УДК 681.2-5

Бакер Альравашдех, М.П. Сергиенко

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПРИ ИДЕНТИФИКАЦИИ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДСТВ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ТИПА

В работе предложен метод определения постоянной времени и коэффициента затухания амплитудно-частотной характеристики средства измерительной техники, моделируемого динамическим звеном колебательного типа, основанный на методе наименьших квадратов, что позволяет повысить точность идентификации параметров за счет получения большего количества информации о поведении средства измерительной техники в условиях измерительного эксперимента. Исследованы стандартные неопределенности постоянной времени и коэффициента затухания. Даны рекомендации по оптимизации условий измерительного эксперимента по идентификации амплитудно-частотных характеристик средств измерительной техники, моделируемых динамическим звеном колебательного типа.

Ключевые слова: *средство измерительной техники, динамическое звено колебательного типа, динамическая характеристика, амплитудно-частотная характеристика, стандартная неопределенность*

Введение

В настоящее время требования к точности и быстродействию средств измерительной техники (СИТ) во всех сферах жизнедеятельности человека повышаются, что связано со стремлением к унификации и стандартизации как требований к продукции, так и требований к методам и средствам испытаний этой продукции. Актуальным этот вопрос является и для оборудования, применяемого при испытаниях автотранспортных средств, в состав которого входят датчики и СИТ с передаточными функциями второго порядка, которые могут быть представлены в виде динамического колебательного звена, например, акселерометры.

Для таких датчиков и СИТ одними из основных метрологических характеристик являются динамические характеристики (ДХ) [1 – 3], отражающие их инерционные свойства (в том числе и быстродействие), поэтому идентификация и коррекция ДХ являются важными задачами, решение которых позволит повысить точность и достоверность получаемых результатов измерений. С другой стороны, решение этих задач, особенно задачи идентификации, осложнено существенно нелинейными соотношениями между ДХ и их параметрами, такими как постоянная времени и коэффициент затухания, показатель затухания, угловая частота колебаний.

Методы идентификации ДХ СИТ, моделируемых динамическим звеном колебательного типа, рассмотрены в [4 – 7], однако большинство из них оперируют ограниченным количество информации, не используя всего потенциала данных, которые могут быть получены в ходе измерительного эксперимента. Так, графические и графоаналитические методы, рассмотренные в [4], чаще всего опираются на экстремумы (минимумы и максимумы) переходной, импульсной или амплитудно-частотной характеристик. Методы, рассматриваемые [6, 7] используют два значения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ), что в реальных условиях при наличии помех и шумов во входных и выходных сигналов СИТ может с высокой вероятностью привести к получению результатов с большой расширенной неопределенностью.

Преимущество АЧХ перед другими ДХ заключается прежде всего в том, что измерения АЧХ осуществляются в установившемся режиме, что повышает точность идентификации за счет уменьшения случайной составляющей погрешности измерений.

Целью данной работы является адаптация метода наименьших квадратов, эффективность которого при обработке результатов измерений не вызывает сомнений, к задаче идентификации АЧХ СИТ, моделируемых динамическим звеном колебательного типа.

Метод идентификации АЧХ СИТ

АЧХ СИТ, моделируемого динамическим звеном колебательного типа, имеет вид

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\omega\xi T)^2}}, \qquad (1)$$

где ω – круговая частота; k – статический коэффициент преобразования СИТ; T – постоянная времени СИТ; ξ – коэффициент затухания.

Это выражение можно преобразовать к виду

$$(1-\omega^2T^2)^2+(2\omega\xi T)^2=\frac{k^2}{A^2(\omega)}, \qquad (2)$$

где ω и k известны, а значения $A(\omega)$ могут быть измеренными.

Выражение (2) может быть преобразовано к виду

$$1-2\omega^2T^2+\omega^4T^4+4\omega^2T^2\xi^2=\frac{k^2}{A^2(\omega)}, \qquad (3)$$

откуда следует

$$\omega^2T^4+2T^2(2\xi^2-1)=\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{k^2}{A^2(\omega)}-1\right). \qquad (4)$$

Вводя обозначения

$$\beta(\omega)=\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{k^2}{A^2(\omega)}-1\right);$$

$$T^4=a;\ 2T^2(2\xi^2-1)=b, \qquad (5)$$

можно получить систему линейных уравнений

$$a\omega_i^2+b=\beta(\omega_i), \qquad (6)$$

где $i=1\ldots N$, N – количество частот, на которых осуществлено измерение АЧХ.

Система (6) в простейшем случае может быть решена при наличии полученных на двух частотах ω_1 и ω_2 значений АЧХ $A(\omega_1)$ и $A(\omega_2)$, то есть

$$\begin{cases} a\omega_1^2+b=\beta(\omega_1); \\ a\omega_2^2+b=\beta(\omega_2), \end{cases} \qquad (7)$$

где $\beta(\omega_1)$ и $\beta(\omega_2)$ определяются подстановкой в выражение (5) значений ω_1, ω_2 и $A(\omega_1)$, $A(\omega_2)$.

Решением системы (7) является

$$a=\frac{\begin{vmatrix}\beta(\omega_1) & 1\\ \beta(\omega_2) & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\omega_1^2 & 1\\ \omega_2^2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{\beta(\omega_1)-\beta(\omega_2)}{\omega_1^2-\omega_2^2}; \qquad (8)$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix}\omega_1^2 & \beta(\omega_1)\\ \omega_2^2 & \beta(\omega_2)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\omega_1^2 & 1\\ \omega_2^2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{\omega_1^2\beta(\omega_2)-\omega_2^2\beta(\omega_1)}{\omega_1^2-\omega_2^2}. \qquad (9)$$

Постоянная времени T и коэффициент затухания ξ определяются в соответствии с выражениями (5) по формулам

$$T=\sqrt[4]{a}; \qquad (10)$$

$$\xi=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}+1\right)}. \qquad (11)$$

Для повышения точности идентификации параметров T и ξ в условиях измерительного эксперимента (при наличии помех различного происхождения) предлагается применить метод наименьших квадратов, хорошо проработанный теоретически для системы линейных уравнений [8].

Сумма квадратов невязок

$$Q=\sum_{i=1}^{N}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{N}(a\omega_i^2+b-\beta(\omega_i))^2$$

достигает минимума, когда все ее частные производные равны нулю, то есть

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial a}=2\sum\limits_{i=1}^{N}\omega_i^2(a\omega_i^2+b-\beta(\omega_i))=0; \\ \dfrac{\partial Q}{\partial b}=2\sum\limits_{i=1}^{N}(a\omega_i^2+b-\beta(\omega_i))=0. \end{cases} \qquad (12)$$

Вводя обозначения

$$[\omega^2]=\sum_{i=1}^{N}\omega_i^2;\ [\omega^4]=\sum_{i=1}^{N}\omega_i^4;$$

$$[\beta(\omega)]=\sum_{i=1}^{N}\beta(\omega_i);\ [\omega^2\beta(\omega)]=\sum_{i=1}^{N}\omega_i^2\beta(\omega_i),$$

можно получить систему нормальных уравнений

$$\begin{cases} a\cdot[\omega^4]+b\cdot[\omega^2]=[\omega^2\beta(\omega)]; \\ a\cdot[\omega^2]+N\cdot b=[\beta(\omega)], \end{cases} \qquad (13)$$

решением которой является

$$a=\frac{N[\omega^2\beta(\omega)]-[\omega^2][\beta(\omega)]}{N[\omega^4]-[\omega^2]^2}; \qquad (14)$$

$$b=\frac{[\omega^4][\beta(\omega)]-[\omega^2][\omega^2\beta(\omega)]}{N[\omega^4]-[\omega^2]^2}. \qquad (15)$$

Параметры T и ξ определяются по формулам (10) и (11).

Стандартные неопределенности коэффициентов a и b оцениваются по формулам

$$u(a)=\sqrt{\frac{N}{N[\omega^4]-[\omega^2]^2}}u(\delta); \qquad (16)$$

$$u(b)=\sqrt{\frac{[\omega^4]}{N[\omega^4]-[\omega^2]^2}}u(\delta), \qquad (17)$$

где $u(\delta)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N}\delta_i^2\Big/(N-2)}$ – стандартная неопределенность невязок δ_i, которые вычисляются при подстановке оценок коэффициентов a и b в систему уравнений

$$\delta_i = a\omega_i^2 + b - \beta(\omega_i)\,. \qquad (18)$$

Стандартная неопределенность постоянной времени T в соответствии с уравнением измерения (10) будет иметь вид

$$u(T) = \frac{\partial T}{\partial a}u(a) = \frac{1}{4T^3}u(a)\,. \qquad (19)$$

Стандартная неопределенность коэффициента затухания ξ в соответствии с уравнением измерения (11) будет иметь вид

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial a}\right)^2 u^2(a) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial b}\right)^2 u^2(b)} = \\ &= \frac{1}{4T^2\xi}\sqrt{\frac{1}{T^4}\left(\xi^2 - \frac{1}{2}\right)^2 u^2(a) + \frac{1}{4}u^2(b)}. \end{aligned} \qquad (20)$$

Для акселерометра со статическим коэффициентом преобразования $k = 1g = 9{,}8\,м/с^2$, постоянной времени $T = 8$ мс и коэффициентов затухания $\xi = 0{,}6$ зависимости стандартных неопределенностей $u(T)$ и $u(\xi)$ от количества частот N, на которых осуществлено измерение АЧХ, при $u[A(\omega_i)] = 0{,}02A(\omega_i)$ показаны на рис. 1.

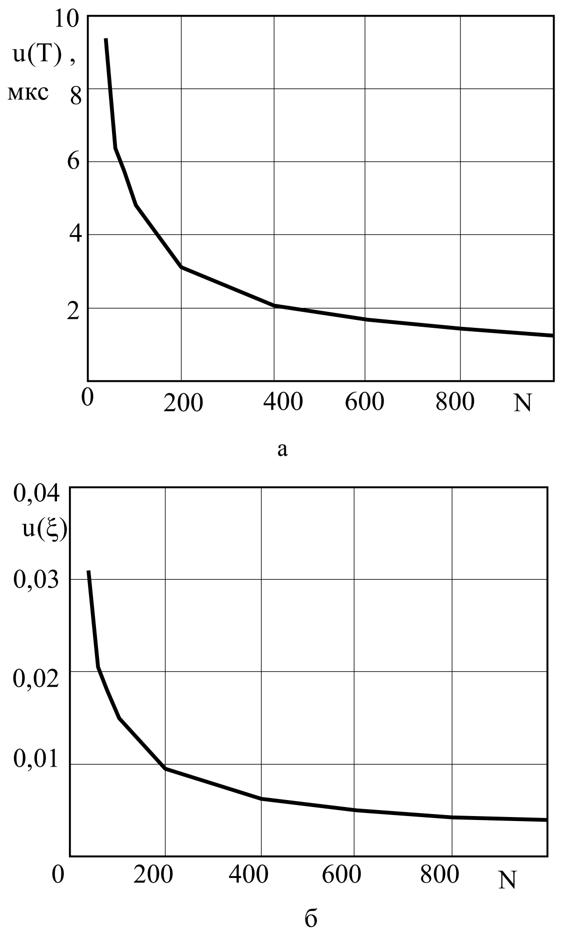

Рис. 1. Зависимости $u(T)$ (а) и $u(\xi)$ (б) от N

Диапазон частот составил

$$\omega = (10\ldots1000)\ \text{рад/с}.$$

Исследование проведено путем математического моделирования с усреднением 20 наблюдений в каждой точке, при этом:

для $u(T)$ среднее квадратическое отклонение (СКО) составило от 3 мкс при $N = 40$ до 0,06 мкс при $N = 1000$,

для $u(\xi)$ СКО составило от 0,013 при $N = 40$ до 0,0002 при $N = 1000$.

Из зависимостей рис. 1 очевидно, что стандартные неопределенности убывают с ростом числа наблюдений.

Зависимости $u(T)$ и $u(\xi)$ от $u[A(\omega_i)]$ при $N = 100$ показаны на рис. 2.

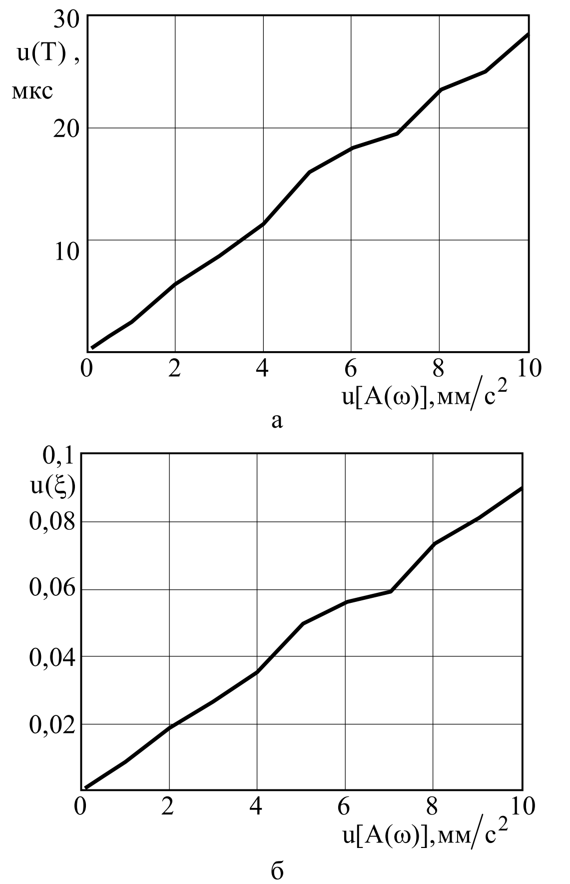

Рис. 2. Зависимости $u(T)$ (а) и $u(\xi)$ (б) от $u[A(\omega)]$ при $N = 100$

Для $u(T)$ СКО составило:

– от 0,04 мкс при $u[A(\omega)] = 10^{-4}\,\frac{м}{с^2}$;

– до 5 мкс при $u[A(\omega)] = 10^{-2}\,\frac{м}{с^2}$, для $u(\xi)$ СКО составило:

– от 0,0001 при $u[A(\omega)] = 10^{-4}\ \frac{м}{с^2}$;

– до 0,02 при $u[A(\omega)] = 10^{-2}\ \frac{м}{с^2}$.

Зависимости рис. 2 показывают, что стандартные неопределенности $u(T)$ и $u(\xi)$ возрастают пропорционально $u[A(\omega)]$, следовательно, при проведении измерительного эксперимента для уменьшения $u[A(\omega)]$, возникающей преимущественно вследствие наличия помех и шумов при измерении АЧХ, целесообразно осуществлять дополнительно многократные наблюдения на каждой исследуемой частоте ω_i с последующим усреднением значений АЧХ.

Выводы

Разработан метод определения постоянной времени и коэффициента затухания на основании метода наименьших квадратов, что позволяет повысить точность идентификации АЧХ за счет получения большего количества информации о поведении СИТ в условиях измерительного эксперимента. Исследованы стандартные неопределенности постоянной времени и коэффициента затухания. По сравнению с данными, полученными в работе [6], стандартная неопределенность постоянной времени может быть уменьшена более, чем в 10 раз, стандартная неопределенность коэффициента затухания – более, чем в 4 раза. Даны рекомендации по оптимизации условий эксперимента по идентификации АЧХ СИТ, моделируемых динамическим звеном колебательного типа.

Список литературы

1. ГОСТ 8.009-84 ГСИ. Нормирование и использование метрологических характеристик средств измерений. – М.: Изд-во стандартов, 1988.–38 с.

2. ГОСТ 8.256-77 ГСИ. Нормирование и определение динамических характеристик аналоговых средств измерений. Основные положения. – М.: Изд-во стандартов, 1980. – 8 с.

3. ГОСТ 8.508-84 ГСИ. Метрологические характеристики средств измерений и точностные характеристики средств автоматизации ГСП. Общие методы оценки и контроля. – М.: Изд-во стандартов, 1984. – 53 с.

4. Захаров И.П. Метрологическая идентификация динамических характеристик средств измерительной техники: Учебное пособие / И.П. Захаров, М.П. Сергиенко. – Х.: ХНУРЭ, 2012. – 231 с.

5. Быкова Т.В. Методы обработки результатов динамических измерений [Текст]: учеб. пособие / Т.В. Быкова, Г.А. Черепащук. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т», 2011. – 175 с.

6. Бакер Аль-Равашдех. Оценивание неопределенности идентификации амплитудно-частотных характеристик средств измерительной техники колебательного типа / Бакер Аль-Равашдех, Лейт Ахмед Мустафа Аль Равашдех, М.П. Сергиенко // Системи обробки інформації. – Х.: ХКПС, 2014. – Вип. 3(119). – С. 14 – 17.

7. Аль-Равашдех Бакер, Сергиенко М.П. Идентификация динамических характеристик измерителей мощности СВЧ диапазона / 24-я Международная Крымская конференция «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» (КрыМиКо'2014). Севастополь, 7 – 13 сентября 2014 г.: материалы конф. в 2 т. Севастополь: Вебер, 2014. – Т. 2. – С. 890 – 891.

8. Теоретична метрологія. Навч. посібник / Упоряд. І.П. Захаров. – Х.: ХТУРЕ, 2000. – 172 с.

Поступила в редколлегию 19.12.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.П. Захаров, Харьковский национальной университет радиоэлектроники, Харьков.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ПРИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ АМПЛІТУДНО-ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗАСОБІВ ВИМІРЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ КОЛИВАЛЬНОГО ТИПУ

Бакер Альравашдех, М.П. Сергієнко

В роботі запропоновано метод визначення сталої часу та коефіцієнта затухання амплітудно-частотної характеристики засобу вимірювальної техніки, що моделюється динамічною ланкою коливального типу, який ґрунтується на методі найменших квадратів, що дозволяє підвищити точність ідентифікації параметрів за рахунок отримання більшої кількості інформації про поведінку засобу вимірювальної техніки в умовах вимірювального експерименту. Досліджені стандартні невизначеності постійної часу й коефіцієнта затухання. Наведені рекомендації щодо оптимізації умов вимірювального експерименту з ідентифікації амплітудно-частотних характеристик засобів вимірювальної техніки, що моделюються динамічною ланкою коливального типу.

Ключові слова: *засіб вимірювальної техніки, динамічна ланка коливального типу, динамічна характеристика, амплітудно-частотна характеристика, стандартна невизначеність.*

AN APPLICATION OF A LEAST SQUARES METHOD FOR THE IDENTIFICATION OF OSCILLATORY TYPE MEASURING DEVICES GAIN-FREQUENCY CHARACTERISTIC

Baker Alravashdeh, M.P. Sergienko

In this article there is suggested a method, which determines both a time constant and a gain-frequency characteristic damp constant for a measuring device, which is simulated by oscillating type dynamic element. The described method is based on a least squares method, which increases an identification accuracy because of obtaining more information about a measuring device performance during a measurement process. The standard uncertainties of both a time constant and a damp constant are analyzed. The recommendations for measuring process, which was mentioned above, optimization are given.

Keywords: *measuring device; oscillating type dynamic link; dynamic characteristic; gain-frequency characteristic; standard uncertainty.*