УДК 006.91

И.П. Захаров, Е.А. Климова

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭКСЦЕССОВ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ДОСТОВЕРНОЙ ОЦЕНКИ РАСШИРЕННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рассмотрена методика вычисления расширенной неопределенности с помощью эксцессов входных величин. Проведено сравнение результатов оценивания коэффициента охвата разработанным методом с результатами, полученными методом Монте-Карло.

Ключевые слова: *расширенная неопределенность, коэффициент охвата, метод эксцессов.*

Введение

Одним из недостатков реализации модельного подхода к оцениванию расширенной неопределенности измерений на основе GUM [1], является невозможность учета реального закона распределения измеряемой величины при вычислении коэффициента охвата. В GUM этот коэффициент предлагается рассчитывать как коэффициент Стьюдента для эффективного числа степеней свободы ν_{eff}, определяемого по формуле Велча-Саттерсвейта. При этом, как показано в [2], основным недостатком такого подхода является игнорирование законов распределения вкладов неопределенности типа *B*, которые могут быть доминирующими в бюджете неопределенности.

В книге [3] для суммирования составляющих погрешности предложен метод эксцессов. Однако методика его реализации, описанная в [3], ограничена неисключенными систематическими погрешностями, распределенными только по равномерному, треугольному и нормальному законам; она не позволяет учитывать составляющие случайной погрешности для числа измерений меньше 6 и, кроме того, она является графо-аналитической, что затрудняет ее автоматизацию.

Целью статьи является совершенствование метода эксцессов для получения легко автоматизируемой универсальной методики оценивания расширенной неопределенности для широкого класса распределений типа *B* и любого числа степеней свободы вкладов неопределенности типа *A*.

Основа метода эксцессов

В работе [3] методом функционального анализа доказано, что интеграл свертки, используемый для получения закона распределения суммы нескольких составляющих погрешности измерений можно трансформировать в правило суммирования эксцессов распределений. В терминах концепции неопределенности это правило будет иметь следующий вид:

$$\eta(y)=\frac{\sum_{j=1}^{m}\eta(x_j)u_j^4(y)}{u_c^4(y)}, \quad (1)$$

где $\eta(y)$, $\eta(x_j)$ − эксцессы измеряемой y и j-й входной x_j величин, соответственно; $u_j(y)$ − вклад неопределенности j-й входной величины в неопределенность измеряемой величины; $u_c(y)$ − суммарная стандартная неопределенность, вычисляемая как

$$u_c(y)=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}u_j^2(y)}. \quad (2)$$

Известно также, что существует монотонно-возрастающая зависимость между коэффициентом охвата и эксцессом симметричных распределений (табл. 1, рис. 1, а).

Таблица 1

Значения эксцессов и коэффициентов охвата для различных законов распределений

Закон распределения	Эксцесс η	Коэффициент охвата k для вероятности p	Значение k для $p=0,95$
Арксинусный	-1,5	$\sqrt{2}\sin\frac{p\pi}{2}$	1,40985
Равномерный	-1,2	$p\sqrt{3}$	1,64545
Треугольный	-0,6	$\left(1-\sqrt{1-p}\right)\sqrt{6}$	1,90177
Нормальный	0	$t_p(\infty)$	1,95996

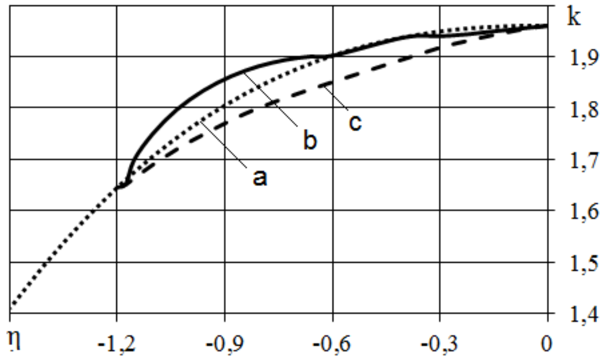

Рис. 1. Зависимости коэффициента охвата k от эксцесса η: a − построенная по данным табл. 1; b – композиция равномерных законов; c – композиция равномерного и нормального законов

Поэтому, зная эксцессы распределений входных величин, можно рассчитать эксцесс результата измерений по формуле (1), а зная общую зависимость $k=\varphi(\eta)$, можно вычислить расширенную неопределенность как

$$U=ku_c(y). \quad (3)$$

Однако при исследовании композиций законов распределений, указанных в табл. 1. стройность этой теории нарушается даже при ограничении оценивания неопределенности составляющими типа В (рис. 1, b, 1, c; рис. 3).

Если же рассмотреть подход к оцениванию неопределенности с учетом составляющих типа А, то в работе [3] предлагается описывать составляющие случайной погрешности законом распределения Стьюдента с числом степеней свободы, для которых эксцесс распределения составляет $\eta_{Ст}=6/(\nu-4)$, а коэффициент охвата рассчитывать по формуле:

$$k_{Ст}=t_{0,95}(\nu)\cdot\sqrt{(\nu-2)/\nu}. \quad (4)$$

Как видно из приведенных формул, такой подход возможен только при числе измерений больше пяти, кроме того, как показывают расчеты, применение формулы (4) приводит к недостоверным оценкам неопределенности измерений.

Исследование композиций законов распределений вкладов типа *B*

На практике применяются чаще всего законы распределения, указанные в табл. 1. Ниже приведено исследование композиций этих законов распределений в разных сочетаниях с целью получения достоверной зависимости $k=\varphi(\eta)$.

Композиция равномерных законов распределения. При наличии двух вкладов неопределенности u_1 и $u_2=\alpha u_1$, распределенных равномерно, их суммарная стандартная неопределенность равна

$$u_{тр}=\sqrt{u_1^2+u_2^2}=u_1\sqrt{1+\alpha^2},$$

а композиция их законов распределения имеет вид равнобедренной трапеции (рис. 2), изменяющейся от прямоугольника (при α=0) до треугольника (для α=1).

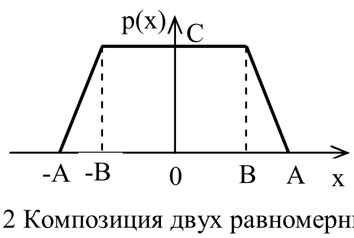

Рис. 2 Композиция двух равномерных законов распределения

Эксцесс такого распределения, вычисленный по формуле (1) определяется выражением:

$$\eta_{тр}=-1,2\frac{1+\alpha^4}{\left(1+\alpha^2\right)^2}.$$

Характерные точки A, B и C на рис. 2 равны:

$$A=\sqrt{3}(1+\alpha)u_1\,;\ B=\sqrt{3}(1-\alpha)u_1\,;$$

$$C=1\Big/\left[2\sqrt{3}(1+\alpha)u_1\right].$$

Как показывают расчеты, коэффициент охвата для такого распределения для вероятности 0,95 будет иметь вид:

$$k_{тр}=\sqrt{3}\,\frac{1+\alpha-\sqrt{0,2\alpha}}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,. \qquad (5)$$

Зависимость $k=\varphi(\eta)$ для этого закона распределения изображена на рис. 1, b.

При наличии m равномерных законов распределений с одинаковой неопределенностью, их коэффициенты охвата и эксцессы приведены в табл. 2. и на рис. 1, b.

Таблица 2

Значения эксцессов и коэффициентов охвата для композиции m равномерных законов распределений

m	Эксцесс η	Формула для коэффициента охвата k для вероятности p	Значение k для $p=0,95$
2	-0,6	$\left(1-\sqrt{1-p}\right)\sqrt{6}$	1,90177
3	-0,4	$3-2\sqrt[3]{3(1-p)}$	1,93734
4	-0,3	$\sqrt{3}\left(2-\sqrt[4]{12(1-p)}\right)$	1,93970
5*	-0,24	–	1,94247
6*	-0,2	–	1,9453
7*	-0,1714	–	1,9476

* *расчеты значений k выполнялись методом Монте-Карло*

Композиция нормального и равномерного законов распределения. При наличии двух вкладов неопределенности, один из которых ($u_н$) распределен нормально, а другой ($u_р=\alpha u_н$) – равномерно, их суммарная стандартная неопределенность равна

$$u_{нр}=\sqrt{u_н^2+u_р^2}=u_н\sqrt{1+\alpha^2}\,,$$

а композиция их законов распределения имеет вид [4]:

$$f(x)=\frac{1}{2\alpha u_н^2\sqrt{6\pi}}\int\limits_{-\alpha u_н\sqrt{3}}^{\alpha u_н\sqrt{3}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}dy\,. \qquad (6)$$

Как показано в работе [4], значение интегральной функции распределения в точке расширенной неопределенности $U_{нр}$ для вероятности 0,95, равно:

$$F_{нр}(U_{нр})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\alpha u_н^2\sqrt{6\pi}}\int\limits_0^{U_{нр}}\int\limits_{-\alpha u_н\sqrt{3}}^{\alpha u_н\sqrt{3}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}dydx=0,975\,.$$

Из этого выражения методом последовательного приближения было вычислено значение $U_{нр}$, а затем и $k_{нр}=U_{нр}/u_{нр}$. Эксцесс такого распределения, исходя из формулы (1) определяется выражением:

$$\eta_{нр}=-1,2\frac{\alpha^4}{\left(1+\alpha^2\right)^2}\,.$$

Зависимость $k_{нр}$ от $\eta_{нр}$ показана на рис. 1, c.

Композиции арксинусного закона распределения. Арксинусный закон распределения встречается как в практике угловых измерений, так и при измерениях на переменном (синусоидальном) токе, поэтому возможность его наличия необходимо учитывать при составлении методики оценивания неопределенности измерений. Ниже будут рассмотрены результаты исследования коэффициента охвата для композиция арксинусного закона распределения с законом распределения второго вклада, имеющего либо арксинусный ($k_{аа}$), либо равномерный ($k_{ар}$), либо нормальный ($k_{ан}$) закон распределения. При этом если неопределенность арксинусного вклада составляла u_{a1}, а второго вклада – $u_2=\alpha u_{a1}$, то суммарная стандартная неопределенность этих вкладов равна

$$u_c=u_{a1}\sqrt{1+\alpha^2}\,.$$

Эксцессы композиций двух арксинусных законов распределения ($\eta_{аа}$), арксинусного с равномерным ($\eta_{ар}$) и арксинусного с нормальным ($\eta_{ан}$), вычислялись, соответственно, по формулам:

$$\eta_{аа}=-1,5\frac{1+\alpha^4}{\left(1+\alpha^2\right)^2}\,;\ \eta_{ар}=\frac{-1,5-1,2\alpha^4}{\left(1+\alpha^2\right)^2}\,;$$

$$\eta_{ан}=\frac{-1,5}{\left(1+\alpha^2\right)^2}\,.$$

Методом Монте-Карло [5] были проведены расчеты зависимости коэффициентов охвата от эксцессов распределения. Результаты этих расчетов представлены на рис. 3.

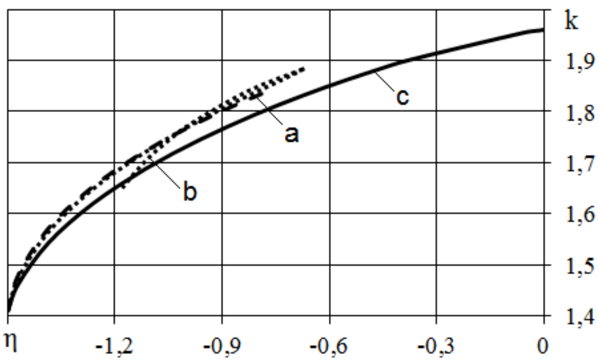

Рис. 3. Зависимости коэффициента охвата k от эксцесса η композиции арксинусного и: a – арксинусного; b – равномерного; c – нормального законов распределения

Учет вкладов неопределенности типа *A*

Будем рассчитывать параметры вкладов неопределенности типа *A* из расчета, что закон распределения случайной погрешности – нормальный. Тогда эксцессы распределения для вкладов типа А будут равны нулю. Кроме того, стандартные неопределенности этих вкладов будем вычислять с поправкой на коэффициент надежности [5], который при малом числе измерений n равен:

$$h = t_p(\nu)/t_p(\infty), \quad (7)$$

где $t_p(\nu)$ − коэффициент Стьюдента для числа степеней свободы $\nu = n-1$ и уровня доверия p. Для $p = 0,95$ значения коэффициента надежности приведены в табл. 3.

Таблица 3

Значения коэффициента надежности h для числа измерений n

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h	6,483	2,195	1,624	1,417	1,312	1,248	1,206	1,177	1,154

Поскольку для составляющих типа *В* число степеней свободы принимается равным ∞, то коэффициент надежности для них будет равен 1.

Аппроксимация зависимости коэффициента охвата от эксцесса результирующего распределения

Поскольку, как видно из рис. 1 и 3, нет однозначной зависимости между коэффициентом охвата и эксцессом распределения, будем искать аппроксимирующую зависимость $k = \varphi(\eta)$, обеспечивающую минимальную систематическую погрешность оценивания неопределенности измерений для всех возможных практических случаев.

Таковой оказалось выражение

$$k = 0,1085\eta^3 + 0,1\eta + 1,96, \quad (8)$$

которое обеспечивает аппроксимацию приведенных выше зависимостей с относительной погрешностью не более ±2,5 %, а без учета арксинусного закона – не более ±1,3 %.

Проверка точности этой формулы с учетом неопределенностей типа *А* осуществлялась методом Монте-Карло путем моделирование композиций законов распределения Стьюдента с числом степеней свободы от 2 до 10 и равномерного, нормального или арксинусного законов распределения для составляющих типа *В*. Коэффициент α при этом изменялся от 0,1 до 10.

Расчеты показали, что максимальная относительная погрешность использования формулы (8) не превысила ±2,5 %, для всех законов распределения, чисел степеней свободы и значений α.

Бюджет неопределенности с учетом эксцессов распределений

Бюджет неопределенности, учитывающий законы распределения вкладов типа В и легко подвергающийся автоматизации в программе Excel будет иметь вид, приведенный в табл. 4. По сравнению с бюджетом неопределенности, используемым при оценивании неопределенности в соответствии с методикой GUM, он имеет дополнительный столбец с эксцессами вкладов распределений η_j, которые задаются исходя из табл. 1.

Значение эксцесса измеряемой величины (суммарного эксцесса) η_c вычисляется по формуле (1) с учетом формулы для оценивания суммарной стандартной неопределенности (2), в которых не учитывается коэффициенты надежности, значение коэффициентов надежности – по формуле (7), а суммарная стандартная неопределенность вычисляется с учетом коэффициентов надежности, т.е. по формуле

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} c_j^2 h_j^2 u^2(x_j)}. \quad (9)$$

Коэффициент охвата вычисляется по формуле (8), а расширенная неопределенность – по формуле (3).

Таблица 4

Бюджет неопределенности с эксцессами распределений

Входные величины	Значения входных величин	Стандартные неопределенности входных величин	Эксцессы распределения входных величин	Число степеней свободы	Коэффициенты чувствительности	Вклады неопределенности
X_1	x_1	$u(x_1)$	η_1	ν_1	c_1	$h_1c_1u(x_1)$
X_2	x_2	$u(x_2)$	η_2	ν_2	c_2	$h_2c_2u(x_2)$
…	…	…	…	…	…	…
X_m	x_m	$u(x_m)$	η_m	ν_m	c_m	$h_mc_mu(x_m)$
Измеряемая величина	Результат измерения	Суммарная стандартная неопределенность $u_c(y)$	Эксцесс распределения измеряемой величины η_c	Уровень доверия	Коэффициент охвата k	Расширенная неопределенность U
Y	y	(9)	(1), (2)	0,95	(8)	(3)

Выводы

1. Усовершенствован метод эксцессов для оценивания неопределенности измерений с учетом законов распределения вкладов неопределенности типа *В* и коэффициентов надежности для вкладов неопределенности типа *А*. Исследована погрешность применения оценки коэффициента охвата на основе

эффективного числа степеней свободы для оценивания расширенной неопределенности.

2. С помощью ММК была исследована погрешность применения предложенной методики. Показано, что максимальная относительная погрешность использования предлагаемой методики не превысила ±2,5 %, для всех законов распределения, чисел степеней свободы от 2 до 10 и соотношений между вкладами неопределенности от 0,1 до 10.

3. Предложен бюджет неопределенности, позволяющий легко учитывать законы распределения вкладов типа *B*, число степеней свободы вкладов типа *A* и являющийся основой автоматизации оценивания неопределенности при построении программного средства в программе Excel.

Список литературы

1. *ГОСТ Р 54500.3−2011/Руководство ИСО/МЭК 98-3:2008 «Неопределенность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности измерения». − М.: ФГУП «Стандартинформ», 2012. − 101 с.*

2. *Захаров И.П. Получение достоверной оценки коэффициента охвата при составлении бюджета неопределенности измерений / И.П. Захаров, Е.А. Климова, Т.В. Чунихина // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2013. – Вип. 3 (110). – С. 41 – 44.*

3. *Тойберт П. Оценка точности результатов измерений / П. Тойберт. М.: Энергоатомиздат, 1988. – 88 с.*

4. *Rabinovich S.G. Evaluating Measurement Accuracy. A Practical Approach. Second Edition / S.G. Rabinovich. – NY: Springer, 2013. – 313 p.*

5. *Захаров И.П. Применение метода Монте-Карло для оценивания неопределенности в измерениях / И.П. Захаров, С.В. Водотыка // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2008. – Вип. 4 (71). – С. 34 – 37.*

6. *ISO 14253-2:1999 Geometrical Product Specifications (GPS) - Inspection by measurement of workpieces and measuring equipment - Part 2: Guide to the estimation of uncertainty in GPS measurement, in calibration of measuring equipment and in product verification.*

Поступила в редколлегию 2.04.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Руженцев, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ЕКСЦЕСІВ ДЛЯ ОТРИМАННЯ ДОСТОВІРНОЇ ОЦІНКИ РОЗШИРЕННОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

І.П. Захаров , Е.А. Климова

Розглянуто методику розрахунку розширеної невизначеності. Проведено порівняння результатів оцінювання розширеної невизначеності вимірювань розробленим методом з результатами, отриманими методом Монте -Карло.

Ключові слова: *розширена невизначеність, коефіцієнт покриття, метод ексцесів.*

APPLICATION OF EXCESS METHOD TO OBTAIN RELIABLE ESTIMATE OF EXPANDED UNCERTAINTY

I.P. Zakharov, K.A Klimova

A method of expanded uncertainty calculating is described. The results of coverage factor evaluation by the instrumentality of developed method with the results obtained by Monte Carlo simulation are compared.

Keywords: *extended uncertainty, coverage factor, excess method.*