УДК 519.873

А.Н. Дегтярёв, Д.Б. Кучер

*Севастопольский национальный технический университет, Севастополь*

# ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО СИГНАЛА ИЗ ДИСКРЕТНОГО НА ФОНЕ ШУМОВ В ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ ВМС ВС УКРАИНЫ

*Для восстановления непрерывного сигнала из дискретного зашумленного сигнала предложено использовать ортогональные ряды. На основе условия минимума средней квадратической ошибки отличия восстановленного сигнала от исходного получено уравнение, решениями которого являются требуемые базисные функции.*

***Ключевые слова:*** *физически реализуемые функции, эквидистантные функции, ортогональность, функционал ошибки.*

## Введение

В некоторых системах электросвязи до сих пор используются сигналы с амплитудно-импульсной модуляцией (АИМ). Основным недостатком таких систем является низкая помехоустойчивость. Любые случайные изменения уровней передаваемых импульсов приводят к тому, что форма восстановленного непрерывного сигнала существенно отличается от формы исходного сигнала.

Для повышения помехоустойчивости сигналов с АИМ можно использовать устройства, полученные на основе методов оптимального приема.

В настоящее время восстановление непрерывного сигнала по сигналу АИМ осуществляется с помощью фильтра нижних частот, который должен иметь амплитудно- и фазочастотные характеристики, близкие к идеальным, т.е. достаточно сложных фильтров. Использование оптимальных приемников и сложных фильтров существенно усложняет и удорожает аппаратуру. Кроме того, при восстановлении сигнала неизбежны ошибки, вызванные неидеальностью восстанавливающего фильтра [1].

**Целью работы** является разработка достаточно простой процедуры для наиболее точного восстановления непрерывного сигнала по АИМ-сигналу, переданному по каналу связи с аддитивным шумом.

## Основные допущения

Исходный непрерывный сигнал s(t), подлежащий передаче, представляет собой случайный сигнал, и в соответствии с результатами работы [1], может быть представлен в виде ряда

$$s(t) \approx \sum_{n=0}^{\infty} x_n \varphi_n(t), \tag{1}$$

где $x_n = \int\limits_{T_1} s(t)\varphi_n(t)\rho(t)dt$, $T_1$ – интервал времени наблюдения сигнала s(t), $\rho(t)$ – вес ортогональности функций $\varphi_n(t)$, функции $\varphi_n(t)$ являются собственными функциями интегрального преобразования

$$\int\limits_{T_1} R_s(t,\tau)\varphi_n(t)\rho(t)dt = \sigma_{xn}^2 \varphi_n(t), \tag{2}$$

в котором $R_s(t,\tau)$ – корреляционная функция сигнала s(t), $\sigma_{xn}^2$ – дисперсии случайных величин $x_n$.

Функции $\varphi_n(t)$ являются эквидистантными ортогональными функциями ($\varphi_n(t) = \varphi(t - nT_s)$, время $T_s$ равно интервалу смещения функций), $\rho(t)$ – периодическая весовая функция с периодом, равным $T_s$. Интервал $T_s$ определяется исходя из условия минимума средней квадратической ошибки представления сигнала s(t) рядом (1).

Последовательность импульсов, уровни которых равны $x_n$, представляет собой АИМ-сигнал.

Пусть на входе приемника действует непрерывный шум n(t), который можно представить в виде ряда

$$n(t) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \theta_n(t),$$

где

$$\xi_n = \int\limits_{T_s} n(t)\theta_n(t)h(t)dt,$$

$\theta_n(t)$ – эквидистантные ортогональные функции ($\theta_n(t) = \theta(t - nT_s)$), представляющие собой смещенные на интервал времени $T_s$ импульсные характеристики канала связи (длинной линии), $h(t)$ – периодическая весовая функция с периодом, равным $T_s$.

$\theta_n(t)$ являются собственными функциями интегрального преобразования

$$\int\limits_{T_1} R_n(t,\tau)\theta_n(t)h(t)dt = \sigma_{nn}^2 \theta_n(t),$$

в котором $R_n(t,\tau)$ – корреляционная функция шума n(t) s(t), $\sigma_{nn}^2$ – дисперсии случайных величин $\xi_n$.

На вход приемника поступает сигнал, состоящий из зашумленной последовательности смещенных взвешенных импульсных характеристик канала связи

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \theta(t - nT_s) + n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n + \xi_n)\theta_n(t) . \quad (3)$$

В классическом варианте построения приемника предусматривается принятие решения о символе $x_n$, который содержится в смеси

$$y_n = x_n + \xi_n$$

по критерию максимального отношения сигнал/шум. После чего осуществляется восстановление переданного исходного непрерывного сигнала с помощью восстанавливающего фильтра.

Однако, канал связи уже производит восстановление непрерывного сигнала, хотя и с некоторой ошибкой.

Имеет смысл предположить, что формируя соответствующим образом импульсную характеристику входного фильтра приемника $g_n(t)$ можно восстановить переданный непрерывный сигнал без использования решающего устройства.

В этом случае оценка переданного сигнала запишется как

$$\hat{s}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n + \xi_n) w_n(t) , \quad (4)$$

где $w_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_n(\tau) g(t - \tau) d\tau$ .

## Формализация задачи

С учетом введенных допущений задача восстановления исходного сигнала s(t) по последовательности импульсов, имеющих уровни $y_n$, формулируется следующим образом. Необходимо определить, какими должны быть функции $w_n(t)$, чтобы средняя квадратическая ошибка отличия ряда (4) от сигнала (1) была минимальна.

## Определение оптимального базиса

Функционал J, определяющий среднюю квадратическую ошибку отличия ряда (4) от сигнала s(t), записывается как

$$J = M\left\{ \int_{T_s} (s(t) - \sum_{n=0}^{\infty} (x_n + \xi_n) w_n(t))^2 dt \right\}, \quad (5)$$

где M{…} – оператор определения математического ожидания.

Преобразуем выражение (5):

$$J = \int_{T_s} M\{s^2(t) - 2\sum_{n=0}^{\infty} s(t)(x_n + \xi_n) w_n(t) +$$

$$(\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + \xi_n) w_n(t))^2\} dt =$$

$$= \int_{T_s} [D_s(t) \text{-} 2 \sum_{n=0}^{\infty} M\{s(t)( \int_{T_s} s(\tau)\varphi_n(\tau)\rho(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_{T_s} n(\tau)\theta_n(\tau) h(\tau) d\tau) w_n(t)\} +$$

$$+ M\{[\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + \xi_n) w_n(t)]^2\}] dt =$$

$$= \int_{T_s} [D_s(t) \text{-} 2 \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) \int_{T_s} R_s(t,\tau)\varphi_n(\tau)\rho(\tau) d\tau -$$

$$-2 \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) \int_{T_s} R_{sn}(t,\tau)\theta_n(\tau) h(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (k_{xnm} + k_{x\xi nm} + k_{\xi xnm} +$$

$$+ k_{\xi nm}) w_n(t) w_m(t)] dt ,$$

где $R_{sn}(t, \tau)$ – взаимная корреляционная функция сигнала s(t) и шума n(t), $k_{xnm}$ – коэффициенты корреляции случайных величины $x_n$ и $x_m$, $k_{x\xi nm}$ – коэффициенты взаимной корреляции случайных величин $x_n$ и $\xi_m$, $k_{\xi xnm}$ – коэффициенты взаимной корреляции случайных величин $\xi_n$ и $x_m$, $k_{\xi nm}$ – коэффициенты корреляции случайных величин $\xi_n$ и $\xi_m$.

Функция Лагранжа запишется как

$$L = D_s(t) \text{-} 2\sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) \int_{T_s} R_s(t,\tau)\varphi_n(\tau)\rho(\tau) d\tau -$$

$$-2 \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) \int_{T_s} R_{sn}(t,\tau)\theta_n(\tau) h(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (k_{xnm} + k_{x\xi nm} + k_{\xi xnm} + k_{\xi nm}) w_n(t) w_m(t) .$$

Продифференцируем L по $w_n(t)$ и имеем

$$\frac{L}{w_n(t)} = \text{-}2 \int_{T_s} R_s(t,\tau)\varphi_n(\tau)\rho(\tau) d\tau -$$

$$2 \int_{T_s} R_{sn}(t,\tau)\theta_n(\tau) h(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} (k_{xnm} + k_{x\xi nm} + k_{\xi xnm} + k_{\xi nm}) w_m(t) . \quad (6)$$

Приравняем (6) к нулю и получим уравнение для определения функций $w_n(t)$, которые минимизируют функционал J:

$$\int_{T_s} R_s(t,\tau)\varphi_n(\tau)\rho(\tau) d\tau + \int_{T_s} R_{sn}(t,\tau)\theta_n(\tau) h(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (k_{xnm} + k_{x\xi nm} + k_{\xi xnm} + k_{\xi nm}) w_m(t) . \quad (7)$$

С учетом (2) уравнение (7) приводится к виду

$$\sigma_{xn}^2 \varphi_n(t) + \int_{T_s} R_{sn}(t,\tau)\theta_n(\tau) h(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (k_{xnm} + k_{x\xi nm} + k_{\xi xnm} + k_{\xi nm}) w_m(t) . \quad (8)$$

Пусть случайные процессы s(t) и n(t) некоррелированы между собой и имеют нулевые математические ожидания, тогда

$$R_{sn}(t,\tau)=0,$$

$$k_{x\xi nm}=k_{\xi xnm}=0,$$

и уравнение (8) преобразуется к виду

$$\sigma_{xn}^2\varphi_n(t)=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}(k_{xnm}+k_{\xi nm})w_m(t). \qquad (9)$$

В данном случае $w_n(t)$ и $\varphi_n(t)$ связаны между собой линейным соотношением (9).

Поскольку сигнал s(t) наблюдается на конечном интервале времени, то (9) можно переписать в виде

$$\sigma_{xn}^2\varphi_n(t)=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{M}(k_{xnm}+k_{\xi nm})w_m(t). \qquad (10)$$

Система уравнений (10) позволяет определить функции $w_n(t)$:

$$w_m(t)=\sum_{n=0}^{M}q_{mn}\varphi_n(t), \qquad (11)$$

где $q_{mn}$ – элементы матрицы, обратной матрице коэффициентов системы уравнений (10).

Функции $w_m(t)$ не являются эквидистантными, поскольку величины коэффициентов $q_{mn}$ зависят от m. Следовательно, входной фильтр приемника должен быть адаптивным.

Подставим (11) в (4) и получим

$$\hat{s}(t)=\sum_{n=0}^{M}(x_n+\xi_n)\sum_{k=0}^{M}q_{nk}\varphi_k(t)=$$

$$=\sum_{k=0}^{M}\varphi_k(t)\sum_{n=0}^{M}(x_n+\xi_n)q_{nk}=\sum_{k=0}^{M}\hat{x}_k\varphi_k(t), \qquad (12)$$

где

$$\hat{x}_k=\sum_{n=0}^{M}(x_n+\xi_n)q_{nk} \qquad (13)$$

являются оценкой величин $x_k$.

Как правило, из-за того, что канал связи имеет узкую полосу пропускания, процессы s(t) и n(t) коррелированны, и $w_n(t)$ необходимо искать из соотношения (8), которое можно переписать в виде

$$\sigma_{xn}^2\varphi_n(t)+u_n(t)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}(k_{xnm}+k_{x\xi nm}+k_{\xi xnm}+k_{\xi nm})w_m(t),$$

где $u_n(t)=\int_{T_s}R_{sn}(t,\tau)\theta_n(\tau)h(\tau)d\tau$. Тогда

$$w_m(t)=\sum_{n=0}^{M}q_{mn}[\sigma_{xn}^2\varphi_n(t)+u_n(t)]. \qquad (14)$$

Подстановка (14) в (4) дает оценку переданного сигнала в виде

$$\hat{s}(t)=\sum_{n=0}^{M}(x_n+\xi_n)\sum_{k=0}^{M}q_{nk}[\sigma_{xk}^2\varphi_k(t)+u_k(t)]=$$

$$=\sum_{k=0}^{M}[\sigma_{xk}^2\varphi_k(t)+u_k(t)]\sum_{n=0}^{M}(x_n+\xi_n)q_{nk}.$$

## Процедура восстановления непрерывного сигнала по АИМ-сигналу

Процедура восстановление непрерывного сигнала по зашумленному АИМ-сигналу определяется выражением (4). Импульсы АИМ-сигнала передаются по каналу связи, который имеет некоторую импульсную характеристику, после чего поступают на адаптивный входной фильтр приемника.

## Вывод

Полученное уравнение позволяет определить базис, такой, что составленный из него ряд наиболее точно восстанавливает исходный непрерывный сигнал по последовательности импульсов зашумленного амплитудно-импульсно модулированного сигнала.

## Список литературы

*1. Дегтярев А.Н. Сжатие данных с помощью одного ортогонального преобразования / А.Н. Дегтярев // Зв'язок. – 2009. – №4 (88). – С. 63-66.*

*Поступила в редколлегию 19.09.2013*

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Э.Ф. Бабуров, Севастопольский национальный технический университет, Севастополь.

### ВІДНОВЛЕННЯ БЕЗПЕРЕРВНОГО СИГНАЛУ ІЗ ДИСКРЕТНОГО НА ТЛІ ШУМІВ У ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМАХ ВМС ЗС УКРАЇНИ

А.М. Дегтярьов, Д.Б. Кучер

*Для відновлення безперервного сигналу з дискретного сигналу на тлі шумів запропоновано використовувати ортогональні ряди. На основі умови мінімуму середньої квадратичної помилки відмінності відновленого сигналу від вихідного отримано рівняння, рішеннями якого є необхідні базисні функції.*

***Ключові слова:*** *функції, що фізично реалізовуються, еквідистантні функції, ортогональность, функціонал помилки.*

### THE RECOVERY CONTINUOUS SIGNAL FROM THE DISCRETE SIGNAL WITH THE NOISE FOR INFORMATION SYSTEMS OF THE NAVAL FORCES OF UKRAINE

A.N. Degtyarev, D.B. Kucher

*To restore a continuous signal from the discrete noisy signal is proposed to use orthogonal series. To derive an equation, which bases on the condition of the minimum mean square error differences reconstructed signal from the source signal. Solutions of this equation are required basis functions.*

***Keywords:*** *physically realized functions, эквидистантные functions, ортогональность, functional of error.*