УДК 517.927.6

А.Г. Руткас, В.Г. Худов

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Харьков

РЕШЕНИЕ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Работа посвящена нахождению метода решения дифференциального уравнения с многоточечным краевым условием. Получены формулы для линейного неоднородного дифференциального уравнения с многоточечным краевым условием, которые являются более удобными для практического применения.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, многоточечная задача, краевая задач, необходимое условие, прикладная математика.*

Вступление

Постановка проблемы в общем виде. Результаты решения многоточечных краевых задач для систем дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений используются при моделировании различных процессов, рассматриваемых в прикладной математике, математической физике, химии, экологии, биологии и других науках.

Это актуально, когда вместо классических краевых условий задана определенная связь между значениями искомой функции в конечной системе точек.

В настоящее время большой интерес представляет поиск новых методов решения многоточечной краевой задачи для дифференциальных уравнений.

Цель статьи – получить необходимые условия разрешимости и явный вид решения для систем неоднородных дифференциальных уравнений с многоточечным краевым условием.

Анализ последних достижений и публикаций. В работах И.Т. Кигурадзе [1, 2] получены условия существования и единственности решения для систем неоднородных дифференциальных уравнений с многоточечным краевым условием, явный вид которого выражается с помощью матрицы-функции Грина.

Другой известный вариант решения системы линейных дифференциальных уравнений с многоточечным краевым условием был предложен московским математиком Ю.А.Коняевым [3] в 1992 году.

Практическое применение указанных выше формул довольно сложно. Для упрощения вычислений в работе найден специальный вид решения, что и является **целью данной статьи**.

Постановка задачи и изложение материалов исследования

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с многоточечным краевым условием

$$\begin{cases} A_0(t)\dot{x}(t) + B(t)x(t) = f_0(t), t \in [0,T]; \\ \sum\limits_{k=1}^{m} F_k x(t_k) = a, \end{cases} \tag{1}$$

где $A_0(t), B(t)$ – $n \times n$ -матрицы, компонентами которых являются непрерывные на [0,T] вещественнозначные функции, $f(t)$ – n-мерная вектор-функция, компонентами которой являются интегрируемые на [0,T] вещественнозначные функции, a - постоянный n-мерный вектор с вещественными коэффициентами, F_k – постоянные $n \times n$ -матрицы, $t_k \in [0,T]$, (k = 1, …, m).

В случае, если $\forall t \in [0,T] : \det A_0(t) \neq 0$, то данная система может быть сведена к системе следующего вида

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -A_0^{-1}(t)B(t)x(t) + A_0^{-1}(t)f_0(t) \\ \sum\limits_{k=1}^{m} F_k x(t_k) = a \end{cases}$$

Вводя следующие обозначения

$$-A_0^{-1}(t)B(t) := A(t),$$

$$A_0^{-1}(t)f_0(t) := f(t),$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), t \in [0,T]\$ \\ \sum\limits_{k=1}^{m} F_k x(t_k) = a. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим условия разрешимости систем вида (2) и получим формулу для явного решения таких задач. Рассмотрим многоточечную краевую задачу для стационарной матрицы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), t \in [0,T]; \\ \sum\limits_{k=1}^{m} F_k x(t_k) = a, \end{cases} \tag{3}$$

где A – постоянная $n \times n$ -матрица.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 1. Если выполнено условие

$$\det F = \det\left[\sum_{k=1}^{m} F_k e^{A(t_k - t_1)}\right] \neq 0,$$

тогда решение задачи (3) единственно и имеет вид:

$$x(t) = e^{A(t-t_1)}F^{-1}\left[a - \sum_{k=1}^{m} F_k e^{At_1}\int_{t_1}^{t_k} e^{-A\tau}f(\tau)d\tau\right] +$$

$$+\int_{t_1}^{t} e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau.$$

Доказательство.

С учетом формулы вариации постоянной [4] решением начальной задачи Коши

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t);\\ x(t_1) = x_0\end{cases}$$

является функция (4)

$$x(t) = e^{A(t-t_1)}x_0 + \int_{t_1}^{t} e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau, \qquad (4)$$

где $e^W = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{W^k}{k!}$ – матричная экспонента.

Для каждой точки $t_k, k = 1,...,m$ выражение (4) принимает вид

$$x(t_k) = e^{A(t_k-t_1)}x_0 + \int_{t_1}^{t_k} e^{A(t_k-\tau)}f(\tau)d\tau.$$

Умножим каждую часть уравнения слева на матрицу F_k (k=1,…,m) и просуммируем.

В итоге получим следующее выражение

$$\sum_{k=1}^{m} F_k x(t_k) = \left[\sum_{k=1}^{m} F_k e^{A(t_k-t_1)}\right]x_0 +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} F_k e^{At_k}\int_{t_1}^{t_k} e^{-A\tau}f(\tau)d\tau.$$

Воспользовавшись краевым условием из (3), получаем

$$\left[\sum_{k=1}^{m} F_k e^{A(t_k-t_1)}\right]x_0 + \sum_{k=1}^{m} F_k e^{At_k}\int_{t_1}^{t_k} e^{-A\tau}f(\tau)d\tau = a. \qquad (5)$$

Таким образом, если выполняется условие

$$\det F = \det\left[\sum_{k=1}^{m} F_k e^{A(t_k-t_1)}\right] \neq 0, \qquad (6)$$

то путем домножения слева на матрицу F^{-1} выражения (5), получим

$$x_0 = \left[\sum_{k=1}^{m} F_k e^{A(t_k-t_1)}\right]^{-1} \times \left\{a - \sum_{k=1}^{m} F_k e^{At_k}\int_{t_1}^{t_k} e^{-A\tau}f(\tau)d\tau\right\}. \qquad (7)$$

Подставляем найденное из выражения (7) значение x_0 в выражение (4), получаем

$$x(t) = e^{A(t-t_1)}F^{-1}\left[a - \sum_{k=1}^{m} F_k e^{At_1}\int_{t_1}^{t_k} e^{-A\tau}f(\tau)d\tau\right] +$$

$$+\int_{t_1}^{t} e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau$$

Таким образом, теорема доказана.

Рассмотрим случай нестационарной матрицы $A(t)$. Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 2.

Рассматривается задача (2)

Пусть $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, и пусть выполнено условие

$$\det\overline{F} = \det\left[\sum_{k=1}^{m} F_k\Phi(t_k)\right] \neq 0,$$

тогда решение задачи (2) единственно и имеет вид

$$x(t) = \Phi(t)\overline{F}^{-1}(t)\left[a - \sum_{k=1}^{m} F_k\Phi(t_k)\int_{t_1}^{t_k}\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau\right] +$$

$$+\Phi(t)\int_{t_1}^{t}\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Доказательство.

Решением задачи Коши

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t);\\ x(t_1) = x_0\end{cases}$$

является [5] функция

$$x(t) = \Phi(t,t_1)x_0 + \int_{t_1}^{t}\Phi(t,\tau)f(\tau)d\tau, \qquad (8)$$

где $\Phi(t,\tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$.

В каждой точке $t_k, k = 1,...,m$ формула (8) принимает вид

$$x(t_k) = \Phi(t_k, t_1)x_0 + \int_{t_1}^{t_k} \Phi(t_k, \tau)f(\tau)d\tau .$$

Выполняя те же шаги, что и при доказательстве теоремы 1, получаем

$$x_0 = \Phi(t_1)\left[\sum_{k=1}^{m} F_k \Phi(t_k)\right]^{-1} \times$$

$$\times\left\{a - \sum_{k=1}^{m} F_k \Phi(t_k)\int_{t_1}^{t_k} \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau\right\}.$$

Подставляя x_0 в (8), получим

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_1)\Phi(t_1)\left[\sum_{k=1}^{m} F_k \Phi(t_k)\right]^{-1} \times$$

$$\times\left\{a - \sum_{k=1}^{m} F_k \Phi(t_k)\int_{t_1}^{t_k} \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau\right\} +$$

$$+ \Phi(t)\int_{t_1}^{t} \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Теорема доказана.

Выводы и направления дальнейших исследований

Таким образом, в работе найдены необходимые условия и предоставлена формула для нахождения решения многоточечной краевой задачи для систем неоднородных дифференциальных уравнений в случаях стационарной и не стационарной матрицы, стоящей перед искомым вектором. При этом полученная формула намного проще для практических вычислений, чем известные ранее.

Также подготовлена необходимая база для изучения разрешимости многоточечной краевой задачи для дифференциально-алгебраического уравнения

$$\begin{cases} A(t)\dot{x}(t) + B(t)x(t) = f(t), t \in [0,T]; \\ \sum_{k=1}^{m} F_k x(t_k) = a. \end{cases}$$

В дальнейших исследованиях необходимо получить необходимые условия для разрешимости задач такого вида и доказать формулу для нахождения его явного вида.

Список литературы

1. Кигурадзе И.Т. Начальная и краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Т. Кигурадзе. – Тбилиси, 1997. – 312 с.

2. Кигурадзе И.Т. Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Т. Кигурадзе // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. – 1987. – Т. 30. – С. 3-103.

3. Коняев Ю.А. Конструктивные методы исследования многоточечных краевых задач / Ю.А. Коняев // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 2. – С. 57-61.

4. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. – М.: Наука, 1974 – 331 с.

5. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970. – 720с.

6. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Дж. Сансоне. – М. : Издательство иностранной литературы, 1953. – Т. 1. – 347 с.

7. Васильев Н.И. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.И. Васильев, Ю.А. Клоков. – Рига: ЗИНАТНЕ, 1978. – 189 с.

Поступила в редколлегию 12.01.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Г.А. Кучук, Харьковский университет Воздушных Сил имени Ивана Кожедуба, Харьков.

РОЗВ'ЯЗАННЯ БАГАТОТОЧКОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

А.Г. Руткас, В.Г. Худов

Робота присвячена знаходженню метода розв'язання диференціального рівняння з багатоточковими крайовими умовами. В роботі отримані формули для лінійного неоднорідного диференціального рівняння з багатоточковими крайовими умовами, які є більш зручними для практичного використання.

Ключові слова: *диференціальне рівняння, багатоточкова задача, крайова задача, необхідна умова, прикладна математика.*

SOLVING MULTIPOINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

A.G. Rutkas, V.H. Khudov

The work is devoted to finding methods for solving differential equations with multipoint boundary condition. In this work was obtained formulas for linear inhomogeneous differential equation with multi-point boundary condition, which is more convenient for practical use then known results.

Keywords: *differential equation multipoint problems, boundary value problems, necessary condition, applied mathematics.*