

Математичні моделі та методи

УДК 515.164.15 : 517.925

В.Ю. Дубницький, А.И. Ходырев

Харьковский учебно-научный институт ГВУЗ Университета банковского дела, Харьков

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ГЕОМЕТРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ КАТАСТРОФ. КАСПОИДНЫЕ КАТАСТРОФЫ

Для каспоидных катастроф типа: складка, сборка первого типа, сборка второго типа, ласточкин хвост, бабочка первого типа, бабочка второго типа, вигвам, в явном виде определены элементарные дифференциально-геометрические характеристики, такие, как: отрезки касательной, подкасательной, нормали, поднормали, кривизну и радиус кривизны катастрофы, координаты центра её кривизны.

Ключевые слова: теория катастроф, каспоидные катастрофы, катастрофы типа: складка, сборка первого типа, сборка второго типа, ласточкин хвост, бабочка первого типа, бабочка второго типа, вигвам, касательная, подкасательная, нормаль, поднормаль, кривизна кривой, радиус кривизны, координаты центра кривизны кривой.

Введение

В современном представлении математическую теорию катастроф рассматривают как часть качественной теории нелинейных систем, которая позволяет предсказывать скачкообразные изменения состояния системы при плавном изменении её параметров. Формальное определение катастрофы как математического объекта с особыми свойствами и рассмотрение возникающих при этом задач дано в работах [1–3]. Для изложения дальнейшего материала примем следующее определение, приведенное в различных вариантах в работах [1–3]. Предметом теории катастроф служит изучение зависимости поведения систем различной природы (решения уравнений, моделирующих поведение этих систем) в зависимости от изменения значений коэффициентов, определяющих её состояние.

Анализ литературы. В соответствии с работами [1–4] рассмотрим многочлен не менее чем третьей степени:

$$G = V(X, C), \quad X = x_1, \dots, x_j, \dots, x_n; \quad C = c_1, \dots, c_\alpha, c_k, \quad (1)$$

зависящий от n переменных и дифференцируемый не менее двух раз. Примем, что $1 \leq j \leq n$ и $1 \leq \alpha \leq k$. Такой многочлен называют потенциальной функцией катастрофы. В условии (1) вектор переменных X называют вектором фазовых координат системы (1), вектор C называют вектором управляющих параметров этой же системы. Выражение (1) называют потенциальной функцией катастрофы. Состояние равновесия системы (1) определяют из условия:

$$F(X, C) = \text{grad}V(X, C) = 0. \quad (2)$$

Решение этой системы относительно вектора переменных $X = X(C)$ определяет критические точки системы, определяемой условием (1). Задача эле-

ментарной теории катастроф состоит в изучении влияния изменения значений вектора управляющих параметров C на изменение вектора фазовых координат X системы (1). Для дальнейшего нам потребуются также неморсовы точки, определяющие множество сингулярности для системы (1). Их определяют по условию:

$$\det H(V(X, C)) = 0, \quad (3)$$

где $H(V(X, C))$ – гессиан функции $V(X, C)$.

В табл. 1, 2 приведены потенциальные функции основных, так называемых, элементарных катастроф. Их выражения заимствованы из работы [1, С. 161]. В этих таблицах, для сохранения преемственности с терминологией, принятой в работе [1, 5] и удобства последующего анализа, катастрофой второго типа названа двойственная катастрофа по отношению к катастрофе первого типа. В табл. 1 приведены потенциальные функции катастроф, зависящие от одной переменной – каспоидные катастрофы. В табл. 2 приведены потенциальные функции катастроф, зависящие от двух переменных – омбилические катастрофы. В работах по математическому анализу [6] и дифференциальной геометрии [7] сказано, что плоскую линию можно задать в явном виде:

$$y = f(x); \quad (4)$$

и неявном виде:

$$F(x, y) = 0. \quad (5)$$

Из условия (1) следует, что потенциальные функции каспоидных катастроф можно рассматривать как линии, заданные в явном виде. Из условий (2) и (3) следует, что для потенциальных функций омбилических катастроф линиями, заданными в неявном виде, можно считать состояния равновесия и множества сингулярности. В работе [6] к свойствам линий, изу-

чаемых с помощью приложения дифференциального исчисления к геометрии, отнесены: получение уравнения касательной, определение длин отрезка касательной, отрезка нормали, отрезка подкасательной, отрезка

поднормали, определение кривизны кривой и координат центра кривизны. Для линий, заданных в явном виде, в виде (4), из работ [6, 8 – 10] известны следующие соотношения, приведенные в табл. 3.

Таблица 1

Потенциальные функции каспоидных катастроф

Тип каспоидной катастрофы	Каноническая форма (потенциальная функция)
Складка	$V(x) = x^3 + ux$
Сборка первого типа	$V(x) = x^4 + ux^2 + hx$
Сборка второго типа	$V(x) = -(x^4 + ux^2 + hx)$
Ласточкин хвост	$V(x) = x^5 + ux^3 + hx^2 + wx$
Бабочка первого типа	$V_1(x) = x^6 + tx^4 + ux^3 + hx^2 + wx$
Бабочка второго типа	$V_2(x) = -(x^6 + tx^4 + ux^3 + hx^2 + wx)$
Вигвам	$V(x) = x^7 + tx^5 + ux^4 + hx^3 + gx^2 + rx$

Таблица 2

Потенциальные функции омбилических катастроф

Тип омбилической катастрофы	Каноническая форма (потенциальная функция)
Эллиптическая омбилика	$V(x, y) = x^2y - y^3 + tx^2 + gy + hx$
Гиперболическая омбилика	$V(x, y) = x^2y + y^3 + tx^2 + gy + hx$
Параболическая омбилика первого типа	$V(x, y) = x^2y + y^4 + ay^2 + bx^2 + cy + gx$
Параболическая омбилика второго типа	$V(x, y) = (-1) \cdot (x^2y + y^4 + ay^2 + bx^2 + cy + gx)$
Вторая эллиптическая омбилика	$V(x, y) = x^2y - y^5 + ay^3 + by^2 + cx^2 + gy + hx$
Вторая гиперболическая омбилика	$V(x, y) = x^2y + y^5 + ay^3 + by^2 + cx^2 + gy + hx$
Символическая омбилика первого типа	$V(x, y) = x^3 + y^4 + axy^2 + by^2 + cxy + gy + hx$
Символическая омбилика второго типа	$V(x, y) = (-1) \cdot (x^3 + y^4 + axy^2 + by^2 + cxy + gy + hx)$

Таблица 3

Основные дифференциально-геометрические характеристики для линий, заданных в явном виде

№ п/п	Наименование характеристики	Уравнение
1	Касательная в точке (x_0, y_0)	$y - y_0 = y'_0(x - x_0)$
2	Нормаль в точке (x_0, y_0)	$-y'_0(y - y_0) = x - x_0$
3	Отрезок касательной	$MT = \left (y/y') \cdot \sqrt{1 + (y')^2} \right $
4	Отрезок нормали	$MN = \left y \sqrt{1 + (y')^2} \right $
5	Подкасательная	$PT = y/y' $
6	Поднормаль	$PN = yy' $
7	Кривизна кривой в произвольной точке $M(x, y)$	$K = y''(x) / \left(1 + (y')^2 \right)^{3/2}$
8	Радиус кривизны в произвольной точке $M(x, y)$	$R = 1/K$
9	Координаты ξ, η центра C кривизны	$\xi = x - y' \left(1 + (y')^2 \right) / y''; \eta = y + \left(1 + (y')^2 \right) / y''; y'' \neq 0.$

В табл. 3 условные обозначения характеристик совпадают с аналогичными обозначениями, принятыми в работе [8].

Для линий, заданных в явном виде, в виде (5), из работ [6, 9, 10], известны следующие соотношения, приведенные в табл. 4.

Основные дифференциально-геометрические характеристики для линий, заданных в неявном виде

№ п/п	Наименование характеристики	Уравнение
1	Касательная в точке (x_0, y_0)	$F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) = 0$
2	Нормаль в точке (x_0, y_0)	$(x - x_0)/F'_x = (y - y_0)/F'_y$
3	Кривизна кривой в произвольной точке $M(x, y)$	$K = \left D / \left((F'_x)^2 + (F'_y)^2 \right)^{3/2} \right $
4	Радиус кривизны в произвольной точке $M(x, y)$	$R = 1/K$
5	Координаты ξ, η центра C кривизны	$\xi = x - \frac{F'_x \left((F'_x)^2 + (F'_y)^2 \right)}{D}; \eta = y + \frac{F'_y \left((F'_x)^2 + (F'_y)^2 \right)}{D}$

В табл. 4 принято, что определитель

$$D = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

В доступной авторам литературе, например [11 – 13], аналитические выражения для определение этих свойств элементарных катастроф не найдены. Следует отметить, что определение уравнений касательной и нормали не вызывает затруднений, поэтому в рамках данной работы они не рассмотрены.

Постановка задачи. Для линий, соответствующих потенциальным функциям каспоидных и омбилических катастроф, определить аналитические выражения для отрезка касательной, отрезка нормали, подкасательной, поднормали, координаты центра кривизны, кривизну кривой, радиус кривизны. Для омбилических катастроф определяли выражения только для трёх последних свойств.

Полученные результаты

В данной работе для катастроф, которые могут быть представлены в виде функции одной переменной – каспоидных катастроф, получены их дифференциально-геометрические характеристики, приведенные в табл. 1. Уравнения касательной и нормали опущены вследствие их очевидности. Для каждого типа катастроф сохранены те обозначения, которые указаны в табл. 1, их область действия ограничена типом рассматриваемой катастрофы. Для сокращения объёма статьи все промежуточные выкладки не приведены.

РАССМОТРИМ КАТАСТРОФУ ТИПА СКЛАДКИ. Её уравнение имеет вид:

$$V(x) = x^3 + ux. \quad (7)$$

Отрезок касательной:

$$MT = \left| x(x^2 + u) / (3x^2 + u) \right| \sqrt{9x^4 + 6ux^2 + u^2 + 1}. \quad (8)$$

Отрезок нормали:

$$MN = \left| x(x^2 + u) \right| \sqrt{9x^4 + 6ux^2 + u^2 + 1}. \quad (9)$$

Подкасательная:

$$PT = \left| x(x^2 + u) / (3x^2 + u) \right| = \left| \frac{2ux}{3(3x^2 + u)} + \frac{x}{3} \right|. \quad (10)$$

Поднормаль:

$$PN = \left| x(x^2 + u)(3x^2 + u) \right| = \left| 3x^5 + 4ux^3 + u^2x \right|. \quad (11)$$

Кривизна кривой в произвольной точке $M(x, y)$:

$$K = \frac{6|x|}{(1 + z^2)^{3/2}} = \frac{6|x|}{(9x^4 + 6ux^2 + u^2 + 1)^{3/2}}. \quad (12)$$

Координаты ξ, η её центра кривизны C :

$$\xi = \frac{x(1 - 3u^2)}{2} - \left[\frac{u(u^2 + 1)}{6x} + \frac{9ux^3}{2} + \frac{9x^5}{2} \right]; \quad (13)$$

$$\eta = \frac{15x^4 + 12ux^2 + u^2 + 1}{6x}. \quad (14)$$

РАССМОТРИМ КАТАСТРОФЫ СБОРКИ.

Уравнение катастрофы сборки 1-го вида имеет вид:

$$V(x) = x^4 + ux^2 + hx. \quad (15)$$

Для катастроф сборки, независимо от их вида, введём следующие вспомогательные обозначения:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 2ux + h = z; \quad (16)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 + 2u = \beta; \quad (17)$$

$$A = B + C; \quad (18)$$

$$B = 16x^6 + 16ux^4 + 8h^3; \quad (19)$$

$$C = 4u^2x^2 + 4hux + h^2 + 1; \quad (20)$$

$$D = 6x^2 + u. \quad (21)$$

Для катастрофы типа сборки первого вида для её дифференциально-геометрических свойств получим следующие выражения:

Отрезок касательной:

$$MT = \sqrt{|A|} \left| \frac{x(x^3 + ux + h)}{4x^3 + 2ux + h} \right|. \quad (22)$$

Отрезок нормали:

$$MN = \sqrt{|A|} \cdot \left| x(x^3 + ux + h) \right|. \quad (23)$$

Подкасательная:

$$PT = \left| x(x^3 + ux + h) / (4x^3 + 2ux + h) \right| = \left| \frac{ux^2}{2(4x^3 + 2ux + h)} + \frac{3hx}{4(4x^3 + 2ux + h)} + \frac{x}{4} \right|. \quad (24)$$

Поднормаль:

$$PN = \left| x(x^3 + ux + h)(4x^3 + 2ux + h) \right|. \quad (25)$$

Кривизна кривой в произвольной точке $M(x, y)$:

$$K = \frac{12x^2 \cdot \text{sign}(6x^2 + u)}{A^{3/2}} + \frac{2u \cdot \text{sign}(6x^2 + u)}{A^{3/2}}. \quad (26)$$

Координаты ξ, η центра C кривизны следующие:

$$\xi = x - z(1 + z^2)/\beta; \quad (27)$$

$$\zeta = - \left[\begin{aligned} & \frac{h^3}{2D} + \frac{3h^2x(u + 2x^2)}{D} + \\ & \frac{h(12u^2x^2 + 48ux^4 + 48x^6 + 1)}{2D} + \\ & \frac{4x^3(u^3 + 6u^2x^2 + 12ux^4 + 8x^6 - 1)}{D} \end{aligned} \right]. \quad (28)$$

Для катастрофы типа сборки второго вида координаты ξ, η её центра кривизны C следующие:

$$\xi = - \left[\frac{(h^3 - 24h^2x^3 + h(192x^6 + 1) - 8x^3(64x^6 + 1))}{2D} + \frac{4u^2x^3 + 6ux^2 + 3x(h^2 - 4hx^3 + 16x^6)}{2D} \right]; \quad (29)$$

$$\eta = - \left[\frac{h^2}{2D} + \frac{hx(3u + 10x^2)}{D} + \frac{6u^2x^2 + 30ux^4 + 28x^6 + 1}{2D} \right]. \quad (30)$$

РАССМОТРИМ КАТАСТРОФУ ТИПА ЛАС-ТОЧКИН ХВОСТ. Уравнение катастрофы типа ласточкин хвост имеет вид:

$$V(x) = x^5 + ux^3 + hx^2 + \omega x = y. \quad (31)$$

Для упрощения дальнейшего изложения примем:

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 3ux^2 + 2hx + \omega = z; \quad (32)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} 20x^3 + 6ux + 2h = \beta. \quad (33)$$

С учётом введенных в (34) и (35) обозначений получим уравнение отрезка касательной в виде:

$$MT = \left[\frac{x}{2} - \frac{x(ux^2 - \omega + 3x^4)}{2(2hx + 3ux^2 + \omega + 5x^4)} \right] \cdot \sqrt{1 + z^2}. \quad (34)$$

Отрезок нормали:

$$MN = \left| y\sqrt{1 + z^2} \right|. \quad (35)$$

Подкасательная:

$$PT = \left[\frac{x}{2} - \frac{x(ux^2 - \omega + 3x^4)}{2(2hx + 3ux^2 + \omega + 5x^4)} \right]. \quad (36)$$

Поднормаль:

$$MT = \left| PT\sqrt{1 + z^2} \right|. \quad (37)$$

Кривизна кривой в произвольной точке $M(x, y)$:

$$K = 2 \left| h + x(3u + 10x^2) \right| / \Omega, \quad (38)$$

Где принято, что:

$$\Omega = \left\{ \begin{aligned} & \omega^2 + 2\omega x [2h + x(3u + 5x^2)] 4h^2x^2 + \\ & + 4h^3(3u + 5x^2) + 9u^2x^4 + 30ux^6 + 25x^8 + 1. \end{aligned} \right\}^{3/2} \quad (39)$$

Для удобства вычисления координат ξ, η центра C кривизны примем, что:

$$B = 2 \left[h + x(3u + 10x^2) \right]; \quad (40)$$

$$C = 12h^2x^2 + 12hx^3(3u + 5x^2) = 12hx^2 \left[h + x(3u + 5x^2) \right]; \quad (41)$$

$$D = 27u^2x^4 + 90ux^6 + 75x^8 + 1; \quad (42)$$

$$E = 8h^3x + 12h^2x^2(3u + 5x^2); \quad (43)$$

$$F = 6hx^3(9u^2 + 30ux^2 + 25x^4); \quad (44)$$

$$G = 2(3ux + h + 10x^3); \quad (45)$$

$$H = \Sigma + \Psi; \quad (46)$$

$$\Sigma = h^3x^3 + 3h^2x^2(\omega - 5x^4) + hx(3\omega^3 - 30\omega x^4 + 75x^8 + 1); \quad (47)$$

$$\Psi = \omega^3 - 15\omega^2x^4 + \omega(75x^8 + 1) - 5x^4(25x^8 + 1); \quad (48)$$

$$Z = ux^3(15hx + 9\omega + 15x^4 + 2); \quad (49)$$

$$L = x \left[\begin{aligned} & 7h^2x^2 + hx(9\omega + 5x^4 + 2) + \\ & + 3\omega^2 + 2\omega + 25x^8 + 2x^4 + 1 \end{aligned} \right]. \quad (50)$$

Координаты ξ, η центра кривизны C катастрофы типа ласточкин хвост определим по условиям:

$$\zeta = - \left\{ B^{-1} \left[\begin{aligned} & \omega^3 + 3\omega^2xC + \omega(C + D) + \\ & + x^2E + F + 27u^2x^4 + 135x \\ & \times (u^2x^6 + 3u(75x^8 - 1) + 5x^2(25x^8 - 3)) \end{aligned} \right] \right\}; \quad (51)$$

$$\eta = G^{-1}H + \frac{1}{2}(9u^2x^5 + Z + L). \quad (52)$$

РАССМОТРИМ КАТАСТРОФЫ БАБОЧКА. Уравнение катастрофы БАБОЧКА первого вида имеет вид:

$$V(x) = x^6 + tx^4 + ux^3 + \omega x = y. \quad (53)$$

Для катастроф типа БАБОЧКА, независимо от их вида, введём вспомогательные обозначения:

$$\frac{dy}{dx} = 6x^5 + 4tx^3 + 3ux^2 + \omega = z; \quad (54)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 30x^4 + 12tx^2 + 6x = \beta. \quad (55)$$

Тогда отрезок касательной примет вид:

$$MT = \left| \left(\frac{tx^4}{3A} + \frac{ux^3}{2A} + \frac{5\omega x}{6A} + \frac{x}{6} \right) \sqrt{1+z^2} \right|; \quad (56)$$

где $A = 6x^5 + 4tx^3 + 3ux^2 + \omega. \quad (57)$

Отрезок нормали примет вид:

$$MN = \left| y \sqrt{1+z^2} \right|. \quad (58)$$

Уравнение для подкасательной примет вид:

$$PT = \left| \frac{tx^4}{3A} + \frac{4x^3}{2A} + \frac{5\omega x}{6A} + \frac{x}{6} \right|. \quad (59)$$

$$B = 8t^3x^9 + 12t^2x^6(9x^5 - \omega)$$

$$+ 2tx^3(3\omega^2 - 54\omega x^5 + 243x^{10} + 1) - \omega^3 +$$

$$+ 729x^{15} + 9x^5 + 27\omega^2x^5 - \omega(243x^{10} + 1)$$

$$C = 6x \left[u + x(2t + 5x^2) \right]; \quad (65)$$

$$D = x \left(12t^2x^6 + 6tx^3(\omega + 6x^5) + 3\omega^2 - 9\omega x^5 + 63x^{10} - 1 \right). \quad (66)$$

Тогда $\eta = (E + F)/C, \quad (67)$

где принято, что:

$$E = 15u^2x^4 + 6ux^2(12x^5 + 7tx^3 + 2\omega); \quad (68)$$

$$F = 66x^{10} + 72ux^7 + 42\omega x^5 + 15u^2x^4 + 12u\omega x^2 + \omega^2 + 1. \quad (69)$$

Уравнение катастрофы типа БАБОЧКА ВТОРОГО ВИДА имеет вид:

$$V(x) = -(x^6 + tx^4 + ux^3 + hx^2 + \omega x). \quad (70)$$

Координаты ξ, η центра кривизны С катастрофы типа БАБОЧКА ВТОРОГО ВИДА определим по условиям:

$$\zeta = x - \frac{6x^5 + 4tx^3 + 3ux^2 + 2hx + \omega}{2(15x^4 + 6tx^2 + 3ux + h)} \times$$

$$\times \left(1 + 4(15x^4 + 6tx^2 + 3ux + h) \right); \quad (71)$$

где $\eta = - \left[\frac{A}{B} + \frac{5ux^3}{2} + x(5hx + 4tx^3 + 4\omega + x^5) \right]; \quad (72)$

$$A = C + E + F; \quad (73)$$

$$C = h^2x^2 - 2hx(2tx^3 - \omega + 9x^5); \quad (74)$$

Кривизна кривой в произвольной точке $M(x, y)$:

$$K = 6 \left| x(5x^3 + 2tx + u) \right| / E^{3/2}, \quad (60)$$

где

$$E = \left[\begin{array}{l} \omega^2 + 2\omega x^2(6x^3 + 4tx + 3u) + \\ + 36x^{10} + 48tx^8 + 36ux^7 + 16x^2 + \\ + 24ux^5 + 9u^2x^2 \end{array} \right]^{3/2}. \quad (61)$$

Координаты ξ, η центра кривизны С катастрофы типа БАБОЧКА ПЕРВОГО ВИДА определим по условиям:

$$\xi = \frac{B}{C} - \frac{9u^2x^5}{2} - \frac{9ux^3(2tx^3 + \omega + x^5)}{2} - \frac{D}{2}, \quad (62)$$

где

$$B = 8t^3x^9 + 12t^2x^6(9x^5 - \omega) + 2tx^3(3\omega^2 - 54\omega x^5 + 243x^{10} + 1) - \omega^3 +$$

$$+ 729x^{15} + 9x^5 + 27\omega^2x^5 - \omega(243x^{10} + 1);$$

$$+ 2tx^3(3\omega^2 - 54\omega x^5 + 243x^{10} + 1) - \omega^3 +$$

$$+ 729x^{15} + 9x^5 + 27\omega^2x^5 - \omega(243x^{10} + 1)$$

$$E = 4t^2x^6(9x^5 - \omega); \quad (75)$$

$$F = \omega^2 - 18\omega x^5 + 81x^{10} + 1. \quad (76)$$

РАССМОТРИМ КАТАСТРОФУ ТИПА ВИГВАМ. Её уравнение имеет вид:

$$V(x) = x^7 + tx^5 + ux^4 + hx^3 + gx^2 + rx = y. \quad (77)$$

Примем, что:

$$\frac{dy}{dx} = 7x^6 + 5tx^4 + 4ux^3 + 3hx^2 + 2gx + r = z; \quad (78)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 42x^5 + 20tx^3 + 12ux^2 + 6hx + 2g = \beta. \quad (79)$$

Отрезок подкасательной:

$$PT = \left| (7z)^{-1} (2tx^5 + 3ux^4 + 4hx^3 + 5gx^2 + 6rx) + \frac{x}{7} \right|. \quad (80)$$

Отрезок касательной:

$$MT = \left| PT \sqrt{1+z^2} \right|. \quad (81)$$

Поднормаль:

$$PN = x(x^6 + tx^4 + ux^3 + hx^2 + gx + r)z. \quad (82)$$

Кривизна кривой в произвольной точке $M(x, y)$:

$$k = \frac{2|21x^5 + 10tx^3 + 6ux^2 + 3hx + g|}{(A + C + E + D + F + G + H + I + J)^{3/2}}. \quad (83)$$

В условии (82) принято, что:

$$A = 49x^{12} + 70tx^{10} + 56ux^9; \quad (84)$$

$$C = x^8(42h + 25t^2); \quad (85) \quad E = 4x^7(7g + 10tu); \quad (86)$$

$$D = 2x^6(15ht + 7r + 8u^2); \quad (87) \quad F = 4x^5(5gt + 6hu); \quad (88)$$

$$G = x^4(16gu + 9h^2 + 10rt); \quad (89) \quad H = 4x^3(3gh + 2ru); \quad (90)$$

$$I = 2x^2(2g^2 + 3hr); \quad (91) \quad J = 4grx + r^2 + 1. \quad (92)$$

Координаты ξ, η её центра кривизны C :

$$\xi = x - \frac{7x^6 + 5tx^4 + 4ux^3 + 3hx^2 + 2gx + r}{2(21x^5 + 10tx^3 + 6ux^2 + 3hx + g)}(1 + z^2); \quad (93)$$

$$\eta = W^{-1} \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} g^2x^2 + 2gx(r - x^3S) + r^2 - 2rx^3S + \\ + 25t^2x^8 + 20tx^7(u + 7x^3) + V \end{array} \right] + \\ + \frac{5hx^3}{2} + x(5gx + 4r + 2tx^4 + x^3(4u - 5x^3)) \end{array} \right]. \quad (94)$$

В условиях (92), (93) принято, что:

$$W = 2(3hx + g + x^2(10tx + 3(2u + 7x^3))); \quad (95)$$

$$V = U^2x^6 + 56ux^2 + 196x^2 + 1; \quad (96)$$

$$S = 5tx + 2(u + 7x^3). \quad (97)$$

Полученные в данном сообщении простейшие дифференциально-геометрические характеристики каспоидных катастроф могут быть использованы при моделировании взрывных процессов различной природы.

Выводы

1. Предложено для каспоидных и омбилических катастроф определять такие элементарные дифференциально-геометрические характеристики, как отрезки касательной, подкасательной, нормали, поднормали, кривизну и радиус кривизны катастрофы, координаты центра её кривизны.

2. Для катастроф типа складка, сборка первого типа, сборка второго типа, ласточкин хвост, бабочка первого типа, бабочка второго типа, вигвам эти характеристики определены в явном виде.

3. Полученные результаты рекомендуется использовать при моделировании взрывных процессов различной природы.

Список литературы

1. Постон Т. Теория катастроф и её приложения. [Текст] / Т. Постон, И. Стюарт. – М.: Мир, 1980. – 607 с.
2. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. [Текст] / Р. Гилмор // М.: Мир, 1984. – Кн. 1. – 350 с., кн. 2. – 285 с.
3. Томпсон Дж. М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. [Текст] / Дж. М. Томпсон. – М.: Мир, 1985. – 254 с.
4. Цветков В.И. Теория катастроф и фрактальная модель кризисных социально-экономических процессов. [Текст] / И.В. Цветков // Вестник ТвГУ. Серия: «Прикладная математика». – 2010. – Вып. 19. – С. 71-79.
5. Бекман И.Н. Катастрофы. Курс лекций. [Электронный ресурс] / И.Н. Бекман. – Режим доступа <http://beckuniver.ucoz.ru/Katastrofy/Katastrofy.htm>.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления в 3 т. [Текст] / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Физматгиз, 1962. – Т.1. – 607 с.
7. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. [Текст] / А.В. Погорелов. – М.: Наука, 1974. – 176 с.
8. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. [Текст] / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
9. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. [Текст] / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Физматгиз, 1959. – 608 с.
10. Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах: учебное пособие для вузов. В 3 т. Т. 1. [Текст] / В.Д. Черненко. – СПб.: Политехника, 2003. – 703 с.
11. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. (Справочное пособие) [Текст] / А.А. Савелов. – М.: Физматгиз, 1960. – 294 с.
12. Шикин Е.В. Кривые на плоскости и в пространстве. Справочник. [Текст] / Е.В. Шикин, М.М. Франк-Каменецкий. – М.: Физматгиз, 1997. – 336 с.
13. Kock J. Konsevich's for Rational Plane Curves [Текст] / J. Kock, I. Vainsencher. – Resife, 1999. – 145 p.

Поступила в редколлегию 6.10.2015

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. М.В. Новожилова, Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, Харьков.

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ГЕОМЕТРІЇ ЕЛЕМЕНТАРНИХ КАТАСТРОФ. КАСПОЇДНІ КАТАСТРОФИ

В.Ю. Дубницький, О.І. Ходирев

Для каспоїдних катастроф типу складка, збірка першого типу, збірка другого типу, ластівчин хвіст, метелик першого типу, метелик другого типу, вигвам в явному вигляді визначено елементарні диференціально-геометричні характеристики, такі, як: відрізки дотичної, піддотичної, нормалі, піднормалі, кривизну і радіус кривизни катастрофи, координати центру її кривизни.

Ключові слова: теорія катастроф, каспоїдні катастрофи, катастрофи типу: складка, збірка першого типу, збірка другого типу, ластівчин хвіст, метелик першого типу, метелик другого типу, вигвам, дотична, піддотична, нормаль, піднормаль, кривизна кривої, радіус кривизни, координати центру кривизни кривої.

APPLICATIONS OF DIFFERENTIAL CALCULUS TO GEOMETRY OF ELEMENTARY CATASTROPHES. CASPOID CATASTROPHES

V.Yu. Dubnitskiy, A.I. Khodyrev

For caspoid catastrophes of types: fold, first type gather, second type gather, dovetail, first type butterfly, second type butterfly, wigwam elementary differential geometric characteristics were determined explicitly, such as: sections of tangent, subtangent, normal, subnormal, curvature and curvature radius of catastrophe, its curvature center coordinates.

Keywords: catastrophe theory, caspoid catastrophes, catastrophes of types: fold, first type gather, second type gather, dovetail, first type butterfly, second type butterfly, wigwam, tangent, subtangent, normal, subnormal, curve curvature, curvature radius, curve curvature center coordinates.