УДК 519.724.6:621.3.037

И.А. Кулик, А.И. Новгородцев, Е.М. Скордина, В.В. Арбузов

*Сумский государственный университет, Сумы*

# ОБОБЩЕННЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ НЕОБНАРУЖИВАЕМОЙ ОШИБКИ ДЛЯ КВАЗИРАВНОВЕСНЫХ КОДОВ

*В работе определены условия необнаружения ошибок для квазиравновесных кодов и их кратность при воздействии помех в канале передачи или вследствие возникновения аппаратного сбоя. Также получены обобщенные аналитические выражения для вероятности необнаруживаемой ошибки квазиравновесного кода, которая зависит от вероятности ошибочных поразрядных переходов, типа и кратности ошибки. Результаты исследований позволяют определить области наиболее эффективного использования данного класса кодов при построении цифровых устройств с возможностью обнаружения ошибок в их работе.*

***Ключевые слова:*** *квазиравновесный код, равновесный код, ошибкообнаруживающая способность, вероятность необнаруживаемой ошибки.*

## Введение

Двоичные квазиравновесные коды (КРК) представляют перспективный с точки зрения применения класс неразделимых кодов. Родственные по структуре равновесным кодам и наследующие в значительной мере их положительные свойства, КРК обладают гораздо большей мощностью при тех же параметрах − длины двоичных сообщений и числах единиц в них и, следовательно, характеризуется меньшей информационной избыточностью [1 – 3]. Кроме того, за счет большего числа доступных параметров кода квазиравновесные комбинации имеют более гибкие возможности по адаптации их ошибкообнаруживающей способности и кодовой скорости к условиям передачи.

Последние результаты [4, 5] относительно методов получения двоичных КРК (а также равновесных кодов) на основе биномиальных систем счисления, которые отличаются простотой и нетребовательностью к аппаратно-программным затратам, вызывают еще больший интерес к потенциальным возможностям их практического применения.

КРК могут эффективно применяться в системах контроля как симметричных, так и асимметричных ошибок на базе t-SEC/AUDE кодов [2, 6]. Успешно КРК могут использоваться для нумерации булевых бент-функций в криптографических приложениях, а также для построения сферических кодов и обнаружения равновесных кодов с заданным кодовым расстоянием [7, 8]. В виду достаточно простого механизма адаптации КРК к числу ошибок представляет особый интерес разработка адаптивных систем обмена данными на их основе.

Кроме того, существует практическая потребность в использовании равновесных и квазиравновесных кодов при передаче данных в СБИС для минимизации токовых флуктуаций при переключениях, а также в построении самоконтролируемых счетных устройств на основе КРК и генераторов квазиравновесных комбинаций [7].

Одной из главных составляющих в обосновании применения двоичного КРК является оценка его ошибкообнаруживающей способности. В работах [4, 9] оценивание квазиравновесных комбинаций проводилось без учета отличий КРК от родственных им равновесных кодов, что приводит к весьма приблизительным результатам. В работе [10] найденные выражения для вероятности необнаруживаемой ошибки весьма удовлетворительно описывают ошибкообнаруживающую способность КРК, но все же вносили в оценку ощутимую погрешность, поскольку не учитывали возможности комбинирования асимметричных ошибок с симметричными. Данная статья призвана устранить этот недостаток и предоставить полную объективную оценку ошибкообнаруживающей способности КРК.

Таким образом, **целью данной научной работы** является получение точной количественной оценки ошибкообнаруживающей способности КРК, учитывающей всю совокупность ошибок, как асимметричных, так и симметричных, возникающих не только в процессе передачи, но и во время работы электронных цифровых устройств.

Для достижения сформулированной цели необходимо решить следующие задачи:

1) определить условия необнаружения ошибок в КРК и их кратность при воздействии помех в канале передачи или возникновении аппаратного сбоя;

2) получить для КРК вероятности необнаруживаемой ошибки, зависящей от вероятностей ошибочных поразрядных переходов, а также типа и кратности ошибки.

В основе решения приведенных задач лежит способ оценки [11] помехоустойчивости неразделимых кодов, числовой характеристикой которой является вероятность необнаруживаемой ошибки.

В изложении данного исследования длину КРК примем равной $n-1$ двоичных разрядов с тем, чтобы показать преемственность данной статьи с работами [4, 5, 9, 10], в которых значение $n$ означает один из параметров соответствующей биномиальной системы счисления, используемой для генерирования и нумерации КРК.

## Условия необнаружения ошибочных переходов

Как известно из [4, 9], множество $Y[n-1,k,k-1]$ двоичных квазиравновесных комбинаций длины $n-1$, содержащих $k$ и $k-1$ единиц, представляет собой объединение двух подмножеств:

$$Y[n-1,k,k-1] = Y[n-1,k] \cup Y[n-1,k-1], \quad (1)$$

где $Y[n-1,k]$ и $Y[n-1,k-1]$ – подмножества квазиравновесных комбинаций длины $n-1$ с числами $k$ и $k-1$ единиц соответственно. Очевидно, $Y[n-1,k]$ есть подмножество равновесных комбинаций с $k$ единицами и $n-k-1$ нулями, а $Y[n-1,k-1]$ – подмножество равновесных комбинаций с $k-1$ единицами и $n-k$ нулями. Тогда

$$Y[n-1,k] = Y[k,n-k-1],$$

$$Y[n-1,k-1] = Y[k-1,n-k],$$

а выражение (1) запишется как

$$Y[n-1,k,k-1] = Y[k,n-k-1] \cup Y[k-1,n-k]. \quad (2)$$

Следует отметить, что мощность КРК $Y[n-1,k,k-1]$ составляет $N_{КРК} = C_n^k$, а мощности подмножеств $Y[k,n-k-1]$ и $Y[k-1,n-k]$ соответственно $N_k = C_{n-1}^k$ и $N_{k-1} = C_{n-1}^{k-1}$.

Для оценки помехоустойчивости КРК предлагается рассмотреть ошибкообнаруживающую способность для каждого из подмножеств $Y[k,n-k-1]$ и $Y[k-1,n-k]$ (2) в отдельности с целью дальнейшего определения вероятности $V_{КРК}$ необнаруживаемой ошибки для всего кода.

Сам факт необнаружения ошибок, возникающих при передаче или аппаратном сбое, связан с преобразованием исходной комбинации в кодовую последовательность, отличную от исходной, но принадлежащей исходному кодовому множеству, т.е. выполняется переход разрешенной комбинации в другую разрешенную.

Пусть заданы

$$y_a, y'_a \in Y[k,n-k-1] \text{ и } y_b, y'_b \in Y[k-1,n-k],$$

где $y_a$, $y_b$ – входные, а $y'_a$, $y'_b$ – выходные квазиравновесные комбинации, $y_a \neq y'_a$, $y_b \neq y'_b$.

Касательно КРК можно выделить два вида ошибочных необнаруживаемых переходов:

$$\begin{bmatrix} y_a \to y'_a \\ y_b \to y'_b \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} y_a \to y'_b \\ y_b \to y'_a \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Поразрядные переходы $1 \to 0$ и $0 \to 1$, которые приводят к ошибочным необнаруживаемым преобразованиям (3), составляют в общем случае сумму

$$e_{пр} = e_{01} + e_{10}, \quad (4)$$

где $e_{01}$ и $e_{10}$ – количества переходов $0 \to 1$ и $1 \to 0$ соответственно. Разность же $e_{01}$ и $e_{10}$ обозначим как $\Delta_{пр} = e_{01} - e_{10}$.

Из вида подмножеств (2) можно сделать следующие выводы.

1. Необнаруживаемые переходы $y_a \to y'_a$ и $y_b \to y'_b$ являются следствием симметричных ошибок, когда кратность ошибки $\tau = e_{01} = e_{10}$. Их воздействие на входные квазиравновесные комбинации можно отобразить как

$$Y[k,n-k-1] = Y[k+\Delta_{пр},(n-k-1)-\Delta_{пр}], \quad (5)$$

$$Y[k-1,n-k] = Y[(k-1)+\Delta_{пр},n-k-\Delta_{пр}]. \quad (6)$$

Так как $e_{01} = e_{10}$, то равенства (5) и (6) соблюдаются при любых значениях $\tau = e_{01} = e_{10}$ с учетом ограничивающих неравенств:

$$0 < \tau \le \min[k,n-k-1], \quad (7)$$

$$0 < \tau \le \min[k-1,n-k] \quad (8)$$

соответственно. Следовательно, для КРК все симметричные ошибки, кратность $\tau$ которых определяется (7) и (8), приводят к необнаруживаемым переходам $y_a \to y'_a$ и $y_b \to y'_b$.

2. Необнаруживаемые переходы $y_a \to y'_b$ и $y_b \to y'_a$ являются следствием асимметричных ошибок, а также сочетания асимметричных ошибок с симметричными. Для данного типа переходов $e_{01} \neq e_{10}$. При этом для $y_a \to y'_b$ выполняется $e_{01} < e_{10}$, а для $y_b \to y'_a$ – $e_{01} > e_{10}$.

Рассматриваемый тип ошибок изменяет параметры квазиравновесных комбинаций следующим образом:

при $y_a \to y'_b$

$$Y[k-1,n-k] = Y[k+\Delta_{пр},(n-k-1)-\Delta_{пр}], \quad (9)$$

при $y_b \to y'_a$

$$Y[k,n-k-1] = Y[(k-1)+\Delta_{пр},n-k-\Delta_{пр}]. \quad (10)$$

Для случая (9) имеем

$$k+\Delta_{пр} = k-1 \text{ и } (n-k-1)-\Delta_{пр} = n-k.$$

Откуда следует $\Delta_{пр} = -1$ и в результате получаем

$$e_{10} = e_{01} + 1 . \quad (11)$$

Таким образом, количество поразрядных переходов $1 \to 0$ на единицу больше количества переходов вида $0 \to 1$.

С учетом равенств (9) и (11) можно заключить, что при совершении необнаруживаемого перехода $y_a \to y'_b$ возникают $\tau = e_{01}$ симметричных ошибок и одиночная асимметричная ошибка вида $1 \to 0$. При этом для случая (9) кратность $\tau$ симметричных ошибок должна удовлетворять неравенству

$$0 \le \tau \le \min\left[k-1, n-k-1\right] . \quad (12)$$

Для случая (10) имеем $(k-1) + \Delta_{пр} = k$ и $n - k - \Delta_{пр} = n - k - 1$. Откуда следует $\Delta_{пр} = 1$ и в результате получаем

$$e_{01} = e_{10} + 1 . \quad (13)$$

Таким образом, количество поразрядных переходов $0 \to 1$ на единицу больше количества переходов вида $1 \to 0$.

С учетом равенств (10) и (13) можно заключить, что при совершении необнаруживаемого перехода $y_b \to y'_a$ возникают $\tau = e_{10}$ симметричных ошибок и одиночная асимметричная ошибка вида $0 \to 1$. При этом для случая (10) кратность $\tau$ симметричных ошибок также должна удовлетворять неравенству (12).

Для необнаруживаемых переходов $y_a \to y'_b$ и $y_b \to y'_a$ ограничение (12) для кратности $\tau$ симметричных ошибок совпадают.

Очевидно, что при $\tau = 0$ симметричные ошибки для $y_a \to y'_b$ или $y_b \to y'_a$ отсутствуют. В этом случае имеется только одиночная асимметричная ошибка вида $1 \to 0$ или $0 \to 1$ соответственно.

Варианты ошибочных переходов квазиравновесных комбинаций с параметрами ошибок сведены в таблицу 1, где $y'_c, y'_d \notin Y\left[n-1, k, k-1\right]$.

## Количества вариантов ошибочных переходов

Полученные условия необнаруживаемых ошибочных переходов позволяют определить для КРК число вариантов ошибочных преобразований разрешенной комбинации в разрешенную и число вариантов ошибочных преобразований разрешенной комбинации в запрещенную (3).

С этой целью сформулируем теоремы, доказательства которых основывается на основных правилах комбинаторики – правилах суммы и умножения [12], введя при этом следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha &= \min\left[k, n-k-1\right], \\ \beta &= \min\left[k-1, n-k\right], \\ \gamma &= \min\left[k-1, n-k-1\right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Таблица 1

Варианты ошибочных переходов для КРК

| Входные | Выходные комбинации | |
|---|---|---|
| | Необнаруживаемые ошибки | |
| | $y'_a$ | $y'_b$ |
| $y_a$ | $0 \to 1$, $1 \to 0$<br>$e_{01} = e_{10}$ | $0 \to 1$, $1 \to 0$<br>$e_{10} = e_{01} + 1$ |
| $y_b$ | $0 \to 1$, $1 \to 0$<br>$e_{01} = e_{10} + 1$ | $0 \to 1$, $1 \to 0$<br>$e_{01} = e_{10}$ |
| Входные | Выходные комбинации | |
| | Обнаруживаемые ошибки | |
| | $y'_c$ | $y'_d$ |
| $y_a$ | $0 \to 1$<br>$0 < e_{01} \le n-k-1$ | $1 \to 0$<br>$1 < e_{10} \le k$ |
| $y_b$ | $1 \to 0$<br>$0 < e_{10} \le k-1$ | $0 \to 1$<br>$1 < e_{01} \le n-k$ |

**Теорема 1.** Число вариантов поразрядных переходов $1 \to 0$ и $0 \to 1$ для необнаруживаемой ошибки $y_a \to y'_a$:

$$r_1 = \sum_{\tau=1}^{\alpha} C_k^{\tau} C_{n-k-1}^{\tau} . \quad (15)$$

**Доказательство.** При $y_a \to y'_a$ имеем дело с двумя видами поразрядных переходов $1 \to 0$ и $0 \to 1$, определяющих симметричную ошибку, кратность $\tau$ которой определяется (7).

В соответствии с основным правилом комбинаторики количество $r_1[\tau]$ вариантов переходов для симметричной ошибки кратности $\tau$ равно произведению числа вариантов $e_{01}$ переходов вида $0 \to 1$ на число вариантов $e_{10}$ переходов вида $1 \to 0$. Эти числа, в свою очередь, вычисляются как сочетание числа $\tau$ нулевых разрядов, изменяющих свое значение, из общего числа $n-k-1$ нулей и сочетание числа $\tau$ единичных разрядов, изменяющих свое значение, из общего числа $k$ единиц. Таким образом, для симметричной ошибки кратности $\tau$:

$$r_1[\tau] = C_k^{\tau} C_{n-k-1}^{\tau} . \quad (16)$$

Отсюда, число $r_1$ вариантов переходов $1 \to 0$ и $0 \to 1$ при формировании симметричной ошибки для $y_a \to y'_a$ будет представлять собой сумму значений $r_1[\tau]$ (16) для всех возможных $\tau$ из неравенства (7). Тогда с учетом (14)

$$r_1 = \sum_{\tau=1}^{\alpha} C_k^{\tau} C_{n-k-1}^{\tau}.$$

**Теорема доказана**.

**Теорема 2.** Число вариантов поразрядных переходов $1 \to 0$ и $0 \to 1$ для необнаруживаемой ошибки $y_b \to y'_b$:

$$r_2 = \sum_{\tau=1}^{\beta} C_{k-1}^{\tau} C_{n-k}^{\tau}. \quad (17)$$

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1, но принимая во внимание, что квазиравновесные комбинации $y_b$ и $y'_b$ содержат $k-1$ единиц и $n-k$ нулей.

**Теорема 3.** Число вариантов поразрядных переходов $0 \to 1$ и $1 \to 0$ для необнаруживаемой ошибки $y_a \to y'_b$:

$$r_3 = k \cdot \sum_{\tau=0}^{\gamma} C_{k-1}^{\tau} C_{n-k-1}^{\tau}. \quad (18)$$

**Доказательство.** Из основного правила комбинаторики с учетом (9) и (11) следует, что количество вариантов поразрядных переходов при $y_a \to y'_b$ будет определяться произведением числа $r_a$ переходов $1 \to 0$, формирующих одиночную асимметричную ошибку, и числа $r_c$ вариантов переходов $0 \to 1$ и $1 \to 0$, формирующих симметричную ошибку кратности $\tau$ (12):

$$r_1 = r_a \cdot r_c. \quad (19)$$

Число $r_a$ переходов вида $1 \to 0$ при формировании одиночной асимметричной ошибки для $y_a \to y'_b$ будет определяться как сочетание из общего числа $k$ единичных разрядов одной единицы, изменяющей своё значение на противоположное:

$$r_a = C_k^1 = k. \quad (20)$$

Количество $r_c[\tau]$ вариантов переходов для симметричной ошибки кратности $\tau$ равно произведению числа вариантов $e_{01}$ переходов вида $0 \to 1$ на число вариантов $e_{10}$ переходов вида $1 \to 0$. Так как исходная комбинация $y_a \in Y[k, n-k-1]$ содержит $k$ единиц (одна их которых испытывается на одиночную асимметричную ошибку) и $n-k-1$ нулей, то эти числа вариантов, в свою очередь, вычисляются как сочетание числа $\tau$ единичных разрядов, изменяющих свое значение, из числа $k-1$ единиц и сочетание числа $\tau$ нулевых разрядов, меняющих свое значение, из общего числа $n-k-1$ нулей. Тогда для симметричной ошибки кратности $\tau$:

$$r_c[\tau] = C_{k-1}^{\tau} C_{n-k-1}^{\tau}. \quad (21)$$

Отсюда, число $r_c$ вариантов переходов $1 \to 0$ и $0 \to 1$ при формировании симметричной ошибки для $y_a \to y'_b$ будет представлять собой сумму значений $r_c[\tau]$ (21) для всех возможных $\tau$ из неравенства (12). Тогда с учетом (14)

$$r_c = \sum_{\tau=0}^{\gamma} r_c[\tau] = \sum_{\tau=0}^{\gamma} C_{k-1}^{\tau} C_{n-k-1}^{\tau} \quad (22)$$

Таким образом, равенство (19) с учетом выражений (20) и (22) принимает следующий вид:

$$r_3 = k \cdot \sum_{\tau=0}^{\gamma} C_{k-1}^{\tau} C_{n-k-1}^{\tau}.$$

**Теорема доказана**.

**Теорема 4.** Число вариантов поразрядных переходов $0 \to 1$ и $1 \to 0$ для необнаруживаемой ошибки $y_b \to y'_a$:

$$r_4 = (n-k) \cdot \sum_{\tau=0}^{\gamma} C_{k-1}^{\tau} C_{n-k-1}^{\tau}. \quad (23)$$

Доказательство теоремы 4 проводится аналогично доказательству теоремы 3 с той лишь разницей, что одиночная асимметричная ошибка при $y_b \to y'_a$ формируется уже за счет поразрядного перехода вида $0 \to 1$, а исходная равновесная комбинация $y_b \in Y[k-1, n-k]$ содержит $k-1$ единиц и $n-k$ нулей, один их которых испытывается на одиночную асимметричную ошибку.

## Вероятности необнаруживаемой ошибки КРК

Вероятность $V_{КРК}$ необнаруживаемой ошибки для КРК можно представить как сумму вероятностей всех необнаруживаемых ошибок (3) для подмножеств $Y[k, n-k-1]$ и $Y[k-1, n-k]$:

$$\begin{aligned} V_{КРК} = V[y_a \to y'_a] + V[y_b \to y'_b] + \\ + V[y_a \to y'_b] + V[y_b \to y'_a], \end{aligned} \quad (24)$$

где $V[y_a \to y'_a]$ и $V[y_a \to y'_b]$ – вероятности необнаруживаемых ошибок для кодового подмножества $Y[k, n-k-1]$; $V[y_b \to y'_b]$ и $V[y_b \to y'_a]$ – вероятности необнаруживаемых ошибок для кодового подмножества $Y[k-1, n-k]$. Согласно [11] каждую вероятность необнаруживаемой ошибки из равенства (24) можно выразить как сумму произведений вероятности ошибочного перехода соответствующей квазиравновесной комбинации на вероятность ее появления:

$$V[y_a \to y'_a] = \sum_{a=1}^{C_{n-1}^{k}} p(y_a) P[y_a \to y'_a], \quad (25)$$

$$V\left[y_b \to y_b'\right] = \sum_{b=1}^{C_{n-1}^{k-1}} p\left(y_b\right) P\left[y_b \to y_b'\right], \qquad (26)$$

$$V\left[y_a \to y_b'\right] = \sum_{a=1}^{C_{n-1}^{k}} p\left(y_a\right) P\left[y_a \to y_b'\right], \qquad (27)$$

$$V\left[y_b \to y_a'\right] = \sum_{b=1}^{C_{n-1}^{k-1}} p\left(y_b\right) P\left[y_b \to y_a'\right], \qquad (28)$$

где $p\left(y_a\right)$ и $p\left(y_b\right)$ – вероятности появления на входе канала передачи квазиравновесных комбинаций $y_a$ и $y_b$; $P\left[y_a \to y_a'\right]$ и $P\left[y_a \to y_b'\right]$ – вероятности необнаруживаемых переходов для комбинации $y_a$; $P\left[y_b \to y_b'\right]$ и $P\left[y_b \to y_a'\right]$ – вероятности необнаруживаемых переходов для комбинации $y_b$, где $y_a, y_a' \in Y[k, n-k-1]$ и $y_b, y_b' \in Y[k-1, n-k]$.

С учетом равенств (25), (26), (27), (28) и объединения сумм для $y_a$ и $y_b$ выражение (24) приводится к следующему виду:

$$V_{КРК} = \sum_{a=1}^{C_{n-1}^{k}} p\left(y_a\right)\left(P\left[y_a \to y_a'\right] + P\left[y_a \to y_b'\right]\right) + \sum_{b=1}^{C_{n-1}^{k-1}} p\left(y_b\right)\left(P\left[y_b \to y_b'\right] + P\left[y_b \to y_a'\right]\right). \qquad (29)$$

Равенство (29) представляет собой общий вид оценки вероятности необнаруживаемой ошибки для КРК вида $Y[n-1, k, k-1]$.

Условимся, что поразрядные переходы $1 \to 1$ и $1 \to 0$, $0 \to 0$ и $0 \to 1$ происходят независимо друг от друга и являют собой полные группы событий:

$$p_{11} + p_{10} = 1, \; p_{00} + p_{01} = 1.$$

Исходя из такой модели ошибок и условий их необнаружения, определим вероятности $P\left[y_a \to y_a'\right]$, $P\left[y_a \to y_b'\right]$, $P\left[y_b \to y_b'\right]$ и $P\left[y_b \to y_a'\right]$.

**Теорема 5.** Вероятность $P\left[y_a \to y_a'\right]$ необнаруживаемого перехода $y_a \to y_a'$, где $y_a, y_a' \in Y[k, n-k-1]$:

$$P[y_a \to y_a'] = \sum_{\tau=1}^{\alpha} C_k^{\tau} C_{n-k-1}^{\tau} p_{00}^{(n-k-1)-\tau} p_{01}^{\tau} p_{11}^{k-\tau} p_{10}^{\tau}. \qquad (30)$$

**Доказательство.** Необнаруживаемый переход $y_a \to y_a'$ является следствием симметричной поразрядной ошибки кратности $1 \le \tau \le \min\left[k, n-k-1\right]$. Так как переходы $1 \to 1$ и $1 \to 0$, $0 \to 0$ и $0 \to 1$ являются независимыми и несовместными событиями, то вероятность появления квазиравновесной комбинации $y_a'$, отличной от входной комбинации $y_a$, определяется как

$$p(y_a') = p_{00}^{(n-k-1)-\tau} p_{01}^{\tau} p_{11}^{k-\tau} p_{10}^{\tau}. \qquad (31)$$

Используя (31) и число $r_1$ вариантов поразрядных переходов (15) для случая $y_a \to y_a'$ (теорема 1), а также учитывая (14), получаем

$$P[y_a \to y_a'] = r_1 \cdot p(y_a') = \sum_{\tau=1}^{\alpha} C_k^{\tau} C_{n-k-1}^{\tau} p_{00}^{(n-k-1)-\tau} p_{01}^{\tau} p_{11}^{k-\tau} p_{10}^{\tau}.$$

**Теорема доказана**.

**Теорема 6.** Вероятность $P\left[y_b \to y_b'\right]$ необнаруживаемого перехода $y_b \to y_b'$, где $y_b, y_b' \in Y[k-1, n-k]$:

$$P[y_b \to y_b'] = \sum_{\tau=1}^{\beta} C_{k-1}^{\tau} C_{n-k}^{\tau} p_{00}^{n-k-\tau} p_{01}^{\tau} p_{11}^{(k-1)-\tau} p_{10}^{\tau}. \qquad (32)$$

**Доказательство.** Необнаруживаемый переход $y_b \to y_b'$ является следствием симметричной поразрядной ошибки кратности $1 \le \tau \le \min\left[k-1, n-k\right]$. Так как переходы $1 \to 1$ и $1 \to 0$, $0 \to 0$ и $0 \to 1$ являются независимыми и несовместными событиями, то вероятность появления квазиравновесной комбинации $y_b'$, отличной от входной комбинации $y_b$, определяется как

$$p(y_b') = p_{00}^{n-k-\tau} p_{01}^{\tau} p_{11}^{(k-1)-\tau} p_{10}^{\tau}. \qquad (33)$$

Используя (33) и число $r_2$ вариантов поразрядных переходов (17) для случая $y_b \to y_b'$ (теорема 2), а также учитывая (14), получаем

$$P[y_b \to y_b'] = r_2 \cdot p(y_b') = \sum_{\tau=1}^{\beta} C_{k-1}^{\tau} C_{n-k}^{\tau} p_{00}^{n-k-\tau} p_{01}^{\tau} p_{11}^{(k-1)-\tau} p_{10}^{\tau}.$$

**Теорема доказана**.

**Теорема 7.** Вероятность $P\left[y_a \to y_b'\right]$ необнаруживаемого перехода $y_a \to y_b'$, где

$y_a \in Y[k, n-k-1]$ и $y_b' \in Y[k-1, n-k]$:

$$P[y_a \to y_b'] = \sum_{\tau=0}^{\gamma} k \cdot C_{k-1}^{\tau} C_{n-k-1}^{\tau} p_{00}^{(n-k-1)-\tau} p_{01}^{\tau} p_{11}^{(k-1)-\tau} p_{10}^{\tau+1}. \qquad (34)$$

**Доказательство.** Необнаруживаемый переход вида $y_a \to y_b'$ является следствием как асимметричной одиночной ошибки вида $1 \to 0$, так и комбинации асимметричной одиночной ошибки $1 \to 0$ с симметричной поразрядной ошибкой кратности

$$0 \le \tau \le \min\left[k-1, n-k-1\right].$$

Поскольку переходы $1 \to 1$ и $1 \to 0$, $0 \to 0$ и $0 \to 1$ для заданной модели ошибок являются независимыми и несовместными событиями, то вероятность появления квазиравновесной комбинации $y'_b$, отличной от входной комбинации $y_a$, определяется как

$$p(y'_b) = p_{00}^{(n-k-1)-\tau} p_{01}^{\tau} p_{11}^{(k-1)-\tau} p_{10}^{\tau+1}. \qquad (35)$$

Используя (35) и число $r_3$ вариантов поразрядных переходов (18) для случая $y_a \to y'_b$ (теорема 3), а также учитывая (14), получаем

$$P[y_a \to y'_b] = r_3 \cdot p(y'_b) =$$
$$= \sum_{\tau=0}^{\gamma} k \cdot C_{k-1}^{\tau} C_{n-k-1}^{\tau} p_{00}^{(n-k-1)-\tau} p_{01}^{\tau} p_{11}^{(k-1)-\tau} p_{10}^{\tau+1}.$$

**Теорема доказана**.

**Теорема 8.** Вероятность $P\left[y_b \to y'_a\right]$ необнаруживаемого перехода $y_b \to y'_a$, где

$y_b \in Y[k-1, n-k]$ и $y'_a \in Y[k, n-k-1]$:

$$P[y_b \to y'_a] =$$
$$= \sum_{\tau=0}^{\gamma} \left( \begin{array}{c} (n-k) \cdot C_{k-1}^{\tau} C_{n-k-1}^{\tau} \times \\ \times\, p_{00}^{(n-k-1)-\tau} p_{01}^{\tau+1} p_{11}^{(k-1)-\tau} p_{10}^{\tau} \end{array} \right). \qquad (36)$$

**Доказательство.** Необнаруживаемый переход вида $y_b \to y'_a$ является следствием как асимметричной одиночной ошибки вида $0 \to 1$, так и комбинации асимметричной одиночной ошибки $0 \to 1$ с симметричной поразрядной ошибкой кратности $0 \le \tau \le \min\left[k-1, n-k-1\right]$. Поскольку переходы $1 \to 1$ и $1 \to 0$, $0 \to 0$ и $0 \to 1$ для заданной модели ошибок являются независимыми и несовместными событиями, то вероятность появления квазиравновесной комбинации $y'_a$, отличной от входной $y_b$, определяется как

$$p(y'_a) = p_{00}^{(n-k-1)-\tau} p_{01}^{\tau+1} p_{11}^{(k-1)-\tau} p_{10}^{\tau}. \qquad (37)$$

Используя (37) и число $r_4$ вариантов поразрядных переходов (23) для случая $y_b \to y'_a$ (теорема 4), а также учитывая (14), получаем

$$P[y_b \to y'_a] = r_4 \cdot p(y'_a) =$$
$$= \left( \begin{array}{c} (n-k) \cdot C_{k-1}^{\tau} C_{n-k-1}^{\tau} \times \\ \times\, p_{00}^{(n-k-1)-\tau} p_{01}^{\tau+1} p_{11}^{(k-1)-\tau} p_{10}^{\tau} \end{array} \right).$$

**Теорема доказана**.

Введем следующие обозначения:

$$A = C_{n-k-1}^{\tau} W, \; B = C_{k-1}^{\tau} W, \qquad (38)$$

где $$W = p_{00}^{(n-k-1)-\tau} p_{01}^{\tau} p_{11}^{(k-1)-\tau} p_{10}^{\tau}.$$

Принимая во внимание теоремы 5-8, выражения (30), (32), (34), (36), а также обозначения (38), общий вид равенства (24) для вероятности $V_{КРК}$ необнаруживаемой ошибки КРК в случае независимых поразрядных ошибок $1 \to 0$ и $0 \to 1$ будет иметь следующий вид:

$$V_{КРК} = \sum_{a=1}^{C_{n-1}^{k}} p\left(y_a\right) \left( \begin{array}{l} \sum\limits_{\tau=1}^{\alpha} A \cdot C_k^{\tau} p_{11} + \\ + \sum\limits_{\tau=0}^{\gamma} k \cdot A \cdot C_{k-1}^{\tau} p_{10} \end{array} \right) +$$
$$+ \sum_{b=1}^{C_{n-1}^{k-1}} p\left(y_b\right) \left( \begin{array}{l} \sum\limits_{\tau=1}^{\beta} B \cdot C_{n-k}^{\tau} p_{00} + \\ + \sum\limits_{\tau=0}^{\gamma} (n-k) B \cdot C_{n-k-1}^{\tau} p_{01} \end{array} \right). \qquad (39)$$

Вероятность $V_{КРК}$ необнаруживаемой ошибки (39) зависит от вероятности появления квазиравновесных комбинаций $y_a \in Y[k, n-k-1]$ и $y_b \in Y[k-1, n-k]$. В предположении, что комбинации $y_a$ и $y_b$ возникают с равными вероятностями

$$p(y_a) = p(y_b) = \frac{1}{N_{КРК}} = \frac{1}{C_n^k},$$

получаем вероятности появления комбинаций из подмножеств $Y[k, n-k-1]$ и $Y[k-1, n-k]$:

$$\sum_{a=1}^{C_{n-1}^{k}} p(y_a) = \frac{N_k}{N_{КРК}} = \frac{C_{n-1}^{k}}{C_n^k}, \qquad (40)$$

$$\sum_{b=1}^{C_{n-1}^{k-1}} p(y_b) = \frac{N_{k-1}}{N_{КРК}} = \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k}. \qquad (41)$$

Следовательно, при равновероятности комбинаций КРК вероятность $V_{КРК}$ необнаруживаемой ошибки (39) с учетом (40) и (41) будет иметь значение:

$$V_{КРК} = \frac{C_{n-1}^{k}}{C_n^k} \left( \begin{array}{l} \sum\limits_{\tau=1}^{\alpha} A \cdot C_k^{\tau} p_{11} + \\ + \sum\limits_{\tau=0}^{\gamma} k \cdot A \cdot C_{k-1}^{\tau} p_{10} \end{array} \right) +$$
$$+ \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k} \left( \begin{array}{l} \sum\limits_{\tau=1}^{\beta} B \cdot C_{n-k}^{\tau} p_{00} + \\ + \sum\limits_{\tau=0}^{\gamma} (n-k) B \cdot C_{n-k-1}^{\tau} p_{01} \end{array} \right). \qquad (42)$$

При больших $n$ вероятности квазиравновесных комбинаций можно считать равными друг другу и на практике с относительно небольшой погрешностью проводить вычисления $V_{КРК}$ по формуле (42).

## Выводы

Полученные соотношения (39) и (42) для обобщенных вероятностей $V_{КРК}$ необнаруживаемой ошибки отражают реальные условия применения квазиравновесных комбинаций:

1) использование не только для передачи информации, но и для решения других информационных задач – сбора, преобразования и хранения данных, формирования управляющих воздействий;

2) наличие одновременно как асимметричных, так и симметричных ошибок, подразумевая использование КРК не только в аппаратуре передачи данных, но и в других электронных устройствах.

В соответствии с целью данной работы равенства (39) и (42) позволяют получить точные оценки ошибкообнаруживающей способности КРК в зависимости от его параметров $n$ и $k$, моделей канала связи и электронного устройства, модели ошибок, а также их асимметрии и кратности.

Анализ структуры и свойств КРК показывает, что при больших значениях длины $n$ он практически не уступает в ошибкообнаруживающей способности равновесным кодам, а также кодам Бергера, но при этом в несколько раз превосходит их по информационной мощности, что предопределяет эффективность использования КРК в различных системах обработки информации.

## Список літератури


1. *Цымбал, В.П. Теория информации и кодирование / В.П. Цымбал – К.: Вища шк., 1992. – 263 с.*
2. *Kohzuki, K. A Class of Single Error Correcting Constant Weight Codes / K. Kohzuki, K. Tokiwa, H. Tanaka // Electronics and Communications in Japan. – Part 3, Vol. 80, 1997. – No. 7. – P. 55-64.*
3. *Kulyk, I. A. On cardinality of quasi-constant weight and constant weight codes/ I. A. Kulyk, O. M. Skordina, S. V. Kostel // 23[d] Int. Crimean Conf. “Microwave & Telecommunication Technology” (CriMiCo’2013). – Sevastopol, 2013. – P. 541-542.*
4. *Кулик, И. А. Формирование квазиравновесных кодов на основе двоичных биномиальных чисел / И. А. Кулик, Е. М. Скордина, С. В. Костель // Вісник Сумського державного університету. – 2010. – № 1. – С. 134-142.*
5. *Кулик, И. А. Генерирование кодов-сочетаний для решения информационных задач ИУС / И. А. Кулик, Е. М. Скордина, С. В. Костель // АСУ и приборы автоматики. Всеукраин. межведомст. сборник. – 2011. – № 155. –С. 15-23.*
6. *Mao-Chao, Lin. Constant Weight Codes for Correcting Symmetric Errors and Detecting Unidirectional Errors / Lin Mao-Chao // IEEE Transactions on Computers. – Nov. 1993. – Vol. 42, № 11. – P. 1294-1302.*
7. *Butler, J. T. High-Speed Constant Weight Codeword Generators / J. T. Butler, T. Sasao // ARC2011, LNCS 6578. – 2011. – P. 193-205.*
8. *Agrell, E. Upper bounds for constant-weight codes / E. Agrell, A. Vardy, K. Zeger // IEEE Transactions on Information Theory. – Nov. 2000. – Vol. 46, № 7. – P. 2373-2395.*
9. *Кулик, И. А. Биномиальные преобразования квазиравновесных кодов / И. А. Кулик, Е. М. Скордина // Вісник Сумського державного університету. – 2010. – № 3. – С. 178-186.*
10. *Кулик, И. А. Ошибкообнаруживающая способность квазиравновесного кода / И. А. Кулик, Е. М. Скордина, С. В. Посный // Вісник Сумського державного університету. – 2012. – №1. – С. 100-111.*
11. *Борисенко, А. А. Оценка помехоустойчивости неразделимых кодов / А. А. Борисенко, Е. Л. Онанченко // Вісник Сумського державного університету. – 1994. – №2. – С. 64-68.*
12. *Сачков, В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики / В. Н. Сачков. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. – 384 с.*


*Поступила в редколлегию 14.10.2014*

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. А.А. Борисенко, Сумский государственный университет, Сумы.

### УЗАГАЛЬНЕНІ ЙМОВІРНОСТІ НЕВИЯВЛЕНОЇ ПОМИЛКИ ДЛЯ КВАЗІРІВНОВАЖНИХ КОДІВ

І.А. Кулик, А.І. Новгородцев, О.М. Скордіна, В.В. Арбузов

*У роботі визначені умови невиявлення помилок для квазірівноважних кодів та їх кратність під час впливу завад у каналі передачі або виникненні апаратного збою. Також отримані аналітичні вирази для ймовірності невиявленої помилки квазірівноважного коду, яка залежить від ймовірності помилкових порозрядних переходів, типу та кратності помилки. Результати досліджень дозволяють визначити області найбільш ефективного застосування даного класу кодів при побудові цифрових пристроїв із здатністю виявлення помилок у їх роботі.*

***Ключові слова:*** *квазірівноважний код, рівноважний код, помилковиявляюча здатність, ймовірність невиявленої помилки.*

### GENERALIZED UNDETECTED ERROR EXPECTANCY OF AN QUASI-CONSTANT WEIGHT CODE

I.A. Kulyk, A.I. Novgorodsev, E.M. Skordina, V.V. Arbuzov

*For quasi-constant weight codes the conditions of undetected errors and their multiplicity at influence of noise in a transmission channel or occurring faults in devices are determined in the paper. The formula of the undetected error probability for a quasi-constant weight code, which depends on an error probability of bit-by-bit crossings, type and multiplicity of errors are obtained. The results of the researches make it possible to determine the fields of effective application for the given types of codes at designing digital units with error detection ability.*

***Keywords:*** *quasi-constant weight code, constant weight code, error detection ability, undetected error probability.*