УДК 531.1

Л.А. Поспєлов[1], С.С. Лапта[2]

[1] *Національний технічний університет "ХПІ", Харків*
[2] *Українська інженерно-педагогічна академія, Харків*

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ ПІДХІД ДО МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ ГОМЕОСТАТИЧНИХ СИСТЕМ З ЛОКАЛЬНОЮ ІНЕРЦІЙНІСТЮ

Стаття присвячена розвитку теорії математичного моделювання реальних складних систем з недостатньою структурованістю, які мають гомеостатичну властивість з локальною післядією, на прикладі найбільш дослідженої на концептуальному рівні фізіологічної системи регуляції вуглеводного обміну. Запропоновано новий підхід, який відрізняється тим, що структурна ідентифікація складної гомеостатичної системи проводиться у функціональному аспекті. Отримано нові математичні моделі, поліпшені методи й засоби математичного комп'ютерного моделювання, а також обчислювальні методи.

Ключові слова: *гомеостаз, математичні моделі.*

Вступ

Поширеність у різних областях природи, техніки й суспільних відносин складних динамічних систем, найбільш важливою властивістю яких є гомеостатичне самозбереження рівноважного стану, обумовила актуальність їх ефективного математичного опису [1, 2]. Однак у більшості випадків детальне структурування таких систем або недосяжно на сучасному рівні розвитку науки, або є просто недоцільним. При цьому обидва запропонованих до останнього часу підходи до їх математичного моделювання виявилися незадовільними: поверхневий функціональний – є недостатнім для рішення багатьох теоретичних і практичних задач, номінально змістовний структурно функціональний – неефективний внаслідок гіпотетичності й громіздкості. Тому виникла проблема розробки нового підходу до математичного моделювання гомеостатичних систем, у певному сенсі проміжного між цими двома підходами, який, мабуть, дозволить об'єднати їхні переваги й мінімізує їх недоліки.

Аналіз літературних джерел. Зараз серед різноманітних гомеостатичних систем найбільш вивченою на концептуальному рівні, найбільш зручною й доступною для експериментального дослідження, перевірки теоретичних висновків є фізіологічна система регуляції вуглеводного обміну [1 – 3]. Тому більшість із дотепер запропонованих математичних моделей гомеостатичних систем була розроблена саме в цій області. При цьому всі вони виявилися обмежено адекватними, як у відтворенні динаміки експериментальних даних, так і у відсутності у них інваріантості щодо характеру виведення системи з рівноважного стану.

Мета роботи. У зв'язку з вищевикладеним уявляється доцільною така постановка задачі дослідження: розвиток теорії математичного моделювання гомеостатичних систем на прикладі найбільш вивченої на концептуальному рівні фізіологічної системи регуляції вуглеводного обміну, націлений на одержання принципово нових видів математичних моделей, на вдосконалення методів і засобів математичного комп'ютерного моделювання, а також обчислювальних методів, що крім безсумнівної безпосередньої актуальності в науковому й у технічному відношенні в перспективі має значно більше широкий спектр можливих науково-технічних застосувань.

Матеріали, методи й результати дослідження

Саморегуляція гомеостатичної системи полягає у наявності у ній стійкого рівноважного стану й у прагненні повернення до нього після припинення дії збурюючи впливів, які виводять її з нього. При цьому характер цього стійкого рівноважного стану системи й фактори, що приводять її до нього, можуть бути різними: добре відомими або ще не цілком вивченими. Крім того, система з саморегуляцією може бути замкнутою, ізольованою від зовнішнього середовища після впливу збурювання, і відкритою, безперервно пов'язаною з навколишнім простором речовинними й енергетичними потоками. У першому випадку рівноважний стан у системі визначається тільки її внутрішніми факторами, у другому – він є результатом динамічної рівноваги різних протилежно спрямованих внутрішніх процесів і зовнішніх потоків.

У випадку, якщо склад і структура системи з саморегуляцією, а також закони функціонування її елементів вичерпно відомі, у принципі можливим є її повний аналітичний інтегрально-синтетичний опис, з якого, зокрема, має випливати і її властивість саморегуляції. Однак для дуже складних технічних систем такий детальний опис є обтяжливим і недоцільним. Ще більш проблемної є ситуація у фізіології, в екології й в економіці, де елементарні закони ще не досить досліджені й тому носять гіпотетичний характер. Більше того, навіть склад такої системи може бути не цілком деталізований. Безвідносно даних розходжень загальним для всіх цих систем з саморегуляцією є сама властивість саморегуляції. Вона полягає в тому, що динаміка повернення системи до деякого стабільного рівноважного її стану визначається її ж поточним станом, точніше його відхиленням від цього рівноважного стану.

При цьому характер перехідного процесу повернення динамічної системи до рівноважного стану може бути монотонним, аперіодичним або осциляційним. Осциляційний перехідний процес, який має велике пізнавальне й практичне значення, давно привертає увагу дослідників. Він знайшов широке застосування у різних технічних пристроях, насамперед, у вигляді механічного маятника й у вигляді радіотехнічного коливального контуру. Системи з саморегуляцією з осциляційним поверненням до рівноважного стану зустрічаються часто у техніці (зокрема в системах автоматичного керування), в екології, в економіці, а також й у фізіології [4].

Як випливає зі спостережень, осциляційний перехідний процес повернення системи з саморегуляцією до рівноважного стану після припинення дії зовнішніх збурюючих факторів, у свою чергу, може бути двох принципово різних видів (рис. 1, 2).

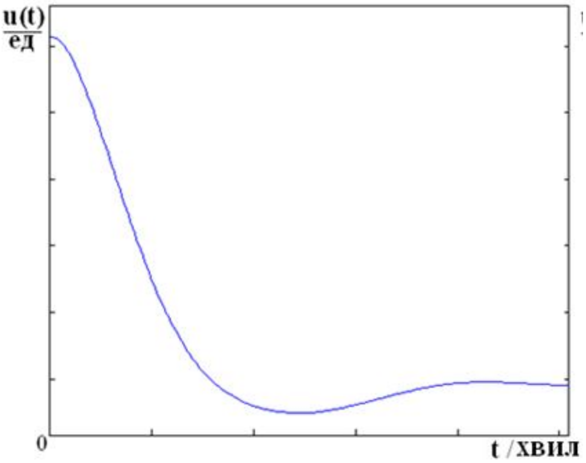

Рис. 1. Перехідний процес повернення системи до рівноважного стану механічного (електричного) осцилятора із загасанням

У першому випадку, який спостерігається у простих механічних і електричних осциляційних систем, протягом усього перехідного процесу його крива відхилення від рівноважного стану близька до синусоїди з експоненціально убутною амплітудою (рис. 1). У другому випадку, властивому складним гомеостатичним системам (рис. 2), характер кривої комбінований: із часом і зменшенням відхилення від рівноважного стану він поступово змінюється від виключно експоненціально убутного до осциляційно убутного.

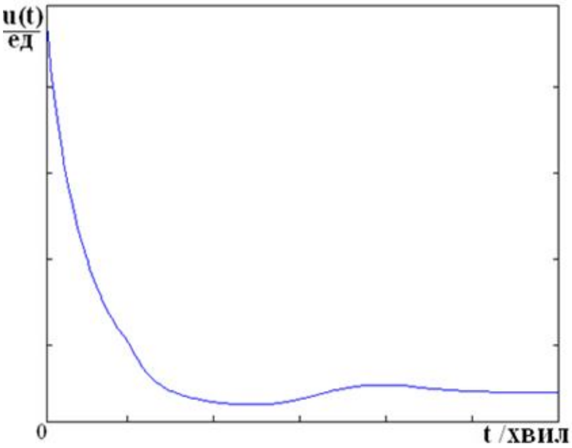

Рис. 2. Перехідний процес повернення системи до рівноважного стану механічного (електричного) осцилятора із загасанням

Слабкі осциляції рівня зберігаємої змінної, що спостерігаються при гомеостатичній саморегуляції (рис. 2), означають деяку інерційність її механізму. Вона приводить до того, що динаміка наближення цієї змінної до рівноважного стану визначається її неузгодженістю з ним, але не в даний поточний момент часу, а трохи раніше. Характер такої інерційності може бути, взагалі, різним: локальним і інтегральним. У першому випадку динаміка зміни рівня зберігаємої змінної u(t) у поточний момент часу t залежить від її ж значення у деякій попередній момент часу, який був на τ хвилин раніше, що аналітично можна записати рівнянням для її відхилення $y(t) = u(t) - u_0$ від рівноважного рівня u_0 з урахуванням зовнішнього надходження зберігаємої змінної з інтенсивністю f(t):

$$dy/dt = -ky(t-\tau) + f(t), \quad t \geq 0 .$$

Це рівняння є диференціально-різницевим рівнянням із запізненням аргументу. На часовому проміжку $-\tau \leq t < 0$ воно потребує для однини розв'язку, так званої, початкової функції $\phi(t)$, яку для спрощення покладемо рівною нулю.

Тобто у випадку локальної інерційності механізму саморегуляції рівня зберігаємої змінної (локальної післядії) відповідна мінімальна математична модель має вигляд диференціального рівняння 1-го порядку із запізнюванням, яке, як відомо [5], може мати осциляційне рішення, Його графік представлений на рис. 2.

Можливо, що характер інерційності механізму саморегуляції рівня зберігаємої змінної більше складний – інтегральний (інтегральна післядія) [6]. Тоді динаміка зміни рівня цієї змінної в поточний момент часу t залежить від всіх його попередніх значень протягом цілого часового інтервалу [a, t]:

$$\frac{dy}{dt} = -\int_a^t g(s)y(s)ds - ky(t) + f(t)\,, \quad (1)$$

де a<t – деяке число, g(s) – позитивна функція свого аргументу.

Рівняння (1) є інтегро-диференціальним рівнянням. Узявши від нього похідну по t, одержимо звичайне диференціальне рівняння 2-го порядку, осциляційне рішення якого має графік вигляду, показаного на рис. 1.

Післядія, що приводить до інерційності, може бути, взагалі, і більш складною, наприклад подвійною:

$$\frac{dy}{dt} = -\int_b^t ds \int_c^s v(z)y(z)dz - \int_a^t g(s)y(s)ds - ky(t) + f(t),$$

потрійною тощо. Відповідне їй звичайне диференціальне рівняння динаміки гомеостатичної саморегуляції (її мінімальна математична модель) при цьому буде мати третій, четвертий порядок тощо.

Відомо, що традиційна модель коливань – диференціальне рівняння 2-го порядку, у принципі, може мати рішення, як экспоненціально убутного, так і синусоїдально убутного вигляду. Однак зміна його характеру вимагає зміни значень параметрів моделі, що приводить до її обмеженої локальної адекватності. З іншого боку, .зі змістовних міркувань в екології, економіці й фізіології немає ніяких підстав для порядку цієї моделі вище, ніж першого [7 – 10]. Крім того, експериментальні дані свідчать про наявність деякого запізнювання в роботі системи гомеостатичної саморегуляції.

До останнього часу перехідні процеси в складних системах при їх функціональному моделюванні на рівні "чорної шухляди" намагалися описувати у класі звичайних диференціальних рівнянь та їх систем. Зокрема, властиві їм осциляції звичайно описували динамічними моделями 2-го порядку. При цьому або свідомо одержували обмежено адекватні моделі, або для виправлення цього підвищували ступінь диференціальних рівнянь відповідно застосуванню формальних методів апроксимації або структурно-функціонального підходу з неодмінною гіпотетичністю й надмірним рівнем деталізації, неадекватними можливостям експериментальної перевірки й методів ідентифікації параметрів моделей.

Таким чином, обидва відомі до останнього часу підходи до математичного моделювання складних гомеостатичних систем виявилися незадовільними. Тому виникла проблема усунення їхніх недоліків шляхом проведення змістовної структурної ідентифікації відповідних моделей у новому класі рівнянь, властивим гомеостатичним системам.

Відповідно до зазначених факторів була запропонована нова модель динаміки гомеостатично зберігаємої змінної у вигляді диференціального рівняння 1-го порядку із запізнілим аргументом, у якому участь у її регуляції всіх проміжних факторів враховано побічно через її ж значення:

$$y'(t) = (1-\alpha) f(t) - a_1^- \operatorname{Es}\left(y\left(t-\tau^-\right)\right) +$$
$$+a_1^+ \operatorname{Es}\left(-y\left(t-\tau^+\right)\right) - k_1 \operatorname{Es}\left(u\left(t-\delta\right) - u_{\text{пор}1}\right) -$$
$$-k_2 \operatorname{Es}\left(u\left(t-\delta\right) - u_{\text{пор}2}\right),\ t \ge 0;$$
$$y(t) = \phi(t), \quad -\tau \le t < 0\ ,$$

де α, $a_1^{\mp}$, $k_{1,2}$ – деякі числові параметри, що мають змістовний сенс, $\tau^{\mp}$, δ – час запізнювання, $u_{\text{пор}1,2}$ – деякі граничні рівні, Es(z)=ze(z) – гранична функція, причому e(z) – одинична функція Хевісайда.

Досі до чисельного аналізу таких рівнянь із запізнюванням застосовували ті ж методи, що й до звичайних диференціальних рівнянь. При цьому лише збільшувалися відомі проблеми збіжності й стійкості їхніх рішень. Замість зусиль з їх подолання ці проблеми були усунуті за рахунок використання наявного запізнювання й застосування числового аналога на сітці методу кроків, відомого раніше для одержання аналітичного рішення цих рівнянь.

Структура запропонованої моделі дозволяє проведення її параметричної ідентифікації із практично точним відтворенням динаміки гомеостатично зберігаємої змінної, показаної на рис. 2. Виявилося, що гірша, однак достатня для практики адекватність цієї моделі зберігається навіть при її спрощенні шляхом підвищення ступеня її агрегації.

Була проведена змістовна конкретизація математичної моделі гомеостатичної саморегуляції для фізіологічної системи регуляції вуглеводного обміну. Відомо, що у функціонуванні цієї регуляційної системи, що гомеостатично підтримує рівень глюкози в крові на рівноважному рівні, беруть участь безліч фізіологічних факторів, детально описати які не представляється можливим. Тому для математичного опису такої системи природним є рівень загальної математичної моделі саморегуляції гомеостатично зберігаємої змінної виходу, всім елементам і структурі якої був доданий змістовний сенс. Для цього був застосований компартментно-функціональний підхід, відповідно до якого замість безперспективних спроб опису багатофункціональних органів організму з урахуванням їх морфології й тонкої структури моделюються тільки процеси, що забезпечують гомеостатичні властивості, з виділенням серед них головних, визначальних факторів і фізіологічних змінних, доступних для виміру.

Із всіх характеристик вуглеводного обміну, які представляють діагностичний інтерес, зараз дійсно доступним для виміру у клінічних умовах є лише рівень глікемії на периферії [10]. Тому спочатку в моделі вуглеводного обміну доцільно було обмежитися тільки цією змінною виходу, передбачаючи при подальшій поетапній декомпозиції й ускладненні моделі виділення в явному вигляді й ендогенного інсуліну, вимір якого зараз є проблематичним, але у принципі можливим.

При цьому, ігноруючи складність кровоносної системи й неоднорідність розподілу в ній глюкози й інсуліну, її доцільно розглядати як єдиний компартмент із їх значеннями в ньому такими, якими вони у дійсності є тільки на периферії, і записати рівняння балансу для них для всього компартменту. При такому підході, однак, ураховуються всі потоки глюкози й інсуліну в компартмент крові й з нього: зовнішні, які збуджують систему регуляції рівня глюкози й виводять її зі стану динамічної рівноваги, і внутрішні, які гомеостатично приводять до нього.

Із цією моделлю були проведені докладні чисельні експерименти. Вона вперше відтворила цілком усю часову залежність рівня глюкози в крові при будь-якому глюкозному й інсуліновому навантаженні. Числові параметри запропонованої моделі ідентифікуються .відповідно до клінічних даних пацієнта, що обстежується. Вони мають фізіологічний сенс і характеризують процеси саме в нього. Відхилення їх значень від норми несуть нову діагностичну інформацію, яку можна використати в медицині при вирішенні широкого кола завдань діагностики й терапії цукрового діабету.

Висновки

У класі математичних моделей із саморегуляцією за параметром з післядією локального типу розроблена конкретна змістовна модель фізіологічної системи регуляції вуглеводного обміну. На її основі побудовані алгоритми, реалізовані у вигляді програмних модулів, які розв'язують актуальні питання клінічної медицини з діагностики й терапії цукрового діабету.

Список літератури

1. Харди Р. Гомеостаз: Пер. с англ. / Р. Харди. – М.: Мир, 1986. – 81 с.

2. Гомеостатика живого, технических, социальних и экологических систем: Сб. научн. труд. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1990. – 350 с.

3. Гомеостаз на различных уровнях организацыы биосистем / В.И. Нефедов, А.А. Ясайтис, В.И. Новосельцев и др.; под ред. В.И. Новосельцева. – Новосибирск: Наука, 1991. – 232 с.

4. Ферстер У. Самоорганизующиеся системы / У. Ферстер // Самоорганизующиеся системы. – М.: Мир, 1964. – С. 5-23.

5. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях: Пер. с англ. / Дж. Марри. – М.: Мир, 1983. – 397 с.

6. Лапта С.И. Динамика ауторегуляции уровня гликемии: запаздывание или последействие? / С.И. Лапта // Радиоэлектроника и информатика. – 2003. – №2. – С. 143-147.

7. Федоров В.Д. Экология / В.Д. Федоров, Т.Г. Гильманов. – М.: Изд-во МГУ, 1980. – 464 с.

8. Смит Дж.М. Модели в экологии: Пер. с англ. / Дж.М. Смит. – М.: Мир, 1976. – 184 с.

9. Экономическая теория: Под ред. А.И. Добрынина, Л.С. Тарасевича. – СПб.: Питер, 2001. – 544 с.

10. Endocrinology and metabolism I Editors: P. Felig, J.D. Baxter, L.A. Frohman. – 3d ed. – McGraw-Hill, INC., 1995. – 1940 p.

Надійшла до редколегії 19.05.2014

Рецензент: д-р фіз.-мат. наук, проф. С.В. Смеляков, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ СЛОЖНЫХ ГОМЕОСТАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЛОКАЛЬНОЙ ИНЕРЦИОННОСТЬЮ

Л.А. Поспелов, С.С. Лапта

Статья посвящена развитию теории математического моделирования реальных сложных систем с недостаточной структурированностью, которые имеют гомеостатическое свойство с локальным последействием, на примере наиболее исследованной на концептуальном уровне физиологичной системы регуляции углеводного обмена. Предложен новый подход, который отличается тем, что структурная идентификация сложной гомеостатической системы проводится в функциональном аспекте. Получены новые математические модели, улучшившие методы и средства математического компьютерного моделирования, а также вычислительные методы.

Ключевые слова: *гомеостаз, математические модели.*

FUNCTIONAL GOING NEAR DESIGN OF DIFFICULT HOMOEOSTATIC SYSTEMS WITH LOCAL INERTANCE

L.A. Pospelov, S.S. Lapta

The article is devoted development of theory of mathematical design of the real difficult systems with insufficient structured, which are a homoeostatic characteristic with local aftereffect, on the example of the most investigational at conceptual level physiology system of adjusting of carbohydrate exchange. New approach, which differs that structural authentication of the difficult homoeostatic system is conducted in a functional aspect, is offered. New mathematical models, improving methods and facilities of mathematical computer design, and also calculable methods, are got.

Keywords*: homoeostasis, mathematical models.*