УДК 519.232.2

В.Ю. Дубницкий, И.Г. Скорикова

Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ (Киев)

РЕШЕНИЕ В НЕЯВНОМ ВИДЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ОДНОМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Рассмотрена задача определения математического ожидания и среднеквадратического отклонения (дисперсии) плотности распределения непрерывной случайной величины как функции параметров этого распределения (обратная задача моделирования распределения непрерывной случайной величины). Решение задачи получено для обобщённого распределения Эрланга, бета-распределения второго рода, логарифмически нормального распределения с использованием метода Ньютона для решения системы нелинейных уравнений. Получены выражения для элементов решения, облегчающие процедуру их программирования. Для распределений Вейбулла и Накагами решение задачи получено с использованием обратной интерполяции таблиц, в которых приведены данные для решения прямой задачи.

Ключевые слова: *обратная задача моделирования непрерывной случайной величины, обобщённое распределение Эрланга, бета-распределение второго рода, логарифмически нормальное распределение, распределение Вейбулла, распределение Накагами, метод Ньютона для решения системы нелинейных уравнений, обратная интерполяция.*

Введение

В работе [1] поставлена обратная задача моделирования непрерывной одномерной случайной величины. Для её решения при известном типе распределения случайной величины необходимо найти зависимость параметров моделируемого распределения от заданных числовых характеристик – математического ожидания и среднеквадратического отклонения. Подобная задача возникает при статистическом моделировании поведения систем различной природы. Её появление вызвано тем, что в алгоритмы, предназначенные для генерирования квазислучайных величин, распределённых по известному закону, входят параметры распределения: сдвига, положения, масштаба. На предварительной стадии моделирования для большинства распределений, как правило, известны только математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение. Поэтому возникает задача определения параметров распределения в виде функций от его начальных характеристик – математического ожидания среднеквадратического отклонения. Рассмотрим решение этой задачи на примере распределения Мойяла [2, 3, 4]. Плотность этого распределения имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x-\mu}{2\lambda}-\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x-\mu}{\lambda}\right)\right). \quad (1)$$

В условии (1) и далее принято, что μ – параметр положения, λ – параметр масштаба. Для рассматриваемого закона распределения эти характеристики связаны с числовыми характеристиками – математическим ожиданием m и среднеквадратическим отклонением s зависимостями вида:

$$m=\lambda\left(\gamma+\ln 2\right)+\mu, \quad (2)$$

и

$$s=\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda\pi. \quad (3)$$

В условии (2) величина γ =0,5772 – постоянная Эйлера. Решая уравнения (2), (3) относительно переменных λ,μ , получим, что:

$$\lambda=\frac{5s}{11,057}; \quad \mu=\frac{11,057m-6,353s}{11,057}. \quad (4)$$

Постановка задачи. В рамках данной работы будут рассмотрены двухпараметрические распределения, в которых известны зависимости вида:

$$\begin{cases}\mu=g_1(m,s),\\ \lambda=g_2(m,s).\end{cases} \quad (6)$$

Требуется получить зависимости вида:

$$\begin{cases}m=q_1(\lambda,\mu),\\ s=q_2(\lambda,\mu).\end{cases}. \quad (7)$$

В условиях (6), (7) значения величин m,s известны до начала моделирования. В рамках данной работы рассмотрены распределения непрерывных случайных величин, для которых решение задачи (7) может быть получено в неявном виде.

Анализ литературы. В работе [1] определённая условиями (1) – (4) задача поставлена в общем виде и решена для нормального распределения, показательного распределения, распределения Лапласа, распределения минимального значения, распределения максимального значения, двойного показательного распределения, логистического распределения, гамма-распределения, распределения Эрланга n-го порядка, распределения Рэлея, распределения Максвелла, параболического распределения, распределения Симпсона, распределения арксинуса, обратного Гауссовского распределения, распределения Коши, однопараметрического распределения модуля n-мерной случайной величины, гиперэкспоненциального распределения, бета-распределения, обобщённого бета-распределения, распределения Бирнбаума-Сандерса.

В работе [7] решение этой задачи получено для плотности распределения специального вида, используемого при анализе величины рисков в процессе выполнения актуарных вычислений.

Полученные результаты

Для решения поставленной задачи в работе использован метод Ньютона для решения систем двух нелинейных уравнений, использованный в виде, описанном в работе [5]. Для этого представим систему (7) в виде:

$$\begin{cases} F = F(\lambda,\mu) = m - q_1(\lambda,\mu) = 0; \\ G = G(\lambda,\mu) = s - q_2(\lambda,\mu) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Якобиан для системы (8) примет вид:

$$J(\lambda,\mu) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial F}{\partial\mu} \\ \dfrac{\partial G}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial G}{\partial\mu} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Определитель

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix} F & \dfrac{\partial F}{\partial\mu} \\ G & \dfrac{\partial G}{\partial\mu} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Определитель

$$\Delta_\mu = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial\lambda} & F \\ \dfrac{\partial G}{\partial\lambda} & G \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Последовательные значения корней этой системы представим в виде:

$$\begin{cases} \lambda_{n+1} = \lambda_n - \dfrac{\Delta_\lambda^{(n)}}{J(\lambda_n,\mu_n)}, \\ \mu_{n+1} = \mu_n - \dfrac{\Delta_\mu^{(n)}}{J(\lambda_n,\mu_n)}. \end{cases} \tag{12}$$

В дальнейшем изложении там, где это не вызывает недоразумений, индекс номера итерации n будет опускаться.

Рассмотрим решение поставленной задачи применительно к обобщённому распределению Эрланга второго порядка, свойства которого описаны в работе [6]. Плотность этого распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{\lambda\eta}{\lambda-\mu}\left(e^{-\mu x} - e^{-\lambda x}\right),\ x \ge 0. \tag{13}$$

Параметры этого распределения $\lambda > 0, \eta > 0$ связаны с математическим ожиданием m, дисперсией D и среднеквадратическим отклонением s равенствами:

$$m = \frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu}, \tag{14}$$

$$D = \frac{\lambda^2+\mu^2}{(\lambda\mu)^2}, \tag{15}$$

$$s = \frac{\sqrt{\lambda^2+\eta^2}}{\lambda\mu}. \tag{16}$$

Использование условия (15) вместо условия (16) упрощает решение задачи и не увеличивает затруднений при выборе исходных данных для решения поставленной задачи.

Условия (8) в данном случае примут вид

$$\begin{cases} F = F(\lambda,\mu) = m - q_1(\lambda,\mu) = m - \dfrac{\lambda+\mu}{\lambda\mu} = 0; \\ G = G(\lambda,\mu) = D - q_2(\lambda,\mu) = D - \dfrac{\lambda^2+\mu^2}{(\lambda\mu)^2} = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Якобиан (9) для системы (17) примет вид:

$$J(\lambda,\mu) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial F}{\partial\mu} \\ \dfrac{\partial G}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial G}{\partial\mu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\lambda^2} & \dfrac{1}{\mu^2} \\ \dfrac{2}{\lambda^3} & \dfrac{2}{\mu^3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & E \end{vmatrix} = \frac{2(\lambda-\mu)}{(\lambda\mu)^3}. \tag{18}$$

Определитель вида (10) для системы (17), принимая во внимание условие (18), запишем в виде:

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix} F & B \\ G & E \end{vmatrix} = \frac{\lambda^3(2m\mu-1) - 2\lambda^2\mu + \lambda\mu^2 - 2\mu^2}{\lambda^3\mu^4}. \tag{19}$$

Определитель вида (11) для системы (17), принимая во внимание условие (18), запишем в виде:

$$\Delta_\mu = \begin{vmatrix} A & F \\ C & G \end{vmatrix} = \frac{\mu^2\left(d\lambda^2 - 2m\lambda + 1\right) + 2\lambda\mu - \lambda^2}{\lambda^4\mu^2}. \tag{20}$$

Примем, что:

$$U_n = \left(\frac{\Delta_\lambda}{J(\lambda,\mu)}\right)_n = \left(\frac{\lambda^3(2m\mu-1) - 2\lambda^2\mu + \lambda\mu^2 - 2\mu^2}{\lambda^3\mu^4}\right)_n; \tag{21}$$

$$W_n = \left(\frac{\Delta_\mu}{J(\lambda,\mu)}\right)_n = \left(\frac{\mu\left[\lambda^3 + 2\lambda^2\mu(m\mu-1) - \lambda\mu^2 - 2\mu^2\right]}{2\lambda^2(\mu-\lambda)}\right)_n. \tag{22}$$

Тогда итеративная процедура поиска решения обратной задачи для обобщённого распределения Эрланга второго порядка примет вид:

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - U_n; \tag{23}$$

$$\mu_{n+1} = \mu_n - W_n. \tag{24}$$

Начальные значения λ_0, μ_0, используя рекомендации, приведенные в работе [6] и приняв, что:

$$Z = \sqrt{2D - m^2}, \tag{25}$$

получим в виде условий:

$$\lambda_0 = \frac{m \pm Z}{D \pm mZ}, \tag{26}$$

$$\mu_0 = \frac{m \pm Z}{m^2 - D}. \tag{27}$$

В дальнейшем изложении там, где это не вызывает недоразумений, индекс номера итерации n будет опускаться.

Рассмотрим решение поставленной задачи применительно к бета-распределению второго рода, свойства которого в описаны в работе [6]. Плотность этого распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{B(u,v)} \cdot \frac{x^{u-1}}{(1+x)^{u+v}} = \frac{\Gamma(u+v)}{\Gamma(u)\Gamma(v)} x^{(u-1)} (1+x)^{-(u+v)},$$

$$x > 0; u > 0, v > 0. \tag{28}$$

Математическое ожидание рассматриваемого распределения имеет вид:

$$m = \frac{u}{v-1}, v > 1. \tag{29}$$

Дисперсия бета-распределения второго рода имеет вид:

$$D = \frac{u(u+v-1)}{(v-1)^2 (v-2)}, v > 2. \tag{30}$$

Условия (8) в данном случае примут вид:

$$\begin{cases} F = F(u,v) = m - \dfrac{u}{v-1} = 0; \\ G = G(u,v) = D - \dfrac{u(u+v-1)}{(v-1)^2 (v-2)} = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Якобиан (9)для системы (28) примет вид:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & E \end{vmatrix} = \frac{u(u+v-1}{(1-v)^3 (v-2)^2}. \tag{32}$$

Значение якобиана (32) получено при условии, что:

$$A = \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{1-v}; \quad B = \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{u}{(v-1)^2};$$

$$C = \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{2u+v-1}{(2-v)(v-1^2)}; \tag{33}$$

$$E = \frac{\partial G}{\partial v} = \frac{u\left[u(3v-5) + 2v^2 - 5v + 3\right]}{(v-2)^2 (v-1)^3}. \tag{34}$$

Определитель вида (10) для системы (31), принимая во внимание условия (31) – (34) , запишем в виде:

$$\Delta_u = \begin{vmatrix} F & B \\ G & E \end{vmatrix} = \frac{u^3(3-2v)}{(v-2)^2 (v-1)^4} + \\ + \frac{u^2[m(3v-5)+v-1]}{(v-2)^2(v-1)^3} - \frac{u[D(v-2)^2 + m(3-2v)]}{(v-1)^2(v-2)^2}. \tag{35}$$

Определитель вида (11) для системы (31), принимая во внимание условия (31) – (34), запишем в виде:

$$\Delta v = \begin{vmatrix} A & F \\ C & G \end{vmatrix} = \\ = \frac{u^2 + 2mu(v-1) - (v-1)^2(Dv - 2D - m)}{(v-2)(v-1)^3}. \tag{36}$$

Принимая во внимание условия (12) и (13), получим, что:

$$U_n = \left(\frac{\Delta_u}{J(u,v)}\right)_n = \left(\begin{array}{c} \dfrac{(v-1)(v-2)[D(v-2)+m-1]}{u+v-1} + \\ + \dfrac{u(2v-3)}{1-v} + m(5-3v) + v - 2 \end{array}\right)_n; \tag{37}$$

$$W_n = \left(\frac{\Delta_v}{J(u,v)}\right)_n = \left(\begin{array}{c} \dfrac{(v-2)[D(v-2)(v-1)^2}{u(u+v-1)} + \\ + \dfrac{m(1-v)(2u+u-1) - u^2]}{u(u+v-1)} \end{array}\right)_n. \tag{38}$$

Тогда итеративная процедура поиска решения обратной задачи для бета-распределения второго рода примет вид:

$$u_{n+1} = u_n - U_n; \tag{39}$$

$$v_{n+1} = v_n - W_n. \tag{40}$$

Начальные значения u_0, v_0, используя рекомендации, приведенные в работе [6], получим в виде условий:

$$v_0 = \frac{m(m+1)}{D} + 2; \quad u_0 = m\left(\frac{\sqrt{D}}{m} - 1\right). \tag{41}$$

Рассмотрим решение поставленной задачи для логарифмически нормального распределения, свойства которого описаны в работе [6]. Плотность этого распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{ux\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\left[\ln(x/v)\right]^2}{2u^2}\right\}, x > 0. \tag{42}$$

Математическое ожидание рассматриваемого распределения имеет вид:

$$m = v\exp\left(\frac{u^2}{2}\right). \tag{43}$$

Дисперсия логарифмически нормального распределения имеет вид:

$$D = v^2 \exp(u^2)\left[\exp\left(u^2\right) - 1\right]. \tag{44}$$

Условия (8) в данном случае примут вид:

$$\begin{cases} F = F(u,v) = m - v\exp\left(\dfrac{u^2}{2}\right) = 0; \\ G = G(u,v) = D - v^2\exp(u^2)\left[\exp\left(u^2\right) - 1\right] = 0. \end{cases} \qquad (45)$$

Якобиан (9) для системы (45) примет вид:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & E \end{vmatrix} = -2uv^2\exp\left(\dfrac{5u^2}{2}\right). \qquad (46)$$

Значение якобиана (46) получено при условии, что:

$$A = \frac{\partial F}{\partial u} = -vu\exp\left(\frac{-u^2}{2}\right); \quad B = \frac{\partial F}{\partial v} = \exp\left(\frac{-u^2}{2}\right); \qquad (47)$$

$$C = \frac{\partial G}{\partial u} = 2uv^2\exp\left(u^2\right)\left(1 - 2\exp\left(u^2\right)\right);$$

$$E = \frac{\partial G}{\partial v} = 2v\exp\left(u^2\right)\left(1 - \exp\left(u^2\right)\right). \qquad (48)$$

Определитель вида (10) для системы (45), принимая во внимание условия (46) – (48), запишем в виде:

$$\Delta_u = \begin{vmatrix} F & B \\ G & E \end{vmatrix} =$$

$$= \exp\left(\frac{u^2}{2}\right)\begin{bmatrix} v^2\exp(2u^2) - 2mv\exp\left(\dfrac{3u^2}{2}\right) - \\ -v^2\exp\left(u^2\right) + 2mv\exp\left(\dfrac{u^2}{2}\right) + d \end{bmatrix}. \qquad (49)$$

Определитель вида (11) для системы (45), принимая во внимание условия (46) – (48), запишем в виде:

$$\Delta v = \begin{vmatrix} A & F \\ C & G \end{vmatrix} =$$

$$= -uv\exp\left(\frac{u^2}{2}\right)\begin{bmatrix} 3v^2 - 4mv\exp\left(\dfrac{3u^2}{2}\right) - \\ -v^2\exp\left(u^2\right)2mv\exp\left(\dfrac{u^2}{2}\right) + d \end{bmatrix}. \qquad (50)$$

Принимая во внимание условия (12) и (13), получим, что:

$$U_n = \left(\frac{\Delta_u}{J(u,v)}\right)_n = \begin{bmatrix} \dfrac{m\exp\left(-\dfrac{u^2}{2}\right)}{uv} + \dfrac{\exp\left(-u^2\right) - 1}{2u} - \\ -\dfrac{m\exp\left(-\dfrac{3u^2}{2}\right)}{uv} - \dfrac{d\exp\left(-2u^2\right)}{2uv^2} \end{bmatrix}_n ; \qquad (51)$$

$$W_n = \left(\frac{\Delta_v}{J(u,v)}\right)_n = \left(T_n - K_n\right), \qquad (52)$$

где

$$T_n = \left[\frac{3v}{2} + \frac{d\exp\left(-2u^2\right)}{2v} + m\exp\left(-\frac{3u^2}{2}\right)\right]_n ; \qquad (53)$$

$$K_n = \left[\frac{v\exp\left(-u^2\right)}{2} - 2\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right]_n . \qquad (54)$$

Тогда итеративная процедура поиска решения обратной задачи для логарифмически-нормального распределения примет вид:

$$u_{n+1} = u_n - U_n; \qquad (55)$$

$$v_{n+1} = v_n - W_n. \qquad (56)$$

Начальные значения u_0, v_0, используя рекомендации, приведенные в работе [6], и приняв, что коэффициент вариации

$$\vartheta = \frac{\sqrt{D}}{m} = \sqrt{\exp(u^2 - 1)} \qquad (57)$$

получим в виде условий:

$$v_0 = \frac{m}{\sqrt{1 + \vartheta^2}}; \qquad (58)$$

$$u_0 = \sqrt{\ln\left(1 + \vartheta^2\right)}. \qquad (59)$$

Рассмотренные примеры характерны тем, что система уравнений (8), решающая поставленную задачу, содержит выражения, составной частью которых служат элементарные функции. Во многих случаях для выражения зависимости начальных характеристик случайной величины от параметров её распределения используют выражения, содержащие специальные функции. В этом случае решение поставленной задачи для каждого типа распределения становится самостоятельной задачей. Решение задачи значительно упрощается при использовании различного рода упрощённых методов. Рассмотрим возможные методы её решения на примерах распределений Вейбулла и Накагами.

Рассмотрим решение поставленной задачи для распределения Вейбулла, свойства которого описаны в работе [6]. Плотность этого распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{v}{u}\left(\frac{x}{u}\right)^{v-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{u}\right)^v\right]. \qquad (60)$$

Математическое ожидание m случайной величины, распределённой по закону Вейбулла, имеет вид:

$$m = u\Gamma\left(\frac{1}{v} + 1\right). \qquad (61)$$

Для решения задачи о выборе параметров распределения Вейбулла, соответствующих его заранее заданным числовым характеристикам, использовали следующую последовательность действий.

1. Исходными данными, как и в ранее рассмотренных задачах, были математическое ожидание m и среднеквадратическое отклонение s.

2. Используя условие (54), определяли величину предполагаемого коэффициента вариации ϑ.

3. По данным табл. 3.1, приведенным в [6, С. 151], получали интерполяционные формулы вида $v = \psi(\vartheta)$.

4. Из условия (58) определяли величину

$$u = m \cdot \left[\Gamma\left(\frac{1}{v} + 1\right) \right]^{-1}. \quad (62)$$

Интерполяционные формулы вида $v = \psi(\vartheta)$ с указанием области их применения приведены в табл. 1.

Таблица 1

Интерполяционные формулы для определения параметра формы v распределения Вейбулла в зависимости от коэффициента вариации ϑ

Вид модели	Границы применимости модели	Определение качества модели*)		
		Rad	Pv	MAE
$v = (0,8641 + 1,4767 \ln \vartheta)$	$1,053 \le \vartheta \le 15,83$	0,9983	$< 1 \cdot 10^{-4}$	0,040
$C = (-0.049 + 1.0523\vartheta)^{-1}$	$0,363 \le \vartheta \le 1$	0,9999	$< 1 \cdot 10^{-4}$	0.001
$C = \exp\left(3,7915 - 4,5365\sqrt{\vartheta}\right)$	$0,12 \le \vartheta \le 0.316$	0,9963	$< 1 \cdot 10^{-4}$	0,013
$C = \exp(0,0741 - 1,051 \ln \vartheta)$	$0,06 \le \vartheta < 0,12$	0,9998	$< 1 \cdot 10^{-4}$	0,002

Примечание: Rad – скорректированный коэффициент детерминации; Pv – величина ошибки первого рода, MAE – средняя абсолютная ошибка интерполяции.

Особо следует рассмотреть процедуру вычисления функции

$$g(v) = \Gamma(1/v + 1). \quad (63)$$

Для решения задачи о выборе параметров распределение Накагами, соответствующих его заранее заданным числовым характеристикам, использовали следующую последовательность действий.

Вычисление значения функции вида (63) не представляет труда при использовании практически всех основных математических пакетов. Задача усложняется, если пользователь попытается решить ее, используя такой распространённый пакет, как EXCEL. Вычисление гама-функции в виде встроенной подпрограммы предусмотрено в версии EXCEL-2013, в более ранних версиях эта процедура отсутствует. В этом случае для вычисления численного значения условия (60) можно использовать приведенное в работе [8, С. 151] выражение вида:

$$g_1(v) = \Gamma\left(\frac{1}{v} + 1\right) \approx 1 - 0,427(v-1)v^{-1,9}. \quad (64)$$

Для проверки возможности использования выражения (64) для определения численных значений функции, задаваемой условием (64), выполнены расчёты, результаты которых приведены в табл. 2.

Таблица 2

Сравнение значений функции $\Gamma(1/v + 1)$, вычисленных специализированной подпрограммой (функция $g(v)$) по аппроксимационной формуле (функция $g_1(v)$)

ϑ	0,2	0,24	0,28	0,32	0,36	0,40	0,44	0,48	0,50	0,55	0,60
v	15,834	9,248	6,304	4,727	3,771	3,141	2,697	2,370	2,236	1,965	1,758
$g(v)$	0,967	0,948	0,930	0,915	0,903	0,895	0,889	0,886	0,886	0,886	0,890
$g_1(v)$	0,966	0,948	0,931	0,916	0,905	0,896	0,889	0,886	0,885	0,885	0,889

Из приведенных данных видно, что в основном рабочем диапазоне изменения коэффициента вариации ϑ условие (64) даёт хорошее приближение величины, указанной в условии (60).

Рассмотрим решение поставленной задачи для распределения Накагами, свойства которого описаны в работе [6]. Плотность этого распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha} x^{2\alpha-1} \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{\beta}\right), \quad x > 0, \beta > 0. \quad (65)$$

Математическое ожидание определяют по условию:

$$m = \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}. \quad (66)$$

Последовательность действий при решении поставленной задачи следующая.

1. Начальными данными, как и в ранее рассмотренных задачах, были математическое ожидание m и среднеквадратическое отклонение s.

2. Используя условие (54), определяли величину предполагаемого коэффициента вариации ϑ.

3. По данным табл.3.3, приведенным в [6, С. 179], получена интерполяционная формула вида

$$\alpha(\vartheta) = \left(0.0515 + \frac{0.4904}{\vartheta}\right)^2, \text{Rad} = 0{,}9990,$$

$$\text{Pv} < 1 \cdot 10^{-4}, \text{ MAE}=0.003. \qquad (67)$$

4. Подставив выражение (64) в (63), и, разрешая его относительно параметра u, получим, что:

$$\beta = \left[\frac{m\Gamma(\alpha^*) \cdot \sqrt{\alpha^*}}{\Gamma\left(\alpha^* + 1/2\right)}\right]^2. \qquad (68)$$

В условии (68) верхний символ $(*)$ означает, что численное значение параметра α определено по условию (67).

Выводы

1. Рассмотрена задача определения математического ожидания и среднеквадратического отклонения (дисперсии) плотности распределения непрерывной случайной величины как функции параметров этого распределения (обратная задача моделирования распределения непрерывной случайной величины).

2. Решение задачи получено для обобщённого распределения Эрланга, бета-распределения второго рода, логарифмически нормального распределения с использованием метода Ньютона для решения системы нелинейных уравнений.

3. Получены выражения для элементов решения, облегчающие процедуру их программирования.

4. Для распределений Вейбулла и Накагами решение задачи получено с использованием обратной интерполяции таблиц, в которых приведены данные для решения прямой задачи.

Список литературы

1. *Дубницкий В.Ю. Решение в явном виде обратной задачи моделирования непрерывной одномерной случайной величины / В.Ю. Дубницкий, И.Г. Скорикова // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2015. – Вип. 1(126). – С. 106-110.*

2. *Moyal J.E. Theory of ionization fluctuation / J.E. Moyal // Philosophical magazine. – 1955. – V.46. – P. 263.*

3. *Walck C. Hand-book on statistical distributions for experinantalists / C. Walck. – Stockholm: Universitet Stockholms, 2007. – 189 p.*

4. *Catherine Forbes. Statistical distributions; Fourth edition / Catherine Forbes, Merran Evans, Nicholas Hastings, Brian Peacock. – Hoboken, New Jersey: A John Wiley & sons, Inc., 2011. – 211 p.*

5. *Копченова Н.В. Вычислительная математика в примерах и задачах / Н.В. Копченова, И.А.Марон. – М.: Изд. «НАУКА», 1972. – 368 с.*

6. *Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям / Р.Н. Вадзинский. – М.: НАУКА, 2001. – 295 с.*

7. *Рибальченко С.А. Вибір функції розподілу для моделювання ризику в страхуванні / С.А. Рибальченко // Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах: Труды Международной научной школы МА БР 2010. – СПб.: ГУАП. СПб., 2010. – С. 380-386.*

8. *Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / А.И. Кобзарь. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.*

Поступила в редколлегию 11.12.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.А. Гороховатский, Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ (Киев), Харьков.

РОЗВ'ЯЗАННЯ В НЕЯВНОМУ ВИГЛЯДІ ЗВОРОТНОЇ ЗАДАЧІ МОДЕЛЮВАННЯ НЕПЕРЕРВНОЇ ОДНОВИМІРНОЇ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

В.Ю. Дубницький, І.Г. Скорікова

Розглянуто задачу визначення математичного сподівання і середньоквадратичного відхилення (дисперсії) щільності розподілу неперервної випадкової величини як функції параметрів цього розподілу (зворотня задача моделювання розподілу неперервної випадкової величини). Задача розв'язана для узагальненого розподілу Ерланга, бета-розподілу другого роду, логарифмічно нормального розподілу з використанням методу Ньютона для розв'язання системи нелінійних рівнянь. Отримано вирази для елементів розв'язання рівнянь, які полегшують процедуру їх програмування. Для розподілів Вейбулла і Накагамі розв'язання задачі отримано з використанням зворотної інтерполяції таблиць, в яких наведено дані для розв'язання прямої задачі.

***Ключові слова**: зворотня задача моделювання неперервної випадкової величини, узагальнений розподіл Ерланга, бета-розподіл другого роду, логарифмічно нормальний розподіл, розподіл Вейбулла, розподіл Накагамі, метод Ньютона для розв'язання системи нелінійних рівнянь, зворотня інтерполяція.*

IMPLICIT SOLUTION OF INVERSE PROBLEM OF CONTINUOUS ONE-DIMENSIONAL RANDOM QUANTITY MODELING

V.Yu. Dubnyzkyj, I.G. Skorikova

The determination problem of expectation value and standard deviation (dispersion) of random distribution density as parameter function of this distribution (inverse problem of continuous random quantity) is considered. The problem is solved for Erlang distribution, beta-distribution - distribution of different kind, normal logarithmical distribution by usage of Newton's method for system solving of nonlinear equation. The expressions of equation solution are received, which make their programming procedure simpler. For Weibull and Nakagami distributions the problem solution was received by usage of tables regressive interpolation, which contain the data for primal problem solution.

***Keywords**: inverse problem of continuous random quantity, Erlang distribution, distribution of different kind, normal logarithmical distribution, Weibull distribution, distribution of Newton's method for system solving of nonlinear equation, regressive interpolation.*