УДК 651. 34

А.Э. Горюшкина

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАРТЛИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА МОМЕНТОВ

Проведен анализ дискретных преобразований Фурье и Хартли. Определена целесообразность усовершенствования дискретного преобразования Хартли для решения задач оперативного сжатия данных. Усовершенствовано дискретное преобразование Хартли на основе метода моментов. Разработан алгоритм и предложена структурная схема быстрого вычисления дискретного преобразования Хартли. Сделаны выводы о целесообразности модульного сопоставление функций в расчетах дискретного преобразования Хартли.

Ключевые слова: *дискретное преобразование Хартли, метод моментов.*

Введение

Постановка проблемы. Компрессия цифровых данных играет важную роль в повышении эффективности использования коммуникационных и информационно вычислительных ресурсов различных систем связи. Проведенные исследования показали, что основой эффективного процесса сжатия данных является компромисс между требованиями к показателям компрессии, возможностями реальной аппаратуры и экономически обоснованными параметрами, заложенными в качестве входных в алгоритмы сжатия. При этом в процессе передачи мультимедийной информации особенно важным является обеспечение оперативности передачи данных с возможным ухудшением визуального качества и достоверности.

Анализ литературы [1 – 5] а также методов и алгоритмов сжатия данных показал, что одним из наиболее эффективных подходов, реализующих указанные выше требования к качеству передачи мультимедийной информации, является использование дискретных ортогональных преобразований.

Дискретное преобразование Хартли широко применяется в обработке цифровых сигналов [1] и трансформирует одни вещественные функции в другие вещественные функции, не используя мнимую часть функции. По своим свойствам дискретное преобразование Хартли во многом похоже на дискретное преобразование Фурье [2]. Однако ряд недостатков (низкая скорость вычисления преобразования, ограниченность выбора функций и ее условий, разбиение на блоки с последующим сжатием информации, что ведет к снижению качества при больших коэффициентах сжатия) присущих дискретному преобразованию Фурье, в значительной степени сужает его практическую ценность и позволяет утверждать факт целесообразности использования дискретного преобразования Хартли.

Поскольку дискретное преобразование Хартли является аналогом дискретного преобразования Фурье [3], то его можно рассматривать и в качестве замены быстрого преобразования Фурье, позволяющего обеспечить существенное снижение вычислительных операций при вычислении циклической свертки вещественных данных. Однако дискретное преобразование Хартли также имеет ряд недостатков в первую очередь это высокая вычислительная сложность O(Nlog2N)). Это позволяет сделать вывод о необходимости усовершенствования дискретного преобразования Хартли. Проведенные исследования показали, что такое усовершенствование возможно с использованием метода моментов. Таким образом, **актуальной задачей исследования** представляется усовершенствование дискретного преобразования Хартли для снижения его вычислительной сложности на основе метода моментов.

Основная часть

Проведенные исследования показали, что для быстрого вычисления математических операций часто применяют метод моментов, который позволяет путем замены более сложных функций на идентичные по функциональности простые функции упростить математические расчеты.

Определим взаимосвязь между дискретным преобразованием Хартли и методом моментов. Принцип основан на модульном сопоставлении и разложении функции в бесконечную сумму степенных функций, т.е. рядов Тейлора. Следовательно, дискретное преобразование может быть изменено при вычислении простых моментов.

Дискретное преобразование Хартли определяет вещественную длину N последовательности x(n) ($0 \le n \le N\text{-}1$), следующим выражением:

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\big(\cos(2\pi nk / N) + \sin(2\pi nk / N)\big), \quad 0 \le k \le N-1. \tag{1}$$

Представим (1) в следующем виде: для каждой пары k и i (i, k = 0, 1, 2, …, N-1) определяем множество S (k, i) таким образом:

$$S(k, i) = \{n \mid kn \bmod N \equiv i, \quad 0 \le n \le N-1\},$$

затем определяем элементы $x_{k,i}$ (i, k = 0, 1, 2,…, N-1):

$$x_{k,i} = \begin{cases} \sum_{s \in S(k,i)} x(s). & S(k,i) \ne \varnothing; \\ 0, & S(k,i) \ne \varnothing. \end{cases} \quad (2)$$

Используя периодические свойства синуса и косинуса запишем:

$$x(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x_{k,i} \left(\cos(2\pi i / N) + \sin(2\pi i / N)\right),$$
$$0 \le i \le N-1.$$

Далее:

$$\begin{aligned} &\cos(2\pi i / N) = 1 - (2\pi i / N)^2 / 2! + ... + (-1)^p \times \\ &\times (2\pi i / N)^{2p} / (2p)! + R_i \cos = \cos(\xi_{i\cos} + \\ &+ (2p+1)\pi / 2)(2\pi i / N)^{2p+1} / \\ &/ (2p+1)!, 0 \le \xi_{i\cos} \le 2\pi i / N; \\ &\sin(2\pi i / N) = (2\pi i / N) / 1! - (2\pi i / N)^3 / 3! + ... + \\ &+ (-1)^p (2\pi i / N)^{2p+1} / (2p+1)! + R_{i\sin} = \\ &= \sin(\xi_{i\sin} + (p+1)\pi)(2\pi i / N)^{2p+2} / (2p+2)!; \\ &0 \le \xi_{i\sin} \le 2\pi i / N. \end{aligned} \quad (3)$$

После применения теоремы больших чисел к косинусу cos(2πi/N) и синусу sin(2πi/N), $R_{i\cos}$ и $R_{i\sin}$ образуют квадратичную форму Лагранжа.

Подставляя их в соотношение (3) получим:

$$\begin{aligned} x(k) &= x_{k,0} + \sum_{n=0}^{N-1} x_{k,i} \sum_{r=0}^{p} \Big[(-1)^p (2\pi i / N)^{2r} / (2r)! + \\ &+ (-1)^r (2\pi i / N)^{2r+1} / (2r+1)! \Big] + R_{k,p} = \\ &= x_{k,0} + \sum_{n=0}^{p} (-1)^p (2\pi)^{2r} / N^{2r} (2r)! \sum_{i=1}^{N-1} x_{k,i}{}^{2r} + \\ &+ \sum_{n=0}^{p} (-1)^p (2\pi)^{2r+1} / N^{2r+1} (2r+1)! \cdot \sum_{i=1}^{N-1} x_{k,i}{}^{2r+1} + R_{k,p} \end{aligned} \quad (4)$$

при $0 \le k \le N-1$, где

$$\begin{aligned} R_{k,p} &= \sum_{i=1}^{N-1} x_{k,i} (\cos(\xi_{i\cos} + (2p+1)\pi / 2) \times \\ &\times (2\pi i / N)^{2p+1} / (2p+1)! + \sin(\xi_{i\sin} + (p+1)\pi) \times \\ &\times (2\pi i / N)^{2p+2} / (2p+2)!; \end{aligned} \quad (5)$$

$0 < \xi_{i\sin}, \xi_{i\cos} < 2\pi i / N$.

Обозначим:

$$\begin{aligned} a_r &= (-1)^q (2\pi)^{2q} N^{2q} (2q)!, \quad r = 2q; \\ a_r &= (-1)^q (2\pi)^{2q+1} N^{2q} (2q+1)!, \quad r = 2q+1, \end{aligned} \quad (6)$$

при $0 \le q \le p$;

$$m_{k,i} = \sum_{i=1}^{N-1} x_{k,i} i^r. \quad (7)$$

Из неравенства (5) видно, что $R_{k,p}$ стремится к нулю при увеличении p.

Тогда, если в (4) опустим $R_{k,p,}$ и сделаем замены при помощи (6) и (7), получим:

$$x(k) = x_{k,0} + \sum_{r=o}^{2p+1} a_r m_{k,i}, \quad 0 \le k \le N-1. \quad (8)$$

Эффективность данного вычисления в большей степени зависит от эффективности вычисления моментов. При дальнейшем анализе предлагается алгоритм вычисления одномерных моментов:

```
ALGORITHM MOMENT p (an, an-1, an-2 ,…, a2, a1)
    Input: initial p, a1, a2, a3,…, an-1, an
    Moment = an
    For i=1 to n-1
    call Fp (Moment)
    Moment = Fp (Moment) + an-1
    end for
End MOMENT p
```

Данный алгоритм позволяет реализовать алгоритм быстрого вычисления одномерного дискретного преобразования Хартли таким образом:

1. Вычисление последовательностей векторов $x_{k,i}$ (i, k = 0, 1, 2,…, N-1) и a_r (r=0, 1, 2, …, 2p+1),
2. Вычисление тактов систолического массива $m_{k,r}$ (r =0, 1, 2, …, 2p+1; k = 0, 1, 2, …, N-1);
3. Вычисление конечной последовательности для расчета вектора X(k), (k = 0, 1, 2, …, N-1)

Алгоритм вычисления X(k) описан ниже:

```
ALGORITHM FHT (p,N, x(0), x(1), … x (N-1))
    Input: initial p,N, x(0), x(1), … x (N-1)
    Call Processing
    For k=0 to N-1
    call Moment2p-1 (xk,N-1, xk,N-2,…, xk,1 )
    X(k)=0
    For r=0 to p+1
    X(k)= X(k)+ ar mk,r
    end for
End FHT
```

Расчет значений в последовательности $x_{k,0,}$ $x_{k,1}$, …, $x_{k,N-1}$ требует выполнения N – N / НОД (k,N) X(k) (k = 0, 1, 2, …, N-1) сложений, где НОД (k, N) – наибольший общий делитель. Поэтому вычисление $x_{k,i}$ требует $N^2 - \sum_{k=0}^{N-1} N / \text{НОД}(k,N)$ сложений. Вычисление времени момента (2p+1)N требует (2p+2)(2p+3)(N-2)N/2 сложений. Вычисление X(k) (k = 0,1,2,…,N-1) включает (2p+2)N сложений и (2p+1)N умножений, т.е. суммарно необходимо выполнить $N^2 - \sum_{k=0}^{N-1} N / \text{НОД}(k,N) + (2p+2) \times$ $\times (2p+3)(N-2)N / 2$ сложений и (2p+1)N умножений. При простом N количество сложений рассчитывается по более простой формуле:

$$N^2 - \sum_{k=0}^{N-1} 2p + 2)(2p+3)(N-2)N / 2.$$

Алгоритм быстрого вычисления дискретного преобразования Хартли преобразования состоит из последовательности действий, которые позволяют ускорить реализацию уже существующего дискретного преобразования Хартли.

В общем виде структура основных операций усовершенствованного дискретного преобразования Хартли представлена на рис. 1.

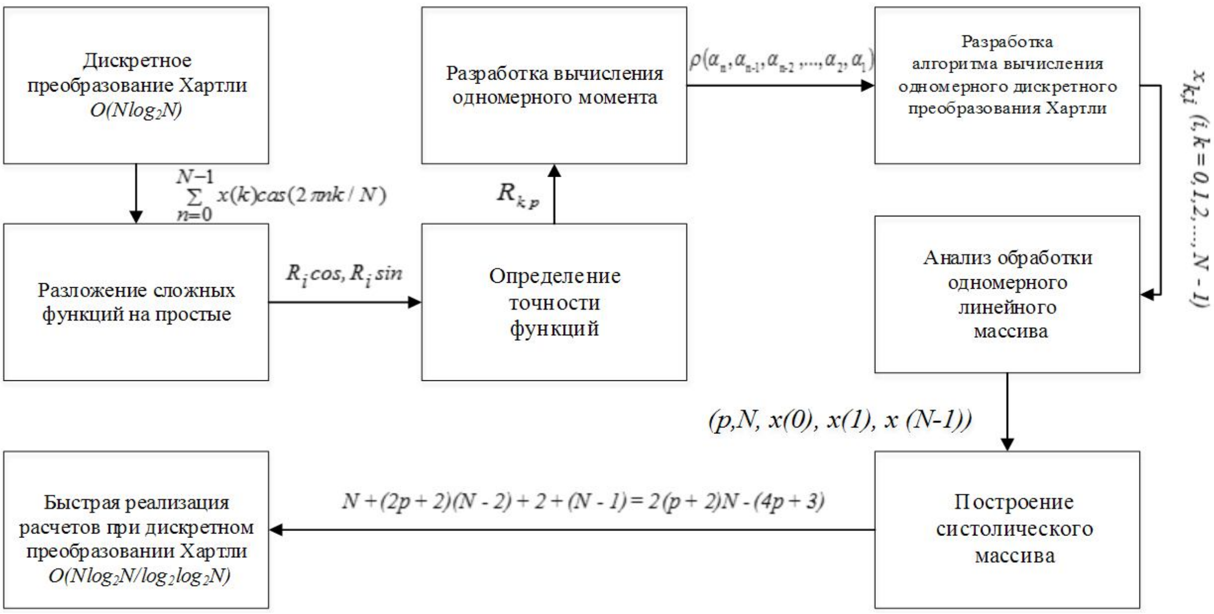

Рис. 1. Алгоритм быстрого вычисления дискретного преобразования Хартли

Выводы

Рассмотрена задача усовершенствования дискретного преобразования Хартли для сжатия данных путем применения новой системы расчета, в основу которой положен метод моментов, а именно, модульное сопоставление функций. При выполнении данных действий использовались методы, которые позволяют вычислять как дискретные моменты, так и дискретное преобразование Хартли. Такой подход, а именно упрощение расчетных данных, позволил ускорить процесс обработки, что дало возможность проводить вычисление дискретного преобразования Хартли на оптимальном уровне.

Разработан алгоритм вычисления одномерных моментов который благодаря замене сложных функций на простые позволит повысить оперативность одномерного дискретного преобразования Хартли.

Список литературы

1. *Брейсуэлл Р. Преобразование Хартли. Теория и приложения / Р.Брейсуэлл. – М.: Мир, 1990. – 175 с.*
2. *Пей С.-Ц. Распределение вычислительного псевдо-Вигнера быстрым преобразования Хартли / С.-Ц. Пей, И.-И. Ян // IEEE Trans. – 1992. – 40. – P. 2346-2349.*
3. *Карлащук В.И. Электронная лаборатория на IBM PC. Лабораторний практикум на Electronics Workbench та VisSim по элементам телекоммуникационных систем / В.И. Карлащук. – М: СОЛОН- Пресс, 2005. – 450 с.*
4. *Бунемановская О. Многомерное преобразование Хартли / О. Бунемановская // Proc.IEEE. – 1987. – 75. – P. 26.*
5. *Дюамель П. Алгоритмы преобразований Фурье и Хартли: применение циклической свертки реальных данных / П. Дюамель, М. Веттерли // IEEE Trans. – 1986. – 34. – P. 642-644.*

Поступила в редколлегию 16.10.2015

Рецензент: д-р техн. наук, с.н.с. С.Г. Семенов, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

УДОСКОНАЛЕННЯ ДИСКРЕТНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ХАРТЛІ НА ОСНОВІ МЕТОДУ МОМЕНТІВ

А.Е. Горюшкіна

Розглядається один з алгоритмів перетворення і визначення його оптимальності у системах зв'язку. Проведений аналіз дискретних перетворень Фурьє і Хартлі. Визначена доцільність удосконалення дискретного перетворення Хартлі для вирішення завдань оперативного стиснення даних. Вдосконалено дискретне перетворення Хартлі на основі методу моментів. Розроблений алгоритм і запропонована структурна схема швидкого обчислення дискретного перетворення Хартлі. Зроблені виводи про доцільність модульного зіставлення функцій в розрахунках дискретного перетворення Хартлі.

Ключові слова: *дискретне перетворення Хартлі, метод моментів.*

IMPROVEMENT OF DISCRETE TRANSFORMATION IS OFFERED KHARTLEY ON BASIS OF MOMENTS METHOD

A.E. Gorushkina

One of algorithms of transformation and definition of its optimality in communication systems is considered. The analysis of Khartley and Fur'e discrete transformations is conducted . Expedience of improvement of discrete transformation is certain Khartley for the decision of tasks of operative compression of data. Discrete transformation is improved Khartli on the basis of method of moments. An algorithm is developed and the flow diagram of rapid calculation of discrete transformation is offered Khartley. Conclusions are done about expedience of module comparison of functions in the calculations of discrete transformation Khartley.

Keywords: *discrete transformation Khartley, method of moments.*