

Математичні моделі та методи

УДК 519.85

Н.И. Гиль, И.А. Суббота

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

КВАЗИ- ρ -ФУНКЦИЯ ДЛЯ СЕГМЕНТОВ ЭЛЛИПСОВ

В статье рассматриваются конструктивные средства математического моделирования отношения непересечения пары сегментов эллипсов. Строится класс квази- ρ -функций для сегментов эллипсов с учетом их непрерывных трансляций и вращений.

Ключевые слова: сегменты эллипсов, непрерывные вращения, отношение непересечения, математическое моделирование, квази- ρ -функция.

Введение

Задачи оптимального размещения (в частности, задачи упаковки и раскроя [1]) являются частью теории исследования операций и вычислительной геометрии. Этот класс задач имеет широкий спектр научных и практических применений в современной биологии, минералогии, медицине, материаловедении, нанотехнологии, робототехнике, системах распознавания образов, в химической промышленности, машиностроении, строительстве и т.д.

При решении оптимизационных задач геометрического проектирования (Packing and Cutting [1]) одним из ключевых моментов является описание в аналитическом виде условий взаимного непересечения размещаемых объектов. В этом классе задач наиболее эффективным средством математического моделирования отношений геометрических объектов является метод ρ -функций Стояна [2, 3]. В данном исследовании используется новый класс функций, квази- ρ -функций [4], который является развитием метода ρ -функций. Квази- ρ -функции позволяют значительно упростить аналитическое описание ограничений на непересечение геометрических объектов с учетом их непрерывных вращений, а также расширить класс объектов, для которых эти ограничения можно представить в виде систем неравенств.

Математическое моделирование упаковки двух эллипсов исследуется в статье [5]. Эффективный численный алгоритм для определения факта пересечения эллипсов приводится в статье [6], здесь же исследуется влияние размеров эллипсов на плотность упаковки. Авторы статьи [7] рассматривают задачу упаковки кругов в эллипс. Задача упаковки формулируется в виде задачи нелинейного программирования.

В статье [8] излагается метод решения задачи упаковки истинных эллипсов (без аппроксимаций), допускающих вращения, с использованием современных NLP solvers, доступных в GAMS. С целью аналитического описания условия непересечения неориентированных эллипсов авторы используют идею разделяющей прямой, предложенную в работе [9] для моделирования отношений кругов и выпуклых многоугольников. В этом исследовании получено глобальное решение для небольшого числа эллипсов ($n \leq 4$). Однако при $n > 14$ авторам не удалось получить локально-оптимального решения. В этой связи авторы предлагают эвристический *polythic*-алгоритм для размещения большого числа эллипсов ($14 \leq n \leq 100$) в прямоугольной области фиксированной ширины и переменной длины.

Задача оптимальной упаковки истинных эллипсов, допускающих непрерывные вращения, рассмотрена в [10]. Для аналитического описания основных ограничений размещения используются свободные от радикалов квази- ρ -функции и псевдонормализованные квази- ρ -функции [11]. Строится математическая модель в виде задачи нелинейного программирования. Предлагаются эффективные алгоритмы поиска локальных экстремумов. Используя квази-функции, изложенный в статье [10] подход позволяет представить задачу оптимальной упаковки эллипсов с учетом допустимых расстояний в виде задачи нелинейного программирования.

В данном исследовании рассматриваются средства математического моделирования отношения непересечения пары сегментов эллипсов в виде класса квази- ρ -функций. Это позволит описывать в аналитическом виде отношения произвольных ρ -объектов, границы которых описываются не только дугами окружностей, но и сегментами эллипсов.

Постановка задачи

Рассматриваются сегменты σ_i , $i=1,2$, эллипса E_i , представляющие собой пересечение эллипса E_i и полуплоскости. Будем считать, что сегмент σ_i определяется полуосями a_i и b_i эллипса ($a_i > b_i$), а также двумя его точками A_{i1} и A_{i2} , т.е. граница сегмента состоит из части границы эллипса и хорды, соединяющей точки A_{i1} и A_{i2} . Пусть A_{i3} – точка пересечения касательных к эллипсу в точках A_{i1} и A_{i2} (в предположении, что центр эллипса не принадлежит сегменту σ_i , а хорда не проходит через центр эллипса). Полусом сегмента σ_i будем считать начало его собственной системы координат, совпадающее с центром эллипса. Тогда в общей системе координат сегмент σ_i можно представить кортежем $(x_i^*, y_i^*, a_i, b_i, A_{i1}, A_{i2}, \theta_i)$, где (x_i^*, y_i^*) – вектор трансляции, θ_i – угол поворота собственной системы координат относительно общей системы. Обозначим $u_i = (x_i^*, y_i^*, \theta_i)$.

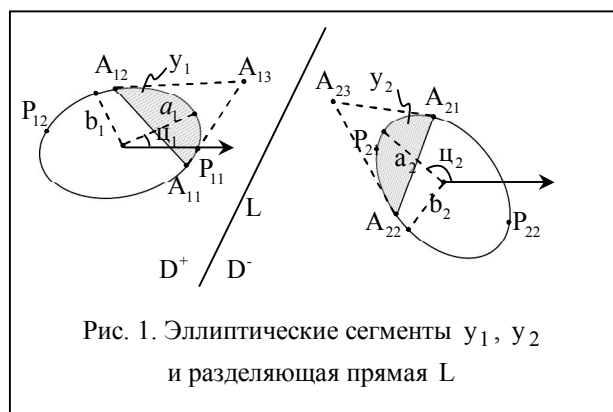


Рис. 1. Эллиптические сегменты y_1, y_2 и разделяющая прямая L

Рассматриваются следующие отношения между эллиптическими сегментами $\sigma_1(u_1)$ и $\sigma_2(u_2)$:

$$\bullet \text{ пересечение: } \text{int } \sigma_1(u_1) \cap \text{int } \sigma_2(u_2) \neq \emptyset, \quad (1)$$

$$\bullet \text{ касание: } \text{int } \sigma_1(u_1) \cap \text{int } \sigma_2(u_2) = \emptyset \text{ и}$$

$$\text{fr } \sigma_1(u_1) \cap \text{fr } \sigma_2(u_2) \neq \emptyset, \quad (2)$$

$$\bullet \text{ непересечение: } \sigma_1(u_1) \cap \sigma_2(u_2) = \emptyset, \quad (3)$$

где $\text{int}(\bullet)$ – топологическая внутренность, $\text{fr}(\bullet)$ – граница множества $(\bullet)$.

В качестве конструктивных средств математического моделирования отношений пары сегментов эллипсов σ_1 и σ_2 предлагаются квази-phi-функции.

Квази-phi-функцией для $\sigma_1(u_1)$ и $\sigma_2(u_2)$ называется функция $\Phi^{\sigma_1 \sigma_2}$, для которой $\max_{u \in U} \Phi'(u_1, u_2, u')$ является phi-функцией. Здесь u' – вектор дополнительных переменных.

Из определения следует, что квази-phi-функция $\Phi^{\sigma_1 \sigma_2}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\max_{u \in U} \Phi'(u_1, u_2, u') > 0,$$

если выполняется условие (3),

$$\max_{u \in U} \Phi'(u_1, u_2, u') = 0,$$

если выполняется условие (2),

$$\max_{u \in U} \Phi'(u_1, u_2, u') < 0$$

в случае (1).

Одним из самых важных свойств квази-phi-функции является следующее: $\Phi'(u_1, u_2, u') \geq 0$, если $\text{int } \sigma_1(u_1) \cap \text{int } \sigma_2(u_2) = \emptyset$.

Построение квази-phi-функции

Пусть $f(x, y) = cx + dy + r = 0$, ($c^2 + d^2 = 1$) – уравнение некоторой прямой L , являющейся границей двух полуплоскостей D^+ и D^- (рис. 1). Для описания условия взаимного непересечения сегмента σ_1 и полуплоскости D^+ построим phi-функцию вида:

$$\Phi_1(u_1, u') = \min \{ f(A_{11}), f(A_{12}), \max \{ f(A_{13}), \min \{ f(P_{11}), f(P_{12}) \} \} \}, \quad (4)$$

$$f(A_{ij}) = c(x_i^* + x_j \cos \theta_i + y_j \sin \theta_i) + d(y_i^* - x_j \sin \theta_i + y_j \cos \theta_i) + r,$$

$$f(P_{11}) = cx_i^* + dy_i^* + r + \frac{a_i b_i (d + cF)}{H},$$

$$f(P_{12}) = cx_i^* + dy_i^* + r - \frac{a_i b_i (d + cF)}{H},$$

$$F = \frac{c(b_i^2 \sin^2 \theta_i + a_i^2 \cos^2 \theta_i) + d(a_i^2 - b_i^2) \sin \theta_i \cos \theta_i}{d(b_i^2 \cos^2 \theta_i + a_i^2 \sin^2 \theta_i) + c(a_i^2 - b_i^2) \sin \theta_i \cos \theta_i},$$

$$H = \sqrt{b_i^2 (\sin \theta_i + F \cos \theta_i)^2 + a_i^2 (\cos \theta_i - F \sin \theta_i)^2},$$

где $u'=(c,d,r)$, P_{11}, P_{12} – точки эллипса, в которых касательные параллельны прямой L . Здесь принято обозначение $f(\bullet)$ – уклонение точки $(\bullet)$ от L . Функция (4) является квази-функцией при условии

$$\Phi_2(u_2, u') = \min \{ -f(A_{21}), -f(A_{22}), \max \{ -f(A_{23}), \min \{ -f(P_{21}), -f(P_{22}) \} \} \}. \quad (5)$$

Тогда условие взаимного непересечения сегментов σ_1 и σ_2 можно представить в виде

$$\Phi'(u_1, u_2, u') \geq 0,$$

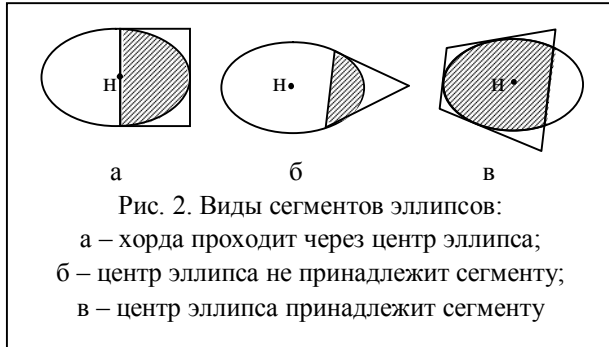
где функция

$$\Phi'(u_1, u_2, u') = \max_{c,d,r} \min \{ \Phi_1(u_1, u'), \Phi_2(u_2, u') \} \quad (6)$$

является phi-функцией для пары сегментов σ_1 и σ_2 .

Рассмотрим случаи, когда хорда, соединяющая точки A_{11} и A_{12} , проходит через центр эллипса (или близко к нему). А также когда центр эллипса принадлежит сегменту.

Пусть $\sigma_i = E_i \cap T_i$, $i=1,2$, где T_i является: треугольником, если центр эллипса не принадлежит $\text{int}\sigma_i$; прямоугольником, если хорда проходит через центр эллипса σ_i ; трапецией, если центр эллипса принадлежит $\text{int}\sigma_i$. При этом две стороны многоугольника являются касательными к эллипсу в концевых точках хорды.



Тогда, в общем случае, отношение непересечения сегментов σ_1 и σ_2 можно описать так:

$$\Phi^{\sigma_1\sigma_2}(u_1, u_2, u') \geq 0,$$

где

$\Phi^{\sigma_1\sigma_2}(u_1, u_2, u') = \max \{ \Phi^{E_1E_2}(u_1, u_2, u'), \Phi^{T_1T_2}(u_1, u_2, u'), \Phi^{T_1E_2}(u_1, u_2, u'), \Phi^{E_1T_2}(u_1, u_2, u') \}$,
 где $\Phi^{\sigma_1\sigma_2}(u_1, u_2, u')$ – квази-phi-функция для сегментов σ_1 и σ_2 , $\Phi^{E_1E_2}(u_1, u_2, u')$, $\Phi^{T_1T_2}(u_1, u_2, u')$, $\Phi^{T_1E_2}(u_1, u_2, u')$, $\Phi^{E_1T_2}(u_1, u_2, u')$ – квази-phi-функции для объектов: E_1 и E_2 , T_1 и T_2 , T_1 и E_2 , E_1 и T_2 , приведенные в работе [12].

В частности, квази-phi-функция для выпуклых многоугольников строится следующим образом.

$d \neq 0$.

Аналогично строится phi-функция для сегмента σ_2 и полуплоскости D^- :

Пусть T_1 и T_2 выпуклые многоугольники, заданные вершинами p_i^1 , $i=1, \dots, m_1$, и p_i^2 , $i=1, \dots, m_2$, соответственно, с параметрами размещения u_1 и u_2 .

Полагаем, что $\Phi^{T_1D^+}(u_1, u') = \min_{1 \leq i \leq m_1} f(p_i^1)$ –

phi-функция для объектов T_1 и D^+ ,

$\Phi^{T_2D^-}(u_2, u') = \min_{1 \leq i \leq m_2} (-f(p_i^2))$ – phi-функция для

объектов T_2 и D^- . Тогда функция

$$\begin{aligned} \Phi^{T_1T_2}(u_1, u_2, u') &= \\ &= \min \{ \Phi^{T_1D^+}(u_1, u'), \Phi^{T_2D^-}(u_2, u') \} \end{aligned}$$

является квази-phi-функцией для T_1 и T_2 .

Пусть $E_1(u_1)$ и $E_2(u_2)$ – эллипсы с полуосями a_i и b_i , $a_i > b_i$, $i=1,2$. Переменные параметры эллипса $E_i(u_i)$ имеют вид: $u_i = (v_i, \theta_i)$, где $v_i = (x_{E_i}, y_{E_i})$ – вектор трансляции, θ_i – угол поворота. Параметр t_i определяет точку $(x_i, y_i) = (\lambda_i a_i \cos t_i, \lambda_i b_i \sin t_i)$ на границе эллипса E_i , $0 \leq t_i \leq 2\pi$, $i=1,2$. После поворота эллипса E_i на угол θ_i и трансляции на вектор $v_i = (x_{E_i}, y_{E_i})$ каждая точка (x_i, y_i) преобразуются следующим образом:

$$(x'_i, y'_i) = v_i + M(\theta_i) \cdot (x_i, y_i),$$

где $M(\theta_i)$ – матрица поворота, т.е.

$$x'_i = x_{E_i} + x_i \cos \theta_i + y_i \sin \theta_i,$$

$$y'_i = y_{E_i} - x_i \sin \theta_i + y_i \cos \theta_i.$$

Полагая $u' = (t_1, t_2)$, квази-phi-функция для $E_1(u_1)$ и $E_2(u_2)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi^{E_1E_2}(u_1, u_2, u') &= \\ &= \min \{ \Phi^{E_1D^+}(u_1, u_p, u'_1), \Phi^{E_2D^-}(u_2, u_p, u'_2) \}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь квази-phi-функция для эллипса $E(u_E)$ и полуплоскости $D(\theta)$ определяется так

$$\begin{aligned} \Phi^{ED}(u_E, \theta, t) &= \\ &= \min \{ \chi(\theta_E, \theta, t), f(x_E^+, y_E^+), f(x_E^-, y_E^-) \}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y - 1,$$

$$\chi = -\langle N_P, N'_E \rangle,$$

где $\alpha = \cos \theta$, $\beta = \sin \theta$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $N_P = (\alpha_P, \beta_P)$ – внешний вектор нормали полуплоскости D , $N'_E = (\alpha'_E, \beta'_E)$,

$$\alpha'_E = \alpha_E \cos \theta_E + \beta_E \sin \theta_E,$$

$$\beta'_E = -\alpha_E \sin \theta_E + \beta_E \cos \theta_E,$$

$$\alpha_E = \frac{\cos t}{a}, \beta_E = \frac{\sin t}{b},$$

$$(x_E^+, y_E^+) = (x'_E, y'_E) + \eta(-\beta'_E, \alpha'_E),$$

$$(x_E^-, y_E^-) = (x'_E, y'_E) - \eta(\beta'_E, \alpha'_E), \eta = (a)^2.$$

Выводы

Предложенный в работе подход к формализации условий взаимного непересечения сегментов эллипса позволяет описывать в аналитическом виде отношения объектов, границы которых описываются эллиптическими сегментами. Таким образом, в задачах упаковки и раскроя в качестве объектов размещения могут рассматриваться произвольные объекты, границы которых задаются объединением отрезков прямых, дуг окружностей и эллипсов, т.е.

$$\text{frT} = \bigcup_i I_i, I_i \in \{I_L, I_C, I_E\},$$

где I_L – прямая, I_C – дуга окружности, I_E – дуга эллипса. Для решения данного класса задач могут быть использованы алгоритмы, предложенные в работах [3, 4].

Список литературы

1. Wascher G. An improved typology of cutting and packing problems / G. Wascher, H. Hauner, H. Schumann // *European Journal of Operational Research*. – 2007. – Volume 183, Issue 3, 16. – P. 1109-1130.
2. Stoyan Yu. Φ -function and its basic properties / Yu. Stoyan // *Доп. НАН України*. – 2001. – № 8. – С. 112-117.

3. Chernov N. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem / N. Chernov, Yu. Stoyan, T. Romanova // *Computational Geometry: Theory and Applications*. – 2010. – 43(5): 535-553.

4. Панкратов А. Информационная система решения оптимизационной задачи размещения произвольных неориентированных 2D-объектов / А. Панкратов // *Системи обробки інформації*. – X: ХУПС, 2013. – Вип. 1(108). – С. 82-186.

5. Vickers G.T. Nested Ellipses / G.T. Vickers // *Applied Probability Trust*. – 2009. – Vol. 41(3). – P. 131-137.

6. Xu W.X. An overlapping detection algorithm for random sequential packing of elliptical particles / W.X. Xu, H.S. Chen, Z. Lv // *Physica*. – 2011. – Vol. 390. – P. 2452-2467. doi:10.1016/j.physa.2011.02.048.

7. Birgin E.G. Packing circles within ellipses / E.G. Birgin, L.H. Bustamante, H.F. Callisaya, J.M. Martinez // *International transactions in operational research*. – 2013. – Vol. 20(3). – P. 365-389. doi:10.1111/itor.12006.

8. Kallrath J. Cutting Ellipses from Area-Minimizing Rectangles / J. Kallrath // *Journal of Global Optimization*. – 2013. – Vol. 59 (2-3). – P. 405-437. doi:10.1007/s10898-013-0125-3.

9. Kallrath J. Cutting Circles and Polygons from Area-Minimizing Rectangles / J. Kallrath // *Journal of Global Optimization*. – 2008. – Vol. 43 (2-3). – P. 299-328. doi:10.1007/s10898-007-9274-6.

10. Панкратов А.В. Оптимальная упаковка эллипсов с учетом допустимых расстояний / А.В. Панкратов, Т.Е. Романова, И.А. Суббота // *Журнал Обчислювальної Математики*. – 2014. – Т. 1. – С. 27-42.

11. Стоян Ю.Г. Квази-phi-функции для математического моделирования отношений геометрических объектов / Ю.Г. Стоян, А.В. Панкратов, Т.Е. Романова, Н.И. Чернов // *Доповіді Національної академії наук України*. – 2014. – Т. 9. – С. 49-54.

12. Гиль Н.И. Задача упаковки неориентированных эллипсов / Н.И. Гиль, А.В. Панкратов, Т.Е. Романова, И.А. Суббота // *Збірник наукових праць ХУПС*. – X: ХУПС, 2013. – Вип. – 4 (37). – С. 152-156.

Поступила в редколлегию 7.10.2014

Рецензент: д-р техн. наук, доц. В.В. Шляхов, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

КВАЗИ-PHI-ФУНКЦІЯ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ СЕГМЕНТІВ

М.І. Гіль, І.О. Суббота

В статті розглядаються конструктивні засоби математичного моделювання відношень неперетину пари сегментів еліпсів. Будується клас квазі-phi-функцій для сегментів еліпсів з урахуванням їх неперервних трансляцій та поворотів.

Ключові слова: сегменти еліпсів, неперервні повороти, відношення неперетину, математичне моделювання, квазі-phi-функція.

QUASI-PHI-FUNCTION FOR ELLIPSE SEGMENTS

N.I. Gil', I.A. Subbota

The constructive tools of mathematical modeling of nonoverlapping relationship of a pair of ellipse segments are considered in this paper. The class of quasi-phi-functions for ellipse segments are constructed taking into account their continuous translations and rotations.

Ключевые слова: ellipse segments, continuous rotations, nonoverlapping, mathematical modeling, quasi-phi-function.