УДК 519.85

Т.Е. Романова, А.А. Коваленко

Институт проблем машиностроения НАН Украины, Харьков

PHI-ФУНКЦИИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОГРАНИЧЕНИЙ ВКЛЮЧЕНИЯ В ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ БАЛАНСНОЙ КОМПОНОВКИ

Строится полный класс phi-функций для моделирования отношения включения объектов, имеющих форму цилиндра, параллелепипеда, правильной призмы и шара в цилиндрический, параболоидный контейнер, а также контейнер, имеющий форму усеченного конуса.

Ключевые слова: *3D-объекты, компоновка, математическое моделирование, phi-функция, отношение включения.*

Введение

Оптимизационные задачи компоновки представляют большой интерес в области космической инженерии [1] при размещении оборудования в модульных отсеках космических кораблей и спутников. Задачи оптимальной компоновки относятся к классу NP-сложных задач, для решения которых используются эвристические алгоритмы.

Для разработки эффективных методов решения с привлечением методов локальной и глобальной оптимизации необходимо построение адекватных математических моделей задач рассматриваемого класса.

В основе построения математической модели – аналитическое описание ограничений на непересечение объектов, размещение объектов в области с учетом ограничений механического поведения и ограничений на минимально допустимые расстояния. Как известно [2], наиболее мощным средством аналитического описания отношений геометрических объектов является метод *phi*-функций Стояна [3].

В статьях [4 – 6] предлагаются *phi*-функции для некоторых базовых 3D-объектов. В данной работе строится полный класс *phi*-функций для моделирования отношения включения объектов, имеющих форму цилиндра, параллелепипеда, правильной призмы и шара в цилиндрический, параболоидный контейнер, а также контейнер, имеющий форму усеченного конуса. Рассматриваемые формы объектов и контейнеров выделены, исходя из особенностей задач компоновки оборудования в модульных отсеках космических кораблей и спутников.

Контейнеры

В качестве моделей контейнеров рассматриваются цилиндры, параболоиды и усеченные конусы. (рис. 1)

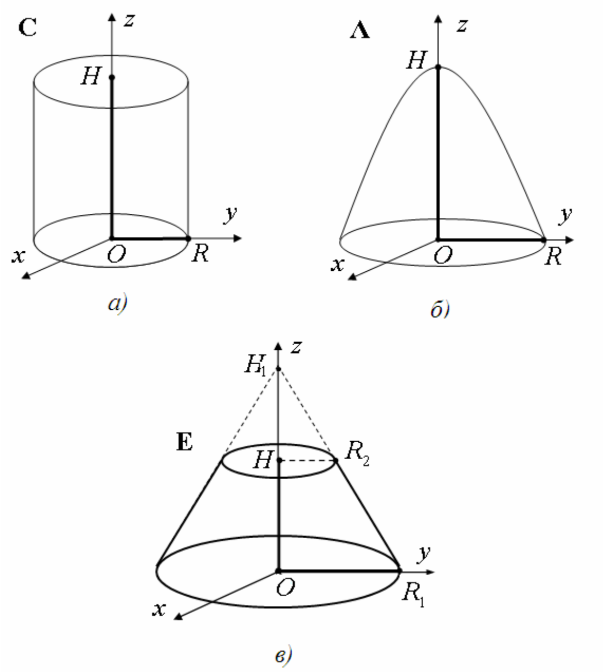


Рис. 1. Модели контейнеров

Пусть $\mathbf{Ñ}$ – контейнер цилиндрической формы с метрическими характеристиками (R, H) (рис. 1, а), где R – радиус основания, H – высота цилинра; Λ – контейнер параболоидной формы с метрическими характеристиками (R, H) (рис. 1, б), где R – радиус основания, H – высота параболоидного контейнера, при этом

$$\Lambda = Q \cap G,$$

$$\mathbf{Q} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -z - x^2 - y^2 + H \geq 0\},$$

$$\mathbf{G} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\};$$

$\mathbf{E}$ – контейнер, имеющий форму усеченного конуса с метрическими характеристиками (R_1, R_2, H) (рис. 1, в), где R_1, R_2 – радиусы нижнего и верхнего оснований, H – высота усеченного конуса, при этом

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \cap G_1 \cap G_2, \quad \mathbf{G}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\},$$

$$\mathbf{G}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -z + H \geq 0\},$$

$$\mathbf{E}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -z - \frac{H_1}{R_1}\sqrt{x^2 + y^2} + H_1 \geq 0\},$$

где
$$H_1 = \frac{R_1 H}{R_1 - R_2},. \qquad (1)$$

Пусть

$$\mathbf{C}^* = \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{int} \mathbf{Ñ}, \quad \Lambda^* = \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{int} \Lambda, \quad \mathbf{E}^* = \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{int} \mathrm{E}.$$

Каждый из объектов $\mathbf{C}^*$, Λ^*, $\mathbf{E}^*$ задан в неподвижной системе координат $\hat{I}xyz$, поскольку контейнеры $\mathbf{C}$, Λ, $\mathbf{E}$ считаются неподвижными. Полюс $\hat{I}$ объектов совпадает с началом их собственной системой координат.

Размещаемые объекты

В качестве размещаемых объектов рассматриваются прямые круговые цилиндры, прямые прямоугольные параллелепипеды, прямые правильные призмы и шары.

Пусть $\mathbb{C}$ – цилиндр с метрическими характеристиками (r, h), где r – радиус основания, h – полувысота; $\mathbb{P}$ – параллелепипед с метрическими характеристиками (w, l, h), где w – полудлина, l – полуширина, h – полувысота; $\mathbb{K}$ – прямая правильная призма с метрическими характеристиками (m, r, h), где r – радиус описанной окружности около правильного *m*-угольника, h – полувысота; а $\mathbb{S}$ – шар радиуса r (рис. 2).

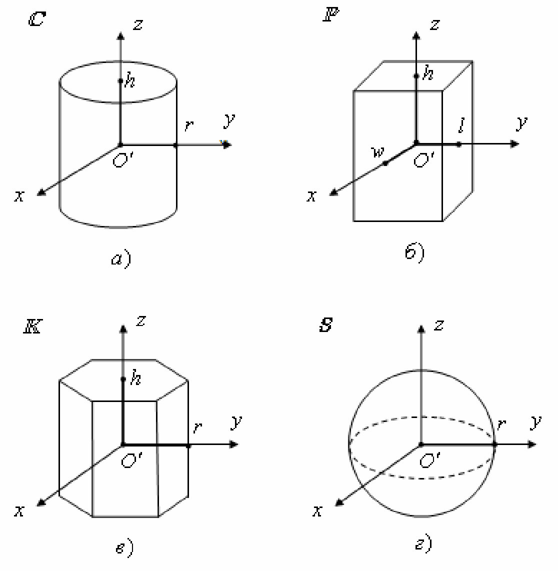


Рис. 2. Размещаемые объекты

Координаты полюса $\hat{I}' = (x, y, z)$ размещаемых объектов $\mathbb{C}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{K}$, $\mathbb{S}$ являются переменными параметрами размещения относительно неподвижной системы $\hat{I}xyz$. Полагаем, что полюс $\hat{I}'$ находится в центре симметрии рассматриваемой фигуры (рис. 2).

Phi-функции

Пусть $A(u_1)$ и $B(u_2)$ – два произвольных 3D-объекта, где $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ – переменные вектора трансляции (параметры размещения), соответственно.

Как известно [3], всюду определенная непрерывная функция называется *phi*-функцией, если выполняются следующие условия:

- $\Phi(u_1, u_2) > 0$, если $A(u_1) \cap B(u_2) = \varnothing$;
- $\Phi(u_1, u_2) = 0$, если
$$\begin{cases} \operatorname{fr}A(u_1) \cap \operatorname{fr}B(u_2) \neq \varnothing \\ \operatorname{int}A(u_1) \cap \operatorname{int}B(u_2) = \varnothing \end{cases};$$
- $\Phi(u_1, u_2) < 0$, если
$$\operatorname{int}A(u_1) \cap \operatorname{int}B(u_2) \neq \varnothing.$$

В терминах *phi*-функции ограничение включения объекта A в контейнер B описывается следующим образом: $\Phi^{AB^*} \geq 0$, где $B^* = \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{int}B$.

Проекция нулевого уровня γ_{12} *phi*-функции Φ^{AB^*} определяется как $\gamma_{12} = \operatorname{fr}(B^*(0) \oplus A(0))$.

Phi-функция для объектов $\mathbf{C}^*$ *и* $\mathbb{S}$ определяется так [4]:

$$\Phi^{\mathbf{C}^*\mathbb{S}} = \min\{\Phi^{C_z^*\tilde{N}}, \xi_1, \xi_2\}, \quad (2)$$

где
$$\xi_1 = z - r, \quad (3)$$
$$\xi_2 = H - z - r, \quad (4)$$
$$\Phi^{\tilde{N}_z^*\tilde{N}} = -x^2 - y^2 + (R - r)^2. \quad (5)$$

Phi-функция для объектов $\mathbf{C}^*$ *и* $\mathbb{C}$ может быть представлена в виде (1) [4], полагая
$$\xi_1 = z - h, \quad (6)$$
$$\xi_2 = H - z - h. \quad (7)$$

Аналогично предыдущему случаю можно построить *phi*-функцию для объектов $\mathbf{C}^*$ *и* $\mathbb{K}$, если описать прямой круговой цилиндр $\mathbb{C}$ около правильной призмы $\mathbb{K}$. Тогда *phi*-функция $\Phi^{\mathbf{C}^*\mathbb{K}}$ может быть определена в виде (2) с учетом равенств (5)-(7).

Phi-функцию для объектов $\mathbf{C}^*$ *и* $\mathbb{P}$ можно определить следующим образом [4]:

$$\Phi^{\mathbf{C}^*\mathbb{P}} = \min\{\xi_1, \xi_2, f_i, i = 1,...,4\}, \quad (8)$$

где ξ_1 и ξ_2 определяются равенствами (6) и (7), а f_i – функции вида

$$f_1 = -(x + w)^2 - (y + l)^2 + R^2,$$
$$f_2 = -(x - w)^2 - (y + l)^2 + R^2,$$
$$f_3 = -(x + w)^2 - (y - l)^2 + R^2,$$
$$f_4 = -(x - w)^2 - (y - l)^2 + R^2.$$

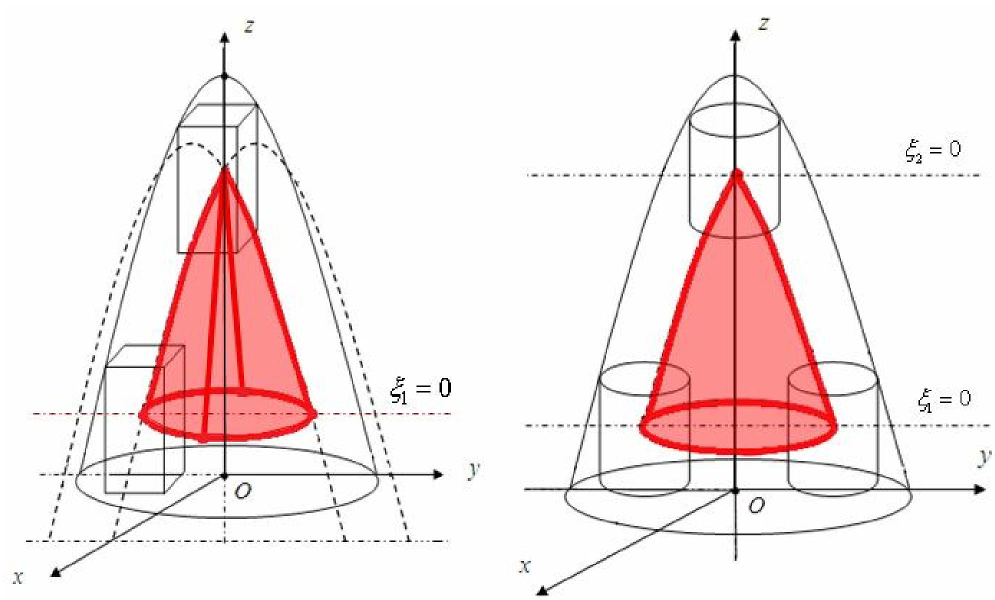
Phi-функцию для объектов Λ^* *и* $\mathbb{P}$ можно определить так:

$$\Phi^{\Lambda^*\mathbb{P}} = \min\{\xi_1, f_i, i = 1,...,4\}, \quad (9)$$

где ξ_1 определяется отношением (6), а f_i – функции:

$$f_1 = -z - (x + w)^2 - (y + l)^2 + H - h;$$
$$f_2 = -z - (x + w)^2 - (y - l)^2 + H - h;$$
$$f_3 = -z - (x - w)^2 - (y + l)^2 + H - h;$$
$$f_4 = -z - (x - w)^2 - (y - l)^2 + H - h.$$

Проекция нулевого уровня для $\Phi^{\Lambda^*\mathbb{P}}$ приведена на рис. 3, а.



а б

Рис. 3. Проекция нулевого уровня γ_{12} *phi*-функции для объектов: а – Λ^* и $\mathbb{K}$ б – Λ^* и $\mathbb{C}$

Phi-функция для объектов Λ^* *и* $\mathbb{C}$ определяется отношением (2), где ξ_1 имеет вид (6), $\xi_2 = H - r^2 - h - z$ (рис. 3, б),

$$\Phi^{\tilde{N}_z^* C} = -x^2 - y^2 + (R_{z*} - r)^2, \qquad (10)$$

$$R_{z*} = \sqrt{\max\{0, H - z - h\}}\,. \qquad (11)$$

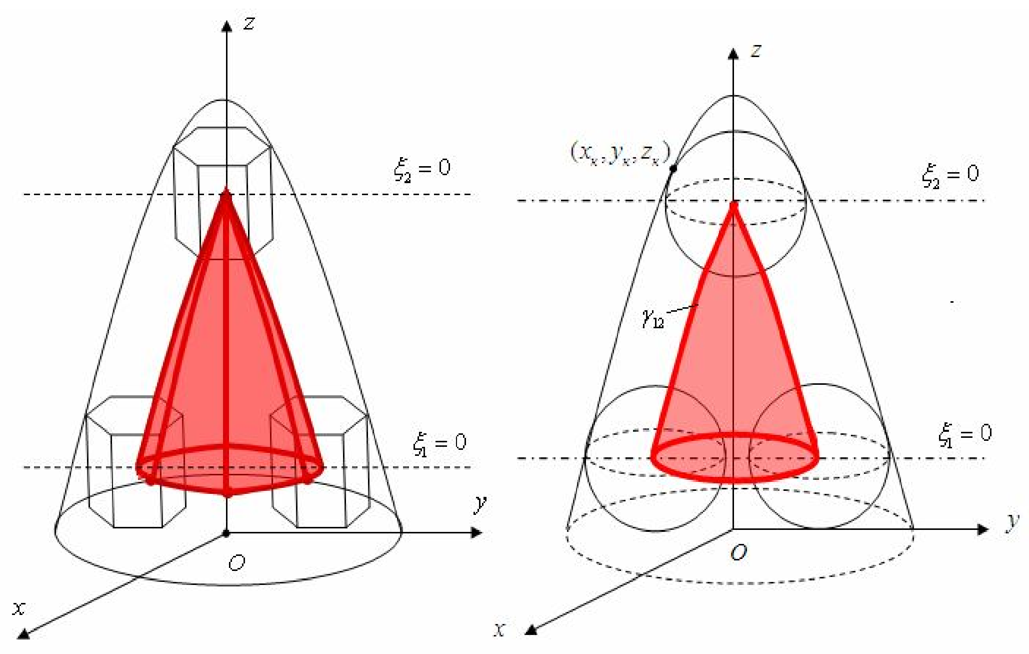
Phi-функция для объектов Λ^* *и* $\mathbb{K}$, как и для случая с *phi*-функцией $\Phi^{\Lambda^*\mathbb{C}}$, может быть описана соотношением (2) с учетом равенств (10), (11), если описать цилиндр $\mathbb{C}$ около призмы $\mathbb{K}$. Проекция нулевого уровня γ_{12} *phi*-функции $\Phi^{\Lambda^*\mathbb{K}}$ изображена на рис. 4, а.

Phi-функцию для объектов Λ^* *и* $\mathbb{S}$ можно определить аналогично, как и *phi*-функцию для объектов Λ^* и $\mathbb{C}$ соотношением (2), полагая

$$\Phi^{\tilde{N}_z^*\tilde{N}} = -x^2 - y^2 + (R_{z*} - r)^2,$$

$$R_{z*} = \sqrt{\max\{0, H - z - r\}}\,,$$

ξ_1 определено в (3), $\xi_2 = -z + H - r^2 - 0.25$ (рис. 4, б)



а б

Рис. 4. Проекция нулевого уровня γ_{12} phi-функции для объектов: а – Λ^* и $\mathbb{K}$; б – Λ^* и $\mathbb{S}$

Phi-функция для объектов $\mathbf{E}^*$ *и* $\mathbb{P}$ описывается соотношением (8), где ξ_1 и ξ_2 определяются равенствами (6) и (7), а функции f_i имеют вид

$$f_1 = -z - \frac{H_1}{R_1}\sqrt{(x+w)^2 + (y+l)^2} + H_1 - h;$$

$$f_2 = -z - \frac{H_1}{R_1}\sqrt{(x+w)^2 + (y-l)^2} + H_1 - h,$$

$$f_3 = -z - \frac{H_1}{R_1}\sqrt{(x-w)^2 + (y+l)^2} + H_1 - h,$$

$$f_4 = -z - \frac{H_1}{R_1}\sqrt{(x-w)^2 + (y-l)^2} + H_1 - h,$$

H_1 определено равенством (1).

Проекция нулевого уровня для *phi*-функции $\Phi^{E^*\mathbb{P}}$ представлена на рис. 5.

Phi-функцию для объектов $\mathbf{E}^*$ *и* $\mathbb{C}$ можно определить соотношением (2), где ξ_1 и ξ_2 соответствуют равенствам (6) и (7),

$$\Phi^{\tilde{N}_z^* C} = -x^2 - y^2 + (R_z - r)^2, \qquad (12)$$

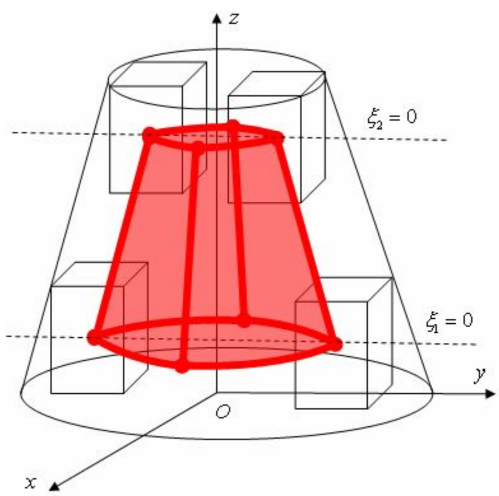


Рис. 5. Проекция нулевого уровня γ_{12} phi-функции для объектов $\mathbf{E}^*$ и $\mathbb{P}$

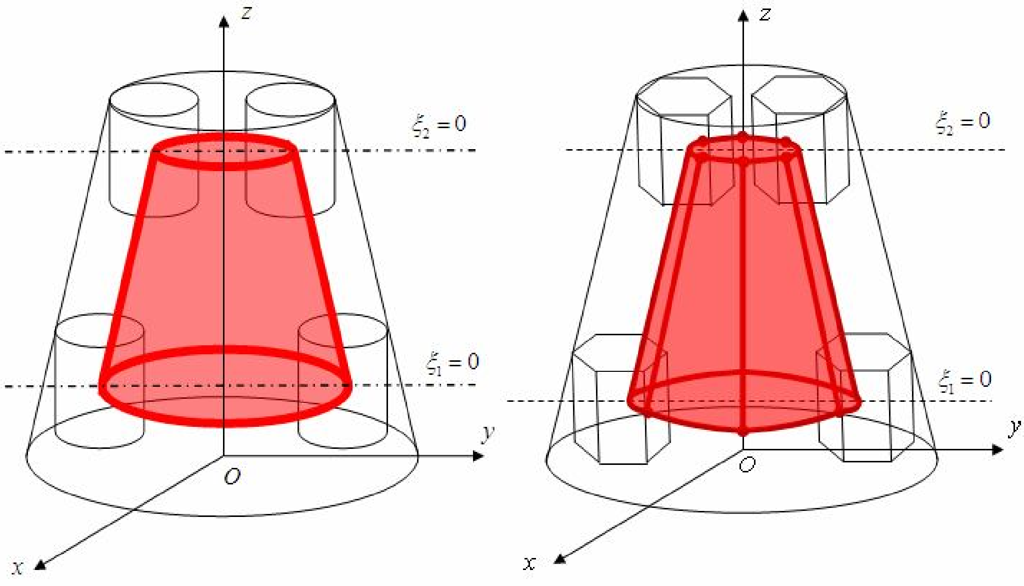
$$R_z = \frac{R_1(H_1 - z)}{H_1}, \qquad (13)$$

а H_1 определено в равенстве (1).

Аналогично, при помощи соотношений (1)-(4), (12), (13) строится *phi*-функция для объектов $\mathbf{E}^*$ и $\mathbb{K}$.

Проекции нулевого уровня для *phi*-функций $\Phi^{\mathbf{E}^*\mathbb{C}}$ и $\Phi^{\mathbf{E}^*\mathbb{K}}$ изображены на рис. 6, а и 6, б соответственно.

Phi-функция для объектов $\mathbf{E}^*$ и $\mathbb{S}$ может быть определена равенствами (1) – (4), (12) – (13). Проекция ее нулевого уровня приведена на рис. 7.



а б

Рис. 6. Проекция нулевого уровня γ_{12} phi-функции для объектов: а – $\mathbf{E}^*$ и $\mathbb{C}$; б – $\mathbf{E}^*$ и $\mathbb{K}$

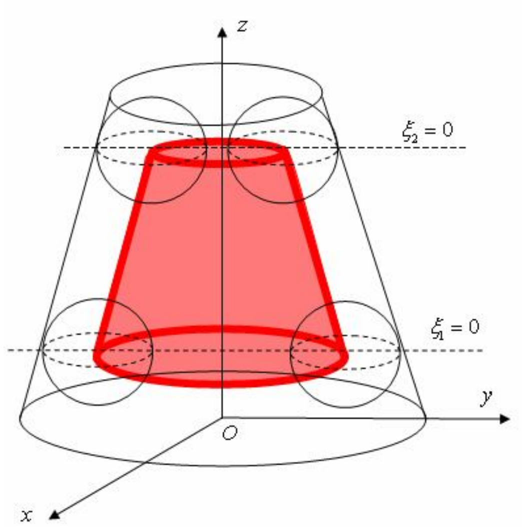


Рис. 7. Проекция нулевого уровня γ_{12} *phi*-функции для объектов: $\mathbf{E}^*$ и $\mathbb{S}$

Выводы

Построенные *phi*-функции вида (2), (8), (9) позволяют описывать ограничения включения в аналитическом виде при построении математических моделей оптимизационных задач компоновки 3D-объектов, для реализации которых можно использовать современные методы математического программирования и негладкой оптимизации.

Список литературы

1. *Fasano G., Pintér J. (2012) Modeling and Optimization in Space Engineering Springer Optimization and Its Applications. Publisher Springer New York. – 404 p.*

2. *Bennell J.A., Oliveira J.F. (2008) The geometry of nesting problems: A tutorial. European Journal of Operational Research 184: - P. 397–415.*

3. *Chernov N., Stoyan Y., Romanova T. (2010) Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem. Computational Geometry: Theory and Applications 43(5). – P. 535-553.*

4. *Scheithauer G., Stoyan Y., Romanova T. (2005) Mathematical modeling of interactions of primary geometric 3D objects. Cybernet. Systems Anal 41. – P. 332-342.*

5. *Semkin V, Chugay A. Phi-function for a sphere segment with a parallelepiped, a cylinder, a sphere and a spherocylinder// Vestnik of Khark. Nat. Univ., - 2012. - No. 4. Series "Mathematical Modeling. Information Technology", 21. - P. 17-22.*

6. *Phi-functions for oriented composed 3D-objects / T. Romanova, B. Rublev, A. Bashuk, V. Sinyavin // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2013. – Вип. 1(108). - С. 175-181.*

Поступила в редколлегию 15.11.2013

Рецензент: д-р техн. наук, доц. В.В. Шляхов, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

PHI-ФУНКЦІЇ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ОБМЕЖЕНЬ ВКЛЮЧЕННЯ В ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧАХ БАЛАНСНОЇ КОМПОНОВКИ

Т.Е. Романова, А.А. Коваленко

Будується повний клас phi-функцій для моделювання відношень включення об'єктів, що мають форму циліндра, паралелепіпеда, правильної призми та шара у циліндричний, параболоїдний контейнер, а також контейнер, що має форму зрізаного конуса.

Ключові слова: *3D-об'єкти, компоновка, математичне моделювання, phi-функція, відношення включення.*

PHI-FUNCTIONS FOR MODELING OF CONTAINMENT CONSTRAINTS IN OPTIMIZATION BALANCE LAYOUT PROBLEMS

T.E. Romanova, A.A. Kovalenko

In order to model containment constraints for layout of cylinders, parallelepipeds, right prisms and spheres into a cylindrical, a parabolic container as well as into a truncated cone in an analytical form we derive a complete class of phi-functions.

Key words: *3D-objects, layout problem, mathematical modeling, phi-function, containment constraints.*