УДК 621.396

В.Н. Ушань

Харьковский университет Воздушных Сил имени Ивана Кожедуба, Харьков

МЕТОД СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ДЛЯ ВЫВОДА ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В ЗАДАННУЮ ТОЧКУ

Предложено применение метода продолжения решения по параметру как основы для разработки решения краевой задачи. Краевая задача возникла при синтезе методом характеристик оптимального управления динамическим объектом. Ранее алгоритмы, основанные на продолжении решения по параметру, применялись только для решения краевых задач с фиксированными левыми и правыми граничными условиями. Получен вариант решения двухточечной краевой задачи. В результате краевая задача свелась к задаче Коши большой размерности. Предлагаемый алгоритм включает в себя многократное интегрирование системы уравнений с изменяющимися от шага к шагу начальными условиями.

Ключевые слова: *оптимальное управление, оптимальная траектория, динамический объект, краевая задача, метод характеристик, продолжение решения по параметру, граничное условие.*

Введение

Постановка проблемы. Расчет маршрутов для вывода динамического объекта в заданную точку зависит от возмущений среды на маршруте его движения и предполагает минимизацию воздействий среды по объекту.

Обход зон возмущения приводит к увеличению расхода ресурсов для достижения заданной точки маршрута. Это требует, в свою очередь, максимального использования ресурса. Соответственно, уменьшается эффективность динамического объекта.

Для расчета оптимальных маршрутов необходимо сформировать опорные траектории (i, j). Они обеспечивают перевод управляемых объектов из начальных условий (C_{0i}) в конечные (C_{kj}) и доставляют минимум целевому функционалу (I_{ij}).

Анализ последних исследований и публикаций. Основные принципы решения задачи синтеза оптимального управления детерминированным нелинейным объектом сформулированы Р. Беллманом [1] (метод динамического программирования) и Л. С. Понтрягиным [2] (принцип максимума). Реализация этих методов связана с решением уравнения в частных производных или с решением краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ДУ), что представляет математическую и вычислительную [3, 4].

Этот факт обусловил появление функционалов обобщенной работы (ФОР) [5]. На их основе разработан ряд субоптимальных алгоритмов управления процессами, описываемыми нелинейными ДУ. Алгоритмы, основанные на ФОР, позволяют определять управление лишь для малого интервала времени. Интервал интегрирования значительно больше того отрезка реального времени, для которого определяется управление. Это затрудняло применение ФОР для решения практических задач и выдвигало высокие требования к быстродействию ЭВМ.

Известен метод решения классической задачи оптимального управления, позволяющий найти управление для всего интервала времени, на котором требуется минимизировать функционал [6]. Кроме того, метод не налагает жестких условий на вид подынтегральной функции и терминального члена целевого функционала.

Цель статьи. Разработка метода определения оптимальных траекторий для вывода динамических объектов в заданную точку.

Основной материал

Пусть объект управления описывается на интервале (t_0, t_k) системой ДУ:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = f(x, u, t), \qquad (1)$$

где $X^T(t) = [x_1(t), ..., x_n(t)]$ – вектор;

$f(x, u, t)$ – n-мерная векторная функция;

$u^T(t) = [u_1(t), ..., u_m(t)]$ – вектор управления.

Необходимо найти управление $u_0(t)$ для минимизации функционала с фиксированным t_k:

$$I = I[u(t)] = \int_{t_0}^{t_k} L\,(x(t), u(t), t)\,dt + S_k(x(t_k)), \qquad (2)$$

где t – текущее время;

$u(t)$ – вектор управления;

$x(t)$ – вектор координат состояния объекта;

$L\,(x, u, t)$ – скалярная неотрицательная подынтегральная функция целевого функционала;

$S_k(x)$ – его терминальный член.

Функции $x(t)$ и $u(t)$ связаны уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t). \quad (3)$$

При линейной зависимости функции $f(x, u, t)$ от u и квадратичной зависимости $L(x, u, t)$ от u:

$$f(x, u, t) = \phi(x, t) + G(x, t)u, \quad (4)$$

$$L(x, u, t) = L_1(x, t) + \frac{1}{2}u^T(B(x, t)u), \quad (5)$$

где $G(x, t)$ – прямоугольная, $B(x, t)$ – положительная функциональные матрицы.

Оптимальное управление u_o описывается как

$$\min\begin{bmatrix} L_1(x, t) + 0{,}5 \cdot u^T(B(x, t)u) + \\ +(\phi(x, t) + G(x, t)\,u)^T \cdot P \end{bmatrix} = L_1(x, t) + \quad (6)$$
$$+0{,}5 \cdot u_o^T(B(x, t)u_o) + P^T(\phi(x, t) + G(x, t)\,u_o),$$

где $P = \dfrac{\partial S(x, t)}{\partial x}$.

Из (6) следует, что

$$u_o(t) = -B^{-1}(x(t), t)\, G^T(x(t), t) \cdot P(t)]. \quad (7)$$

Функции – векторная $\phi(x, t)$, скалярная $L_1(x, t)$, матричные функции $G(x, t)$ и $B(x, t)$ – принимаются известными непрерывными. Кроме того, функции $\phi(x, t)$, $G(x, t)$ и $L_1(x, t)$ должны иметь непрерывные производные по переменной x [7].

Векторная функция $P(t)$ представляет собой результат решения такой краевой задачи [7]:

$$\frac{dx}{dt} = \phi(x, t) - M(x, t)P, \quad (8)$$

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial\phi^T(x, t)}{\partial x} \cdot P + \quad (9)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(P^T M(x, t)P) - \frac{\partial L_1(x, t)}{\partial x},$$

где $M(x, t) = G(x, t)\, B^{-1}(x, t)\, G^T(x, t)$.

Уравнение (8) описывает движение объекта при оптимальном управлении (7). Система (9) называется сопряженной по отношению к системе (8). Граничное условие для (8) задается на левом конце отрезка $[t_0, t_k]$, т. к. состояние управляемого объекта $x(t)$ в момент t принимается известным. Граничное условие для сопряженной системы фиксируется на правом конце:

$$t = t_k; \quad P(t_k) = \frac{\partial S_k(x(t_k))}{\partial x}. \quad (10)$$

Решим двухточечную краевую задачу (8), (9). Исходя из принятых обозначений, запишем:

$$f_1(x, P, t) = \phi(x, t) - M(x, t)P, \quad (11)$$

$$f_2(x, P, t) = -\frac{\partial\,\phi^T(x, t)}{\partial\, x} \cdot P + \quad (12)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\, x}(P^T M(x, t)P) - \frac{\partial\, L_1(x, t)}{\partial\, x},$$

где
$$\frac{\partial\phi^T(x, t)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\phi_1(x, t)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\phi_n(x, t)}{\partial x_1} \\ . & . \ . \ . \ . \ . \ . & . \\ \dfrac{\partial\phi_1(x, t)}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial\phi_n(x, t)}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial(P^T M(x, t)P)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{ij}^{n} P_i \dfrac{\partial\, M_{ij}(x, t)}{\partial x_1} P_j \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ \sum\limits_{ij}^{n} P_i \dfrac{\partial\, M_{ij}(x, t)}{\partial x_n} P_j \end{bmatrix},$$

$$\left[\frac{\partial\, L_1(x, t)}{\partial x}\right]^T = \left[\frac{\partial\, L_1(x, t)}{\partial x_1} \quad . \ . \ . \quad \frac{\partial\, L_1(x, t)}{\partial x_n}\right].$$

Тогда получаем:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{\partial x(P_0(t), t)}{\partial P_0} \cdot \frac{\partial P_0(t)}{\partial t} + \phi(\tilde{x}(t)) - M(\tilde{x}(t)), \quad (13)$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} =$$
$$= \left[\frac{\partial P(P_0(t), t)}{\partial P_0} - \frac{\partial^2 S_k(\tilde{x}(t))}{\partial^2 x} \cdot \frac{\partial x(P_0(t), t)}{\partial P_0}\right]^{-1} \times$$
$$\times\left[\frac{\partial S_k(\tilde{x}(t))}{\partial^2 x} \cdot (\phi(\tilde{x}(t)) - M(\tilde{x}, t) \cdot \frac{\partial S_k(\tilde{x}(t))}{\partial x}) + \right. \quad (14)$$
$$+\frac{\partial\phi^T(\tilde{x}(t))}{\partial x} \cdot \frac{\partial S_k(\tilde{x}(t))}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial S_k(\tilde{x}(t))^T}{\partial x} \times$$
$$\left.\times M(\tilde{x}, t)\frac{\partial S_k(\tilde{x}(t))}{\partial x}] + \frac{\partial L_1(\tilde{x}(t))}{\partial x}\right],$$

где
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial S_k(x(t))^T}{\partial x} \cdot M(\tilde{x}, t)\frac{\partial S_k(\tilde{x}(t))}{\partial x}\right] =$$
$$= \begin{bmatrix} \sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial S_k(x(t))}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial M_{ij}(\tilde{x}, t)}{\partial x_1} \cdot \dfrac{\partial S_k(\tilde{x}(t))}{\partial x_j} \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial S_k(x(t))}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial M_{ij}(\tilde{x}, t)}{\partial x_n} \cdot \dfrac{\partial S_k(\tilde{x}(t))}{\partial x_j} \end{bmatrix}.$$

Начальные условия для (13), (14):

$$t = t_0; \quad \tilde{x}(t_0) = x_0; \quad P(t_0) = \frac{\partial S_k(\tilde{x}(t_0))}{\partial x}.. \quad (15)$$

Используем приближенный метод решения краевой задачи, основанный на вычислении уравнений для матриц чувствительностей:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial x(P_0(t), t)}{\partial P_0}\right] =$$
$$= \left[\frac{\partial\phi(\tilde{x}(t))}{\partial x} - \frac{\partial M(\tilde{x}, t)}{\partial x} \cdot P(P_0(t), t)\right] \times \quad (16)$$
$$\times\frac{\partial x(P_0(t), t)}{\partial P_0} - M(\tilde{x}, t) \cdot \frac{\partial P(P_0(t), t)}{\partial P_0},$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial P(P_0(t),t)}{\partial P_0}\right]=\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \phi^T(\tilde{x}(t))}{\partial x}\cdot P(P_0(t),t)\right]+\right.$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[P(P_0(t),t)^T\cdot M(\tilde{x},t)\cdot P(P_0(t))\right]-\\ -\frac{\partial^2 L_1(\tilde{x}(t))}{\partial^2 x}\end{matrix}\right]\times$$
$$\times\frac{\partial x(P_0(t),t)}{\partial P_0}+ \tag{17}$$
$$+\left[-\frac{\partial\phi^T(\tilde{x}(t))}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial P}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[P(P_0(t),t)^T\times\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\times M(\tilde{x},t)P(P_0(t),t)\right]\right]\right]\cdot\frac{\partial P(P_0(t),t)}{\partial P_0}$$

с начальными условиями

$$\frac{\partial x(P_0(t_0),t_0)}{\partial P_0}=\tilde{0},\qquad \frac{\partial P(P_0(t_0),t_0)}{\partial P_0}=E. \tag{18}$$

Таким образом, краевая задачи свелась к задаче Коши большой размерности. Ее решение получается интегрированием системы (13), (14), (16), (17) с начальными условиями (15), (18) на интервале от t_0 до t_k. На каждом шаге интегрирования этой системы интегрируется система (11), (12) на отрезке от t_0 до t с изменяющимися от шага к шагу начальными условиями $x_0, P_0(t)$.

Зададим векторную функцию $f(x,u,t)$, скалярную функцию $L_1(x,t)$ и матричные функции $G(x,t)$ и $B(x,t)$. Задача управления динамическим объектом сводится к управлению переменными состояния: скоростью v, углом наклона траектории θ и углом пути ψ таким образом, чтобы обеспечивалось желаемое изменение координат x, y, z объекта [8]:

$$\frac{dx}{dt}=v\cos\theta\cos\psi;\quad \frac{dy}{dt}=v\sin\theta;$$
$$\frac{dz}{dt}=-v\cos\theta\sin\psi. \tag{19}$$

Пусть $X=\begin{bmatrix}x & y & z & v & \theta & \phi\end{bmatrix}^T$ – состояние объекта. Тогда (4) в векторно-матричной форме с линейно входящим управлением примет вид:

$$\frac{dX}{dt}=f(x,u,t)=\begin{bmatrix}v\cos\theta\cos\psi\\ v\sin\theta\\ -v\cos\theta\sin\psi\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{v}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}, \tag{20}$$

где $\begin{bmatrix}v\cos\theta\cos\psi & v\sin\theta & -v\cos\theta\sin\psi & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ – векторная функция $\phi(x,t)$,

$\begin{bmatrix}\dot{v} & \dot{\theta} & \dot{\psi}\end{bmatrix}^T$ – вектор управления u.

$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ – матричная функция G.

Зададим скалярную функцию $L_1(x,t)$ как «функцию потерь» и обозначим $B(x,t)=$ $=\begin{bmatrix}\mu_{\dot{v}}&0&0\\0&\mu_{\dot{\theta}}&0\\0&0&\mu_{\dot{\psi}}\end{bmatrix}$, где $\mu_{\dot{v}}=\frac{1}{\dot{v}_ç^2}$, $\mu_{\dot{\theta}}=\frac{1}{\dot{\theta}_ç^2}$, $\mu_{\dot{\psi}}=\frac{1}{\dot{\psi}_ç^2}$ – известны. Тогда

$$M(x,t)=G(x,t)\,B^{-1}(x,t)\,G^T(x,t)=$$
$$M(x,t)=G(x,t)\,B^{-1}(x,t)\,G^T(x,t)=$$
$$=\begin{bmatrix}0\,0\,0&0&0&0\\0\,0\,0&0&0&0\\0\,0\,0&0&0&0\\0\,0\,0&1/\mu_{\dot{v}}&0&0\\0\,0\,0&0&1/\mu_{\dot{\theta}}&0\\0\,0\,0&0&0&1/\mu_{\dot{\psi}}\end{bmatrix}.$$

Оптимальное управление u_o, доставляющее минимум функционалу (2), определяется из (7):

$$u_o(t)=-B^{-1}G^TP^{-1}(t)=\begin{bmatrix}\frac{-P(4)}{\mu_{\dot{v}}} & \frac{-P(5)}{\mu_{\dot{\theta}}} & \frac{-P(6)}{\mu_{\dot{\psi}}}\end{bmatrix}^T, \tag{21}$$

где $P(t)$ – результат решения краевой задачи (8), (9), которая примет вид:

$$\frac{dx}{dt}=f_1(x,P,t)=\begin{bmatrix}x(4)\cdot\cos(x(5))\cdot\cos(x(6));\\ x(4)\cdot\sin(x(5));\\ x(4)\cdot\cos(x(5))\cdot\sin(x(6));\\ -P(4)/\mu_{\dot{v}};\\ -P(5)/\mu_{\dot{\theta}};\\ -P(6)/\mu_{\dot{\psi}}\end{bmatrix}, \tag{22}$$

$$\frac{dP}{dt}=f(x,P,t)=$$
$$=\begin{bmatrix}-\frac{\partial L_1(x,t)}{\partial x(1)};\\ -\frac{\partial L_1(x,t)}{\partial x(2)};\\ -\frac{\partial L_1(x,t)}{\partial x(3)};\\ -P(1)\frac{\partial\phi(1)}{\partial x(4)}-P(2)\frac{\partial\phi(2)}{\partial x(4)}-P(3)\frac{\partial\phi(3)}{\partial x(4)};\\ -P(1)\frac{\partial\phi(1)}{\partial x(5)}-P(2)\frac{\partial\phi(2)}{\partial x(5)}-P(3)\frac{\partial\phi(3)}{\partial x(5)};\\ -P(1)\frac{\partial\phi(1)}{\partial x(6)}-P(2)\frac{\partial\phi(2)}{\partial x(6)}-P(3)\frac{\partial\phi(3)}{\partial x(6)}.\end{bmatrix} \tag{23}$$

Зададим терминальный член $S_k(x(t_k))$ целевого функционала (2):

$$
\begin{aligned}
&S_k(x(t_k)) = \mu_x(x_{\text{çàä}} - x(t_k))^2 + \\
&+\mu_y(y_{\text{çàä}} - y(t_k))^2 + \mu_z(z_{\text{çàä}} - z(t_k))^2 + \\
&+\mu_v(v_{\text{çàä}} - v(t_k))^2 + \mu_\theta(\theta_{\text{çàä}} - \\
&-\theta(t_k))^2 + \mu_\psi(\psi_{\text{çàä}} - \psi(t_k))^2,
\end{aligned} \qquad (24)
$$

где $\mu_x, \mu_y, \mu_z, \mu_v, \mu_\theta, \mu_\psi$ – известные коэффициенты. Тогда начальные условия для (22), (23) равны:

$$
\begin{aligned}
&t = t_0, \\
&x(t_0) = x_0; \\
&t = t_k,
\end{aligned}
$$

$$
P(t_k) = \begin{bmatrix} -2(x_{\text{çàä}} - x(t_k)) \cdot \mu_x; \\ -2(y_{\text{çàä}} - y(t_k)) \cdot \mu_y; \\ -2(z_{\text{çàä}} - z(t_k)) \cdot \mu_z; \\ -2(v_{\text{çàä}} - v(t_k)) \cdot \mu_v; \\ -2(\theta_{\text{çàä}} - \theta(t_k)) \cdot \mu_\theta; \\ -2(\psi_{\text{çàä}} - \psi(t_k)) \cdot \mu_\psi \end{bmatrix}. \qquad (25)
$$

Краевая задача (22), (23), (25) решается с помощью уравнений (13), (14):

$$
\frac{d\tilde{x}}{dt} =
$$

$$
= \begin{bmatrix}
\sum\limits_{i=1}^{6} \frac{\partial \tilde{x}(1)}{\partial P_0(I)} \cdot \frac{\partial P_0(I)}{dt} + \tilde{\phi}(1); \\
\sum\limits_{i=1}^{6} \frac{\partial \tilde{x}(2)}{\partial P_0(I)} \cdot \frac{\partial P_0(I)}{dt} + \tilde{\phi}(2); \\
\sum\limits_{i=1}^{6} \frac{\partial \tilde{x}(3)}{\partial P_0(I)} \cdot \frac{\partial P_0(I)}{dt} + \tilde{\phi}(3); \\
\sum\limits_{i=1}^{6} \frac{\partial \tilde{x}(4)}{\partial P_0(I)} \cdot \frac{\partial P_0(I)}{dt} - \frac{\mu_v}{\mu_{\dot{v}}}(v_{\text{çàä}} - \tilde{v}(t)) \cdot 2; \\
\sum\limits_{i=1}^{6} \frac{\partial \tilde{x}(5)}{\partial P_0(I)} \cdot \frac{\partial P_0(I)}{dt} - \frac{\mu_\theta}{\mu_{\dot{\theta}}}(\theta_{\text{çàä}} - \tilde{\theta}(t)) \cdot 2; \\
\sum\limits_{i=1}^{6} \frac{\partial \tilde{x}(6)}{\partial P_0(I)} \cdot \frac{\partial P_0(I)}{dt} - \frac{\mu_\psi}{\mu_{\dot{\psi}}}(\psi_{\text{çàä}} - \psi(t_k)) \cdot 2
\end{bmatrix}, \qquad (26)
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\phi}_1 = \tilde{x}(4) \cdot \cos(\tilde{x}(5)) \cdot \cos(\tilde{x}(6)), \\
&\tilde{\phi}_2 = \tilde{x}(4) \cdot \sin(\tilde{x}(5)), \\
&\tilde{\phi}_3 = \tilde{x}(4) \cdot \cos(\tilde{x}(5)) \cdot \sin(\tilde{x}(6));
\end{aligned}
$$

$$
\frac{dP_0(t)}{dt} =
$$

$$
= \begin{bmatrix}
-2\frac{\partial \tilde{x}(1)}{\partial P_0(1)} + \frac{\partial \tilde{P}(1)}{\partial P_0(1)} & \ldots & + -2\frac{\partial \tilde{x}(1)}{\partial P_0(6)} + \frac{\partial \tilde{P}(1)}{\partial P_0(6)} \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
-2\frac{\partial \tilde{x}(6)}{\partial P_0(1)} + \frac{\partial \tilde{P}(6)}{\partial P_0(1)} & \ldots & + -2\frac{\partial \tilde{x}(6)}{\partial P_0(6)} + \frac{\partial \tilde{P}(6)}{\partial P_0(6)}
\end{bmatrix}^{-1} \times
$$

$$
\times \begin{bmatrix}
2\tilde{\phi}(1) + \frac{\partial L_1(\tilde{x})}{\partial x(1)} \\
2\tilde{\phi}(2) + \frac{\partial L_1(\tilde{x})}{\partial x(2)} \\
2\tilde{\phi}(3) + \frac{\partial L_1(\tilde{x})}{\partial x(3)} \\
-2\frac{\mu_v}{\mu_{\dot{v}}}(x_{\text{çàä}}(4) - \tilde{x}(4) + \sum\limits_{i=1}^{3} 2(x(I)_{\text{çàä}} - \tilde{x}(I))\frac{\partial \tilde{\phi}(I)}{\partial x(4)} \\
-2\frac{\mu_\theta}{\mu_{\dot{\theta}}}(x_{\text{çàä}}(5) - \tilde{x}(5) + \sum\limits_{i=1}^{3} 2(x(I)_{\text{çàä}} - \tilde{x}(I))\frac{\partial \tilde{\phi}(I)}{\partial x(5)} \\
-2\frac{\mu_\psi}{\mu_{\dot{\psi}}}(x_{\text{çàä}}(6) - \tilde{x}(6) + \sum\limits_{i=1}^{3} 2(x(I)_{\text{çàä}} - \tilde{x}(I))\frac{\partial \tilde{\phi}(I)}{\partial x(6)}
\end{bmatrix}. \qquad (27)
$$

Начальные условия для (26), (27) имеют вид:

$$
t = t_0,\ X(t_0) = X_0;\ P_0(t_0) = \begin{bmatrix} -2(x(1)_{\text{çàä}} - x_0(1)); \\ -2(x(2)_{\text{çàä}} - x_0(2)); \\ -2(x(3)_{\text{çàä}} - x_0(3)); \\ -2(x(4)_{\text{çàä}} - x_0(4)); \\ -2(x(5)_{\text{çàä}} - x_0(5)); \\ -2(x(6)_{\text{çàä}} - x_0(6)) \end{bmatrix}. \qquad (28)
$$

Матрицы чувствительности для (26), (27) определяются из уравнений (16), (17):

$$
\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \tilde{x}}{\partial P_0}\right] =
$$

$$
= \begin{bmatrix}
\sum\limits_{i=4}^{6} \frac{\partial \tilde{\phi}(1)}{\partial x(I)} \cdot \frac{\partial \tilde{x}(I)}{\partial P_0(1)} & \ldots & -\sum\limits_{i=4}^{6} \frac{\partial \tilde{\phi}(1)}{\partial x(I)} \cdot \frac{\partial \tilde{x}(I)}{\partial P_0(6)}; \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\sum\limits_{i=4}^{6} \frac{\partial \tilde{\phi}(3)}{\partial x(I)} \cdot \frac{\partial \tilde{x}(I)}{\partial P_0(1)} & \ldots & -\sum\limits_{i=4}^{6} \frac{\partial \tilde{\phi}(3)}{\partial x(I)} \cdot \frac{\partial \tilde{x}(I)}{\partial P_0(6)}; \\
-\frac{1}{\mu_{\dot{v}}} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(4)}{\partial P_0(1)} & \ldots & -\frac{1}{\mu_{\dot{v}}} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(4)}{\partial P_0(6)}; \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
-\frac{1}{\mu_{\dot{v}}} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(6)}{\partial P_0(1)} & \ldots & -\frac{1}{\mu_{\dot{v}}} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(4)}{\partial P_0(6)}
\end{bmatrix}, \qquad (29)
$$

$$
\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \tilde{P}(1)}{\partial P_0(J)}\right] = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 L_1(\tilde{x})}{\partial x(1)\partial x(I)} \cdot \frac{\partial \tilde{x}(I)}{\partial P_0(J)},\ J = \overline{1, 6};
$$

$$
\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \tilde{P}(2)}{\partial P_0(J)}\right] = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 L_1(\tilde{x})}{\partial x(2)\partial x(I)} \cdot \frac{\partial \tilde{x}(I)}{\partial P_0(J)},\ J = \overline{1, 6};
$$

$$
\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \tilde{P}(3)}{\partial P_0(J)}\right] = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 L_1(\tilde{x})}{\partial x(3)\partial x(I)} \cdot \frac{\partial \tilde{x}(I)}{\partial P_0(J)},\ J = \overline{1, 6};
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \tilde{P}(4)}{\partial P_0(J)}\right] = -\sum_{k=4}^{6} (\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(I)\tilde{P}(I)}{\partial x(4)\partial x(k)} \cdot \frac{\partial \tilde{x}(k)}{\partial P_0(J)} - \\
&-\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \tilde{\phi}(I)}{\partial x(4)} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(I)}{\partial P_0(J)}),\ J = \overline{1, 6};
\end{aligned}
$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\tilde{P}(5)}{\partial P_0(J)}\right] = -\sum_{k=4}^{6}(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\tilde{\phi}(I)\tilde{P}(I)}{\partial x(5)\partial x(k)}\cdot\frac{\partial\tilde{x}(k)}{\partial P_0(J)} - $$

$$-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\tilde{\phi}(I)}{\partial x(5)}\cdot\frac{\partial\tilde{P}(I)}{\partial P_0(J)}),\ J = \overline{1, 6};$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\tilde{P}(6)}{\partial P_0(J)}\right] = -\sum_{k=4}^{6}(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\tilde{\phi}(I)\tilde{P}(I)}{\partial x(6)\partial x(k)}\cdot\frac{\partial\tilde{x}(k)}{\partial P_0(J)} - \quad (30)$$

$$-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\tilde{\phi}(I)}{\partial x(6)}\cdot\frac{\partial\tilde{P}(I)}{\partial P_0(J)}),\ J = \overline{1, 6},$$

где $\tilde{P}(I) = \dfrac{\partial S_k(\tilde{X})}{\partial X(I)}$;

$$t = t_0,\quad \frac{\partial X(t_0, P_0)}{\partial P_0} = \tilde{0};\quad \frac{\partial P(t_0, P_0)}{\partial P_0} = E. \quad (31)$$

Таким образом, интегрируя (26), (27), (29), (30) с начальными условиями (28), (31) на интервале от t_0 до t_k, получим вектор $P_0(t_k)$. Подставляя его в качестве недостающего начального условия в системе (22), (23), получим решение краевой задачи.

Следовательно, многократно применяя указанную процедуру, сформируем оптимальные маршруты движения (i, j), определим на каждом из них затраты на перемещение динамического объекта из A_i в B_j и минимально возможное значение функционала.

Выводы

Таким образом, разработанный метод синтеза оптимальных траекторий для вывода динамических объектов в заданную точку отличается от известных применением метода продолжения решения по параметру для решения краевых задач с известными левым граничным условием для уравнения движения и правым граничным условием для сопряженной системы. Это позволило свести краевую задачу к задаче Коши большой размерности и в результате сформировать оптимальную траекторию при перемещении объекта из точки A_i в точку B_j с учетом воздействия среды.

Список литературы

1. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М. : Иностр. лит., 1960. – 216 с.

2. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе. – М. : Физматгиз, 1961. – 244 с.

3. Введение в аэроавтоупругость / С. М. Белоцерковский, Ю. А. Кочетков, А. А. Красовский, В. В. Новицкий. – М. : Наука, 1980. – 168 с.

4. Кочетков Ю. А. Оптимальное управление автоматическими системами в случае неквадратичного терминального функционала / Ю. А. Кочетков // Автоматика и техника. – 1977. – № 10. – С. 46–54.

5. Красовский А.А. Системы автоматического управления летательных аппаратов / А.А. Красовский, Ю.А. Вавилов, А.И. Сучков. – М. : ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1986. – 286 с.

6. Кочетков Ю. А. О краевой задаче теории оптимального управления / Ю. А. Кочетков, Б. В. Барков // Научно-технические матер. по математ.у обеспечению БЦВМ в задачах оценивания, управления и идентификации. – М. : ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1986. – С. 94–112.

7. Кочетков Ю. А. Скользящий целевой функционал / Ю. А. Кочетков // Научно-технические материалы по математическому обеспечению БЦВМ в задачах оценивания, управления и идентификации. – М. : ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1986. – С. 126–134.

8. Тарасов В. Г. Основы теории автоматизированных систем управления / В. Г. Тарасов. – М. : ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1988. – 364 с.

Поступила в редколлегию 12.12.2013

Рецензент: д-р техн. наук М. А. Павленко, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

МЕТОД СИНТЕЗУ ОПТИМАЛЬНИХ ТРАЄКТОРІЙ ДЛЯ ВИВОДУ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ В ЗАДАНУ ТОЧКУ

В.М. Ушань

Запропоновано застосування методу продовження рішення за параметром як основи для розробки рішення краєвої задачі. Крайова задача виникла при синтезі методом характеристик оптимального управління динамічним об'єктом. Раніше алгоритми, засновані на продовженні рішення за параметром, застосовувалися тільки для розв'язання крайових задач з фіксованими лівими і правими граничними умовами. Отримано варіант розв'язання двоточкової крайової задачі. В результаті крайова задача звелася до задачі Коші великої розмірності. Запропонований алгоритм включає багатократне інтегрування системи рівнянь з початковими умовами, що змінюються від кроку до.

Ключові слова: *оптимальне управління, оптимальна траєкторія, динамічний об'єкт, крайова задача, метод характеристик, продовження рішення за параметром, гранична умова.*

METHOD OF SYNTHESIS OF OPTIMUM TRAJECTORIES FOR DELIVERY DYNAMIC OBJECTS IN THE SET POINT

V.M. Ushan

Application of method of continuation of decision on a parameter is offered as bases for development of decision of border task. A border task appears at the synthesis by method of descriptions of optimum control of dynamic object. Formerly algorithms, based on continuation of decision on a parameter, were used only for the decision of border tasks with the fixed left and right border conditions. The variant of decision of two-point border task is got. As a result a border task was taken to the Koshi task of large dimension. The offered algorithm plugs in itself repeated integration of the system of equalizations with initial conditions, changing from a step to the step.

Keywords: *optimum control, optimum trajectory, dynamic object, border task, the method of descriptions, continuation of decision on a parameter, border condition.*