации.

Выводы

1. В работе проанализирована возможность построения ЦК с исправлением многократных ошибок.

2. Предложены образующие и проверочные полиномы для построения ЦК, позволяющих исправлять двух, трех и четырехкратные ошибки в принятой кодовой комбинации. Получены проверочные матрицы для таких кодов.

3. Предложен и обоснован алгоритм трехэтапной обработки декодером синдрома принятой комбинации ЦК.

Список литературы

1. Гойхман Э.Ш. Передача информации в АСУ / Э.Ш. Гойхман, Ю.И. Лосев. – М: Связь, 1976. - 279 с.

2. Четвериков В.Н. Подготовка и телеобработка данных в АСУ / В.Н. Четвериков. – М: Высшая школа, 1981. - 320 с.

3. Політанський Р.Л. Системи зв'язку з шифруванням даних псевдовипадковими послідовностями та кодуванням каналу кодами Хеммінга / Р.Л. Політанський, Л.Ф. Політанський, П.М. Шпатар, П.В. Іванюк // СНТ. Том II. Международная конференция "Телекоммуникационные системы и технологии". – Х: АНПРЭ, ХНУРЭ. (448 с). - С. 390-392.

4. Синтез инверсных пороговых схем для реализации в неалгебраических декодерах корректирующих кодов / Л.Б. Макаров, А.Н. Битченко, Г.Ф. Коняхин. Н.А. Коваленко // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2011. – Вип. 8(98). - С.87-92.

5. Устройства обработки информации в модулярной системе счисления на основе применения метода унитарного кодирования / В.И. Барсов, В.О. Жадан, В.А. Краснобаев, Е.А. Сотник // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2011. – Вип. 8(98). - С.25-28.

6. Предложения по построению и реализации циклических кодов в аппаратуре передачи данных / Н.Д. Рысаков, В.В. Куценко, И.В. Титов, В.Г. Карев // Збірник наукових праць ХУПС. – Х.: ХУПС, 2013. – Вип. 2(35). - С. 61-66.

Поступила в редколлегию 22.08.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Г.В. Ермаков, НТУ «ХПИ», Харьков.

СПОСІБ РЕАЛІЗАЦІЇ ЦИКЛІЧНИХ КОДІВ З ВИПРАВЛЕННЯМ БАГАТОКРАТНИХ ПОМИЛОК У ПРИЙНЯТІЙ КОМБІНАЦІЇ

М.Д. Рисаков, В.В. Куценко, І.Л. Костенко, А.П. Кулик, Д.М. Воронов

Проаналізовано можливість побудови циклічних кодів з виправленням багатократних помилок. Запропоновані утворюють і перевірочні поліноми для побудови циклічних кодів, що дозволяють виправляти двох, трьох і чотириразові помилки в прийнятій кодовій комбінації. Отримані перевірочні матриці для таких кодів. Запропоновано та обґрунтовано алгоритм трьохетапної обробки декодером синдрому прийнятої комбінації циклічного коду, що дозволяє істотно скоротити обсяг пам'яті декодера і число розрахункових операцій для визначення перекручених розрядів.

***Ключові слова**: циклічний код, систематичний код, синдром, кодова відстань, кодер, декодер.*

WAY OF IMPLEMENTATION OF CYCLIC CODES WITH CORRECTION OF REPEATED ERRORS IN THE ACCEPTED COMBINATION

N.D. Rysakov, V.V. Kutsenko, I.L. Kostenko, A.P. Kulik, D.N. Voronov

Possibility of construction of cyclic codes with correction of repeated errors is analysed. Forming and verifying polynomials for construction of the cyclic codes are offered, allowing to rectify two, three and fourfould errors in the accepted code combination. Parity-check matrixes for such codes are gained. The algorithm three line-of-communication machining by the decoder of a syndrome of the accepted combination of the cyclic code is offered and proved, allowing essentially to devide out memory size of the decoder and number of settlement operations for definition of the distorted categories.

***Keywords**: a cyclic code, a regular code, a syndrome, a signal distance, the coder, the decoder.*